गणितम्

$$(-10) + (92) + (84) + (-15)$$
$$= (-10) + (-15) + 92 + 84$$
$$= (-25) + 176 = 151$$

सप्तमकक्ष्यायै पाठ्यपुस्तकम्

गणितम्

सप्तमकक्ष्यायै पाठ्यपुस्तकम्

विद्ययाऽमृतमश्नुते

एन सी ई आर टी

राष्ट्रिय-शैक्षिकानुसन्धान-प्रशिक्षण-परिषद्

NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONL RESEARCH AND TRAINING

मार्चमासः 2012 इत्यस्मात् संस्करणात्
अस्माभिः संस्कृतानुवादः कृतः ।

आमुखम्

राष्ट्रिय-पाठ्यचर्यायाः रूपरेखा (2005) बोधयति यत् छात्राणां विद्यालयजीवन-बाह्यजीवनयोः मध्ये सम्बन्धः प्रकल्पनीयः इति । एषः सिद्धान्तः पुस्तकीय-ज्ञानस्य तस्य न्यासस्य विपरीतम् अस्ति यस्य प्रभावद्वारा अस्माकं व्यवस्था एतावत्पर्यन्तं विद्यालय-गृहयोः मध्ये बहु-अन्तरं रक्षति। नूतन-पाठ्यचर्याधारितः पाठ्यक्रमः पाठ्यपुस्तकं च अस्य पारम्परिक-विचारस्य उपरि अवधानं करोति । एषः तु पारम्परिक-रटनशैलीं परित्यज्य प्रत्येकम् अपि विषयस्य दृढ-भित्ति-निवारणस्य प्रयत्नः अस्ति। आशा अस्ति यत् अयं प्रयत्नः बालकेन्द्रितशिक्षणं प्रति अस्मान् सुदूरं नेष्यति।

अस्य प्रयत्नस्य साफल्यम् अस्मिन् तथ्ये सन्निहितं वर्तते यद् विद्यालयानां प्राचार्याः शिक्षकाः च छात्रान् कल्पनाशीलगतिभिः शङ्काभिः च अधिगमने एवञ्च अधिगमनावधौ स्वानुभवान् विचारयितुम् अवसरान् यच्छन्ति । अस्माभिः एतद् अङ्गीकर्तव्यं यत् यदि छात्राणां कृते स्थानं समयः स्वतन्त्रता च दीयते तर्हि ते ज्येष्ठैः प्रदत्तयोः सूचना-सामग्र्योः साहाय्येन नूतनं ज्ञानम् आत्मसात् कुर्वन्ति। शिक्षायाः विभिन्नसाधनानां स्रोतसां च अदर्शनस्य प्रमुखं कारणं भवति पाठ्यपुस्तकं परीक्षायाः एकमात्रम् आधाररूपेण स्वीकरणप्रवृत्तिः । सर्जनात्मकतायाः उपक्रमस्य च विकासः तदा एव सफलो भवति यदा शिक्षकाः छात्रान् अधिगमप्रक्रियायाः मुख्यभागिनः इति अवगच्छेयुः तथा च तान् निर्धारित-ज्ञान-ग्राहकान् इति मा स्वीकुर्युः ।

एतानि उद्देश्यानि विद्यालयस्य दैनिकजीवने कार्यशैल्यां च विपुलपरिवर्तनानि अपेक्षन्ते। दैनिकसमयसारिण्याः तावती नमनीयता स्यात् यावती शिक्षणस्य वार्षिक-दिनदर्शिकायाः व्यवहारे सजगता। येन शिक्षणस्य निर्धारित-दिनसङ्ख्या सत्यत्वम् आप्नोत्। शिक्षण-मूल्याङ्कन–विधयः एनम् एव अंशं निर्धारयन्ति यत् अनेन पाठ्यपुस्तकेन छात्राः मानसिक-खिन्नतां पठने च आलस्यं परित्यज्य सन्तोषकरम् अनुभवं प्राप्नुयुः। बालमनोविज्ञानं मनसि निधाय छात्राणां भारानुभवस्य निदानार्थम् उपलब्ध-समयस्य-उपरि अवधानं दत्त्वा पुस्तकमिदं निर्मितमस्ति । पाठ्यपुस्तकमिदं प्रयत्नमेनम् इतोऽपि अग्रे नेतुं छात्राणां चिन्तन-विचाराणां, विस्मयानां, लघुसमूहे वार्तालापानाम्, अथ हस्तेन क्रियमाण-गतिविधीनां च प्राधान्यं प्रयच्छति।

एन्.सी.ई.आर्.टी. अस्य पुस्तकस्य निर्माणार्थं निर्मित-समितेः परिश्रमस्य कृते कृतज्ञतां प्रकटयति । पाठ्य-पुस्तक-परामर्श-समितेः अध्यक्षस्य प्रो.जयन्त-विष्णु-नारलीकर-महोदयस्य कृते एवं च अस्य पुस्तकस्य मार्गदर्शकस्य डा.हृदयकान्त-दीवान-महोदयस्य कृते विशेषतः वयं कृतज्ञताम् अर्पयामः। अस्य पाठ्य-पुस्तकस्य विकासे नैकानां शिक्षकाणां योगदानं वर्तते अपि च तस्य उद्देश्यस्य परिपूर्तये तेषां प्राचार्याणाम् अपि योगदानम् अस्ति। अतः तेभ्यः सर्वेभ्यः कृतज्ञता अत्र व्याह्रीयते। याः संस्थाः सङ्घाः च स्व-संसाधनद्वारा सामग्रीद्वारा सहयोगिनां द्वारा च औदार्येण साहाय्यं कृतवन्तः तेभ्यः सर्वेभ्यः वयं कृतज्ञतां व्याहरामः । वयं विशेषतः माध्यमिक-उच्चतर-शिक्षाविभागस्य, मानव-संसाधन-विकास-मन्त्रालयद्वारा प्रो.मृणालमिरी अपि च प्रो.जी.पी.देशपाण्डेमहोदययोः आध्यक्षे नियुक्तायाः राष्ट्रिय-मानीटरिङ्ग-समितेः द्वारा प्रदत्तसमयस्य योगदानस्य च कृते कृतज्ञतां प्रकटयामः। व्यवस्थायाम् अपि च स्व-प्रकाशने निरन्तर-गुणात्मकतामानेतुम् एन्.सी.ई.आर्.टी. सर्वदा भवतां मार्गदर्शनं टिप्पणीः च स्वागतीकरोति येन अग्रिम-संशोधने पुस्तक-निर्माणे च साहाय्यं भवेत्।

नवदेहली
20 नवम्बरमासः 2006

निदेशकः
राष्ट्रिय-शैक्षिक-अनुसन्धान-प्रशिक्षण-परिषद्

भारतीय-संविधानम्

उद्देशिका

वयं भारतीयाः, भारतदेशम् एकं [1]**सम्पूर्ण-प्रभुत्व-सम्पन्नं, समाजवादि, पंथ-निरपेक्षं, लोकतन्त्रात्मक-गणराज्यं** निर्मातुं तथा च तस्य समस्तनागरिकाणां कृते;

सामाजिकम् आर्थिकं तथा च राजनैतिकं न्यायं,
विचारस्य अभिव्यक्तेः विश्वासस्य धर्मस्य
उपासनायाः च **स्वतन्त्रताम्**,
प्रतिष्ठायायाः अवसरस्य च **समतां**
प्रापयितुं
तथा च तेषु **सर्वेषु** मानवीयगौरवस्य तथा च [2]
राष्ट्रैयैकतायाः अखण्डतायाश्च सुनिश्चयकर्त्रीं बन्धुतां संवर्धयितुं.....

दृढसंकल्पाः भूत्वा **अस्यां स्वसंविधानसभायां** 1949 तमस्य ख्रीस्ताब्दस्य नवम्बरमासस्य 26 तमे दिनाङ्के (मार्गशीर्षे शुक्लसप्तम्यां 2006 तमे विक्रमसंवत्सरे) **एतत् संविधानम् अङ्गीकुर्मः अधिनियमितं तथा च आत्मार्पितं कुर्मः।**

---

1. संविधानाधिनियमः (द्विचत्वारिंशं संशोधनम्) 1976 इत्यस्य द्वितीय-धारायाः द्वारा (3.1.1977 तः) "प्रभुत्व-सम्पन्नलोकतन्त्रात्मक-गणराज्यम्" इत्यस्य स्थाने प्रतिस्थापितम्।
2. संविधानाधिनियमः (द्विचत्वारिंशं संशोधनम्) 1976 इत्यस्य द्वितीय-धारायाः द्वारा (3.1.1977 तः) "राष्ट्रस्य एकताः" इत्यस्य स्थाने प्रतिस्थापितम्।

प्रस्तावना

राष्ट्रीय-पाठ्यचर्या-रूपरेखा 2005 (NCF - 2005), शिक्षार्थिषु गणितीयां क्षमतां विकसितुम् अपेक्षिताम् आवश्यकतां लक्षीकरोति। तस्याम् इदं निर्दिष्टं यद् गणिताध्ययनस्य उद्देशः केवलं परिमाणात्मक–परिकलनेषु सामर्थ्यमेव न अपितु छात्रेषु तादृक्क्षमतानाम् अपि विकासः अस्ति येन ते विश्वे आत्मसम्बन्धान् पुनः परिभाषितुम् अपि समर्थाः भवितुं शक्नुयुः। NCF – 2005 इति इमां वार्ताम् अपि सबलीकरोति यत् छात्रेषु तर्कसम्बन्धिक्षमतानाम् एवञ्च आकाशस्य अथ च आकाशीय-रूपान्तराणाम् अधिगमक्षमता विकसेत् युगपदेव अनयोः द्वयोरपि मानसिकचित्रणस्य क्षमता अपि विकसिता भवेत्। NCF – 2005 इति एताम् अनुशंसां करोति यद् गणितं गम्भीरतां प्रति मन्दं मन्दम् अग्रे सरेत् यद्यपि अस्य आरम्भः सजीवस्थूलानुभवैः प्रतिरूपैः च जायते। प्रतिरूपाणि अवबुध्य तेषां व्यापकीकरणम् अस्य विषयस्य गूढ-तर्कनिष्ठ-स्वभावेन सह सम्बन्धं स्थापयितुं किञ्चन महत्त्वपूर्णं सोपानं विद्यते।

वयम् एतदपि जानीमः यद् उच्चप्राथमिक-माध्यमिक-कक्षाणाम् अधिकतराः छात्राः गणिताद् बिभ्यति एतदेव विद्यालये शिक्षार्थिभिः निजाध्ययन-परित्यागस्य बहुषु कारणेषु एकम् अन्यतमं कारणं वर्तते। NCF – 2005 इत्यस्याम् अपि अस्याः समस्यायाः उल्लेखो विद्यते अथ च अस्य निराकरणाय तस्मिन् कस्यचन सुसङ्गतस्य एवञ्च अर्थपूर्णकार्यक्रमस्य विकासावश्यकता चिह्नीकृता। गणितशिक्षणस्य अवधारणायाः अनिवार्यता शिक्षार्थिभ्यः धारणानाम् अन्वेषणस्य अथ च समस्या-समाधानस्य विधि-विकासस्य अवसरं प्रददाति तथा च इयम् NCF – 2005 इत्यस्यां मुखरितसिद्धान्तानाम् आधारशिला अपि वर्तते।

षष्ठ्यां कक्षायाम् अस्माभिः कस्यचन एतादृशस्य कार्यक्रमस्य विकास-प्रकियायाः शुभारम्भः कृतः या शिक्षार्थिषु धारणारचनायाः क्षमताविकासेन सह गणितस्य गूढप्रकृतिम् अवगन्तुम् अपि साहाय्यं कुर्यात्। विविधप्रकारैः प्रश्नानानां समाधानावसरस्य तथा च छात्रैः विभिन्नयुक्तयः याः मिथः भिन्नाः स्युः तासाम् अन्वेषणस्य कश्चन सोत्साहः प्रत्यत्नः NCF – 2005 इत्यस्यां प्रदत्ताभिमतानाम् अनुरूपं विहितः। अस्याम् एषः विषयः अपि अवधानं प्रति नीतः यत् सङ्क्षिप्तविधीनाम् एवञ्च कलनविधीनां रटनस्थाने मौलिकसिद्धान्तैः सह कार्यं स्यात्।

सप्तम्याः कक्षायाः पाठ्यपुस्तके इयं भावना अपि अग्रेसरणी यत् एतादृश्याः भाषायाः प्रयोग-प्रयासः कृतः यां छात्राः स्वयमेव पठितुम् अधिगन्तुं च शक्नुयुः। एतद् अध्ययनं समूहेषु अथवा व्यक्तिगतरूपेण भवितुम् अर्हति तथा च केषुचिद् स्थानेषु अस्मिन् अध्यापकस्य साहायता सामर्थ्यञ्च आवश्यकं भवितुं शक्नोति। अस्माभिः विभिन्नप्रकारकाणाम् उदाहरणानां समावेशनस्य तथा च शिक्षार्थिभिः स्वयमेव प्रश्ननिर्माणस्य अवसरप्रदातुम् अपि यतितम्। पुस्तकमिदम् अनेकानि चित्राणि सम्मिल्य आकर्षकं वर्तते। अस्मिन् पुस्तके छात्राणां मस्तिष्कं सक्रियरूपेण व्यापृतं भवेत् तदर्थम् अपि चेष्टा कृता तथा च इदं पुस्तकम् अनावश्यकानां दुर्ज्ञेयानां पदसङ्ख्यानां सङ्घर्षस्थाने अवधारणाः उपयुज्य एवञ्च स्वयमेव आत्मसंरचनाः विकसितुम् अवसरं प्रददाति।

वयम् आशास्महे यद् इदं पुस्तकं सर्वान् छात्रान् तेषां गणितावगमनस्य प्रयासेषु सहायकं भविष्यति तथा च तेषु गणितशक्तेः एवञ्च गणित-सौन्दर्यस्य अनुशंसासामर्थ्यं जागरिष्यति। वयम् एताम् आशाम् अपि कुर्मः यत् ते प्राथमिकविद्यालयेषु अधिगतानाम् अवधारणा-कौशलनां च पुनरावलोकने तेषां च दृढीकरणे समर्थाः भविष्यन्ति। वयं गणितस्य आधारः दृढः भवतु इति आशां कुर्मः येन आधारेण छात्रस्य उच्चतरम् अध्ययनं तथा च तस्य दैनिकजीवनं समृद्धं भवेत्।

अस्य पाठ्यपुस्तकस्य निर्माणसमितौ नैकाः अनुभविनः अध्यापकाः सम्मिलिताः सन्ति यैः दलं छात्र-विद्यालयदृष्ट्या अवगतं कारितम् । दलेऽस्मिन् एतादृशाः सदस्याः अपि सन्ति ये गणितशिक्षायाः अनुसन्धातारः सन्ति तथा च ते गणितपुस्तकानि बहुभ्यः वर्षेभ्यः लेख्यमानाः सन्ति । अस्माकं दलं छात्रमनसः गणितभयं दूरीकर्तुं गणितं च विद्यालयात् बहिः अपि दैनिकजीवनस्य भागं निर्मातुं प्रयतते । वयं देशस्य विभिन्नभागानां कैश्चिद् शिक्षकैः सह अचर्चयाम अथ च यथासम्भवं तेषाम् अभिमतानि टिप्पण्यः च पुस्तके समगृह्णीम ।

अन्ते अहं प्रो.कृष्णकुमारं निदेशकम् एन.सी.ई.आर. टी., प्रो. जी. रवीन्द्रं संयुक्तनिदेशकम् एन.सी.ई.आर.टी., प्रो. हुक्कमसिंहम् अध्यक्षं डी.ई.एस.एम., इत्यादीन् विदुषः प्रति आत्मनः कार्तज्ञ्यं प्रकटयितुम् एषिष्यामि ये मह्यं मम दलाय च एतद् आह्वानयोग्यं कार्यं कर्तुम् अवसरम् अयच्छन् । अहं विज्ञानगणितयोः परामर्शदलस्य अध्यक्षस्य प्रो. जे.वी.नारलीकरस्य अपि तेषाम् अभिमत-निमित्तं कृतज्ञतां प्रकटयामि । अहम् एन.सी. ई. आर. टी इत्यस्य प्रो.एस.के.सिहः गौतमस्य, डॉ.वी.पी. सिहस्य डॉ. आशुतोषस्य के.वझलवारस्य च ये अस्याः समितेः सदस्याः अपि सन्ति, एतत् कार्यं निजोत्कृष्ट-परिश्रमेण सम्भवकर्तुं कृतज्ञताम् अर्पयामि। अन्ते मया एन.सी.ई.आर.टी. इत्यस्य प्रकाशनविभागस्य तेषां सहयोगार्थम् अभिमतार्थं च धन्यवादः ज्ञापनीयः अन्यच्च तेषां जनानाम् अपि धन्यवादः करणीयः ये अस्य पुस्तकस्य निर्माणे सहयोगम् अकुर्वन्। समाग्री-विकासस्य प्रक्रिया अजस्रं चलति तथा च वयम् इमं पुस्तकम् इतोऽपि उत्कृष्टं कर्तुम् आशान्विताः स्मः। अस्मिन् पुस्तके निरन्तर-गुणात्मकतामानेतुं सर्वदा भवतां मार्गदर्शनस्य टिप्पण्याः च सहर्षं स्वागतं करिष्यन्ते ।

डा.हृदयकान्तः दीवानः
प्रमुख-परामर्शदाता
पाठ्यपुस्तक - विकास - समितिः

अध्यापकाय शब्दद्वयम्

एतत् पुस्तकं षष्ठ्यां कक्ष्यायाम् आरब्ध-प्रकियां सबलीकुर्वत् ताम् अग्रे अपि नयति । वयं भवद्भिः सह राष्ट्रीय-पाठ्यचर्या-रूपरेखायाम् (2005 (NCF – 2005) सन्निहितान् प्रमुखबिन्दून् अचर्चयाम । एषु अभिप्रायेषु गणितस्य छात्राणां सामर्थ्य-विकासेन सह संयोजनं तथा च दुर्बोध-परिकलन-कलनविधीनाम् अनुसरणाधिगमनम् एवञ्च अधिगमनस्य रूपरेखायाः निर्माणम् इत्यादयः सन्निहिताः आसन् । शिक्षार्थिनां मस्तिष्के गाणितीयविचाराः केवलं निर्देशनेन अथवा व्याख्यानेन नैव विकसन्ति । छात्राणां गणितावगमनाय, गणिते आत्मविश्वासं जागरयितुं तथा च तस्य मूलभूतविचारान् अवगन्तुं शिक्षकैः अवधारणानां स्वस्य काचित् रूपरेखा निर्मातव्या । एतदर्थं तेषां कृते एतादृशी काचित् कक्ष्या अनिवार्या वर्तते यस्यां ते विचारविमर्शार्हाः स्युः, समस्यानां समाधानम् अन्विष्येयुः, न केवलं नूतनान् प्रश्नान् निर्माय तान् साधयेयुः अपितु आत्माधिगमयोग्य-भाषायां परिभाषाः अपि निर्मातुं शक्नुयुः। एतद् आवश्यकं नास्ति यद् इमाः परिभाषाः आदर्शपरिभाषावद् व्यापक-परिपूर्णाः च स्युः।

गणितकक्ष्यायां पाठ्यपुस्तकस्य अन्येषां च सन्दर्भग्रन्थानाम् अध्ययने छात्राणां साहाय्यम् आवश्यकं वर्तते। सामान्यतया एतद् अपि बुध्यते यत् सामग्र्याः अध्ययनेन गणितस्य अध्ययनस्य कश्चन अपि सम्बन्धः नास्ति किन्तु कथनमेतद् अपि सत्यं वर्तते यद् उच्चतरं गणितीयज्ञानम् अर्जितुं पाठ्यसामग्रीम् अधीत्य तस्याः अवगमनम् अपि नितान्तम् आवश्यकं भवति । गणितस्य पाठ्यसामग्र्यां सङ्क्षिप्तभाषायाः प्रयोगः क्रियते। एतत् पठितुं सङ्क्षिप्ततायाः, चिह्नव्यवहार-क्षमतायाः, तर्कसङ्गतयुक्तीनाम् अवगमनस्य तथा च केषाञ्चित् प्रतिबन्धानां कारणानां च आवश्यकतावगमनम् अपेक्षितं वर्तते । गणितीयकथनानां समान्यकथनेषु परिवर्तनाभ्यासस्य अथ च सामान्यकथनानां गणितीयकथनेषु परिवर्तनाभ्यासस्य छात्राणां कृते आवश्यकं वर्तते । वयम् एषिष्यामः यत् बालाः उचितशब्दैः सम्पूर्णेन च आत्मविश्वासेन भाषाप्रयोगं कुर्युः तथा च गणितीयकथनैः संवादं कर्तुं शक्नुयुः।

उच्च-प्राथमिकस्तरीयं गणितम् एकं महदाह्वानम् अस्ति येन छात्राणाम् अनुभवं तच्च परिवेशं निकषा अवस्थातुं द्विविधं दायित्वं वोढव्यं भवति । प्रायेण छात्राः केवलं धारणासम्बधितं कार्यं कर्तुं समर्थाः न भवन्ति । तेषाम् अनुभवसम्बद्धं सन्दर्भाणां प्रतिरूपाणां च सौविध्यं तेभ्यः आवश्यकं भवति येन ते अर्थम् अन्वेष्टुं समर्थाः भवन्ति । एषा व्यवस्था अस्माकं पुरतः एकम् एतादृशं समाह्वानं प्रस्तौति यस्मिन् वयं छात्रान् सन्दर्भैः सह व्यस्तान् कुर्वन्तः शनैः शनैः तान् अस्याः निर्भरतातः दूरं नयेम । अतः यत्र छात्राः सन्दर्भेषु निहितान् सिद्धान्तान् परिचेतुं समर्थाः स्युः तत्र एतदपि आवश्यकं वर्तते ते मात्रं सन्दर्भपर्यन्तम् एव अथवा तेषु एव आश्रिताः न भवेयुः। यथा यथा वयं माध्यमिकविद्यालये अग्रे वर्धिष्यामहे तथा तथा छात्राणां तादृशस्य व्यवहारस्य अस्माकम् आकाङ्क्षाः अपि वर्धिष्यन्ते ।

गणितावगमनं मात्रं समाधानानां विधीनां च स्मरणमात्रं नास्ति अपितु एतत् परिज्ञानम् अस्ति यत् प्रश्नानां समाधानं भवेत् । समस्या-समाधानयुक्तयः विद्यार्थिभ्यः विवेकपूर्णचिन्तनस्य अवसरं प्रददति अन्यच्च तान् विधीनाम् एवञ्च प्रक्रियाणाम् अधिगमनार्हान् तथा च तासां संरचनार्हान् कुर्वन्ति । ते नव्यज्ञानस्य रचनायां मूकग्रहणकर्तारः न भूत्वा सक्रियप्रतिभागिनः प्रभवन्ति । विद्यार्थिभ्यः एतद् अपेक्षितं वर्तते यत् ते समस्याः परिचीय ताः परिभाषितं कुर्वन्तु, सम्भावित-समाधानानि चिन्वन्तु तथा च आवश्यकतानुसारं चरणान् परिशीलयन्तु अथवा तान् पुनर्निर्मान्तु । अस्यां प्रक्रियायां शिक्षकस्य भूमिका केनचित् मार्गदर्शक-

सहायकरूपेण परिवर्तते। विद्यार्थिभ्यः गतिविधिभिः एवञ्च समाह्वानपूर्ण-समस्याभिः सह समस्यासमाधानस्य अनेकाः अनुभवाः दातव्याः।

यदि कापि समस्या उत्पद्यते तदा विद्यार्थिनां कृते तस्याः व्यवस्थितरूपेण लेखनस्य अर्थात् अनुवादस्य आवश्यकता भवति। समस्यासमाधाने तेभ्यः उपयुक्तज्ञानस्य परिचयनं तथा च तदर्थं किमपि प्रारूपनिर्माणम् अपेक्षितं वर्तते । एतत् प्रतिरूपं कस्मिंश्चित् चित्रीयरूपे अथवा कस्मिंश्चित् निर्मितस्थितिरूपे भवितुम् अर्हति । अस्माभिः एतदपि स्मर्तव्यं यत् ज्यामितौ उपपत्तीनां सर्जने याः आकृतयः निर्मीयन्ते तानि आदर्शविमानविहीनानि आकृतिप्रतिरूपाणि विद्यन्ते । यद्यपि इमानि प्रतिरूपाणि अङ्क-बीजगणितीयानां समस्यानां समाधाने अपेक्षित-मूर्तप्रतिरूपस्थाने अमूर्तप्रतिरूपाणि सन्ति। समस्याः लघुभागेषु विभक्तीकृत्य उपयुक्त-प्रतिरूप-सर्जन-कौशले, शिक्षार्थिनाम् आत्मयुक्ति-विकासे तथा च समास्यानां विश्लेषणे शिक्षार्थिनां साहाय्यं नितान्तम् आवश्यकं वर्तते। कासाञ्चित् निश्चित-कलनविधीनां स्थाने एतत् सर्वं भवेत्।

शिक्षकेभ्यः सहयोगशीलां शिक्षां प्रोत्साहितुम् अपेक्षा क्रियते। निकटस्थेन उद्देश्यपूर्ण-वार्तालापेन बालाः बहु किमपि अधिगच्छन्ति। अस्माकं कक्ष्याः विद्यार्थिषु परस्परं प्रतिस्पर्धास्थाने अन्योन्येन अधिगमनेच्छां क्षमतां च विकसयेयुः। वार्तालापः कोलाहलं न भवति अन्यच्च परामर्शः अनुकरणं न भवति। एतत् किमपि समाह्वानं भविष्यति यत् कक्ष्यायां कक्ष्यासमूहानां निर्माणं भवेत् ये अन्योन्येन सह उषित्वा लाभान्विताः भवितुं शक्नुयुः तथा च प्रत्येकम् अपि शिक्षार्थी स्वसमूहस्य ज्ञानार्जने किमपि योगदानं कर्तुं शक्नुयात्। शिक्षकैः एतद् अवधातव्यं यत् विभिन्नाः बालाः विभिन्नाः च समूहाः पृथक् – पृथक् युक्तीः प्रयोक्ष्यन्ति। आसु काश्चन युक्तयः अधिकतराः कार्यसाधिकाः काश्चन अल्पतराः कार्यसाधिकाः प्रतीष्यन्ते। इमाः प्रत्येकं समूहेन प्रतिरूपतां प्रदर्शयिष्यन्ति तथा च प्रयुक्तविचाराणां प्रक्रियां सूचयिष्यन्ति । सर्वोत्तमायाः युक्तेः विग्रहणं तथा च सदोष-युक्तीनां लघूकरणम् अनुचितं भविष्यति। सर्वासां युक्तीनाम् अभिलेखं कृत्वा तासां विश्लेषणस्य आवश्यकता वर्तते । अस्मिन् सन्दर्भे अस्याः वार्तायाः चर्चा आवश्यकी वर्तते यत् काश्चन युक्तयः किमर्थं विफलिताः अभवन्। कक्ष्यासमूहरूपेण समग्रकक्ष्याः विफलिताः निष्प्रभाविताः च युक्तयः संशोध्य ताः प्रयोगार्हाः कर्तुं शक्नोति। अस्य अभिप्रायः अयम् अस्ति यत् काश्चन युक्तीः सदोषम् अथवा अनुप्रयुक्तम् इति मत्वा तासां विभक्तीकरणापेक्षया प्रत्येकस्यां युक्तौ पूर्णतानयनम् अपेक्षितं वर्तते। विविध-युक्ति-प्रभावैः गणिते अस्माकं सूक्ष्मेक्षिका गूढा भविष्यति तथा अपरेषाम् अधिगमनकौशलं वर्धिष्यते । अनेन अस्य सन्दर्भस्य महत्त्वम् अधिगमने तेषां सहायता भविष्यति यत् ते किं कुर्वन्तः आसन्।

अधिगमनाय पृच्छा काचित् स्वभाविक-प्रक्रिया अस्ति यया विद्यार्थिनः ज्ञानप्राप्तिः एवञ्च तस्य निर्माणं कुर्वन्ति। इयं प्रक्रिया सुगमनिरीक्षणैः अपि आरब्धुं शक्यते तथा च अन्ततः ज्ञानप्राप्तेः एवञ्च तस्याः निर्माणेन समाप्ता भवति । शिक्षकैः विभिन्नप्रकारकाणां प्रश्नानाम् उदाहरणैः यथा अन्विष्यमाणैः, उद्घटितमुखैः, प्रासंगिकैः, त्रूटिपरिचीयमानेत्यादिभिः अपि अस्याः प्रक्रियायाः साहाय्यं करणीयम्। विद्यार्थिनां पुरतः समाह्वानपूर्णाः प्रश्नाः प्रस्तोतव्याः । उदाहरणाय ज्यामितौ इमे प्रश्नाः एवंविधाः भवितुम् अर्हन्ति यथा सान्ध्राणां कृते उपयुक्तजालकानां प्रयोगः, छायाक्रीडा, खण्डकर्तनम् इत्यादयः। अङ्कगणिते वयं तान् सम्बन्धान् अन्वेष्टुम्, सम्बन्धानां व्यापकीकरणम्, प्रतिरूपाणि नियमान् च अन्विष्य तेषां बीजीयसम्बन्धान् निर्मातुं वक्तुं शक्नुमः।

बालानां कृते तर्कसङ्गतयुक्तिप्रदाने तर्कसङ्गतयुक्तीनाम् अनुसरणे तथा च समुपलब्धासु युक्तिषु न्यूनताः ज्ञातुम् अवसराणाम् आवश्यकता जायते। उपपत्तेः अभीष्टताम् अधिगन्तुं तेषां कृते एतद् आवश्यकम् अस्ति।

अयं सः स्तरः यत्र ज्यामितिसदृशाः विषयाः कञ्चिद् औपचारिक-स्तरं प्रवेक्ष्यन्ति। एतादृशान् गतिविधीन्

कर्तुं विद्यार्थिभ्यः अवसरान् यच्छन्तु यैः तेषां रचनात्मकतायाः कल्पनाशक्तेः च विकासः भविष्यति युगपत् ते सुसाध्यैः ज्यामितीयैः उपकरणैः ज्यामितीयशब्दावल्याः सम्बन्धानाम् अन्वेषणं कर्तुं शक्ष्यन्ति। प्राक्तनानाम् एवञ्च जटिलप्रश्नानाम् उत्तराणाम् अनुसन्धानविषयः इत्यनेन रूपेण प्रथितविषयस्य स्थाने रचनात्मकेन विषयरूपेण अस्य गणितस्य ख्यातिः आविष्कृता भवेत् । विभिन्नप्रकारैः प्रश्नानाम् उत्तराणि अन्वेष्टुं विद्यार्थिनां प्रोत्साहनम् अनिवार्यं वर्तते । तेभ्यः समस्या-समाधान-समये अनेकेषां वैकल्पिक-कलनविधीनाम् एवञ्च युक्तीनाम् उपयोगावश्यकता अनिवार्या अस्ति ।

पूर्णाङ्कः, भिन्नः एवञ्च दशमलवः, सममितिः सदृशविषयाः गतकक्ष्यासु अधीतैः प्रारम्भिकभागैः सम्बन्धं योजयित्वा अस्मिन् पुस्तके प्रस्तुताः सन्ति । अध्यायान् अन्योऽन्यं योजयितुम् अपि प्रयासः विहितः तथा च प्रारम्भिकेषु अध्यायेषु प्रस्तुत-विचाराः पश्चाद् आगम्यमानानाम् अध्यायानाम् अवधारणाः विकसितुं प्रयुक्ताः।

कृपया ऋणात्मकपूर्णाङ्कः, परिमेयसङ्ख्या, ज्यामितौ कथनानाम् अन्वेषणं तथा च सान्ध्राकाराणां चित्रणसदृशेषु विषयेषु पर्याप्तं समयं यच्छन्तु ।

वयम् आशास्महे यद् इदं पुस्तकं छात्रान् सानन्दं गणितम् अधिगन्तुं साहाय्यं करिष्यति तथा च अस्मिन् सम्मिलितावधारणाः प्रति तेषु आत्मविश्वासम् अपि जागरिष्यति। वयं वैयक्तिकविचारस्य सामूहिकविचारस्य च अवसरप्रदानस्य अनुशंसां कुर्मः। सामूहिक्यः चर्चाः कक्ष्यायाः काचन सनियमविशेषता भवेद् येन विद्यार्थिनः गणिते विश्वस्ताः भवेयुः अथ च गणितभयं च कापि भूतकालवार्ता स्यात् ।

वयम् अस्य पुस्तकस्य विषये भवतां टिप्पणीनाम् अभिमतानां च सहर्षं स्वागतीकरिष्यामः तथा च आशां कुर्मः यत् स्वाध्यापनकाले विकसितान् अभ्यासान्, क्रियाकलापान् कार्याणि च अस्मान् प्रेषयिष्यन्ति येन वयं तान् आगम्यमानेषु संस्करणेषु अङ्गीकर्तुं शक्नुयाम ।

भारतस्य संविधानम्

भागः ४क

नागरिकाणां मौलिक-कर्तव्यानि

अनुच्छेदः ५१ क

मौलिककर्त्तव्यानि = भारतस्य प्रत्येकं नागरिकस्य एतत् कर्त्तव्यं भविष्यति यत् सः -

(क) संविधानस्य पालनं कुर्याद् एवं च तस्य आदर्शानां, संस्थानाम् अथ च राष्ट्र-गानस्य सम्माननं कुर्यात्;

(ख) स्वतन्त्रतायै अस्माकं राष्ट्रियान्दोलनस्य प्रेरकान् उच्चादर्शान् हृदि संस्थाप्य तान् पालयेत् ;

(ग) भारतस्य सम्प्रभूताम्, एकताम् अखण्डताञ्च रक्षेत् तथा च तस्य अक्षुण्णतां सततं संरक्षेत् ;

(घ) देशस्य रक्षां कुर्याद् आह्वाने कृते सति राष्ट्रं सेवताम् ;

(ङ) भारतस्य सर्वेषु जनेषु समरसतायाः समानभ्रातृत्वस्य च भावनायाः निर्माणं कुर्यात्, धर्म-भाषा-प्रदेश-वर्गाधारितेभ्यः सर्वेभ्यः भेदभावेभ्यः दूरीभवेत् अपि च एतादृशीः रीतीः त्यजेत् याः नारी-सम्मानविरोधिन्यः स्युः ;

(च) अस्माकं मिश्रित-संस्कृतेः गौरवशालिपरम्परायाः महत्त्वम् अनुभवेद् तथा च तस्याः परिरक्षणं कुर्यात्;

(छ) वन-सरोवर-नदी-वन्यजीवसंकुलं प्राकृतिक-पर्यावरणं रक्षेत् तस्य च संवर्धनं कुर्याद् प्राणिषु दयाभावं स्थापयेत् ;

(ज) वैज्ञानिकाभिवृत्ति-मानववाद-ज्ञानार्जन-शुद्धीनां भावनायाः विकासं कुर्यात् ;

(झ) सार्वजनिकसम्पदः संरक्षणं कुर्यात् तथा च हिंसातः दूरीभवेत् ;

(ञ) वैयक्तिक-सामूहिकगतिविधीनां सर्वेषु क्षेत्रेषु उत्कर्षं प्रति प्रवर्तितुं सततं प्रयासं कुर्याद् येन नैरन्तर्येण वर्धमानं राष्ट्रं प्रयत्न-साफल्यानाम् अभिनवौन्नत्यं स्पर्ष्टुं शक्नुयात् ;

(ट) पितरौ अथवा संरक्षकाः षड्वर्षतः चतुर्दशवयोमितेभ्यः स्वीय-बालकेभ्यः प्रतिपाल्येभ्यः वा यथाशक्ति शिक्षायाः अवसरान् प्रददतु ।

पाठ्यपुस्तक-निर्माण-समितिः

अध्यक्षः - विज्ञानम् एवं गणित-परामर्शदातृसमितिः

जे. वी. नारलीकरः अवकाशप्राप्तः प्राध्यापकः अन्ताविश्वविद्यालय-खगोलविज्ञानकेन्द्रम्, गणेशखिण्डः, पुणे विश्वविद्यालयः पुणे (महाराष्ट्रः)

मुख्यपरामर्शदाता

हृदयकान्त दीवानः, विद्याभवन सोसाइटी, उदयपुरम् (राजस्थानम्)

मुख्यसमन्वयकः

हुकुमसिंहः, आचार्यः विभागाध्यक्षश्च, डी.ई.एस.एम, एन.सी.ई.आर.टी, नवदेहली

सदस्याः

अवन्तिका दामः, टी.जी.टी., सी.आई.ई, एक्सपेरिमेंटल-विद्यालयः, शिक्षा विभागः, देहली

अंजली गुप्ते, अध्यापिका, विद्याभवनपब्लिकविद्यालयः, उदयपुरम् (राजस्थानम्)

आर.आत्मारामन्, गणितशिक्षापरामर्शदाता, टी.आई.मैट्रिक हायर सेकेंडरी विद्यालयः तथा ए.एम. टी.आई. चेन्नई (तमिलनाडुः)

आशुतोष के वझलवारः, प्रवाचकः (समन्वयकः आंग्लसंस्करणम्) डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर. टी. नवदेहली

एच.सी.प्रधानः, आचार्यः, होमी-भाभा-विज्ञानशिक्षा-केन्द्रम्, टी.आई.एफ.आर, मुम्बई (महाराष्ट्रः)

महेन्द्र शङ्करः, प्रवक्ता (चयन श्रेणी) (अवकाश प्राप्तः) एन.सी.ई.आर.टी., नवदेहली

मीना श्रीमाली, अध्यापिका, विद्याभवन-उच्चमाध्यमिकविद्यालयः, उदयपुरम् (राजस्थानम्)

वी.पी.सिंहः, प्रवाचकः, डी.ई.एस.एम, एन.सी.ई.आर.टी, नवदेहली

सुरेश कुमार सिंह गौतमः, आचार्यः डी.ई.एस.एम, एन.सी.ई.आर.टी, नवदेहली,

सृजाता दासः, वरिष्ठ प्रवक्ता, एन.सी.ई.आर.टी, नवदेहली

श्रद्धा अग्रवालः, पी.जी.टी. पदमपत सिंघानिया शिक्षाकेन्द्रम् कानपुरम् (उत्तर प्रदेशः)

हिन्दी-अनुवादकः-

डी.आर.शर्मा, पी.जी.टी,जवाहरनवोदयविद्यालयः, मुँगेशपुरम्, देहली

बी.एम.गुप्ता, पी.जी.टी,(अवकाशप्राप्तः) एन.सी.ई.आर.टी.नवदेहली

महेन्द्र शङ्करः, प्रवक्ता (चयन श्रेणी) (अवकाश प्राप्तः) एन.सी.ई.आर.टी., नवदेहली

राजकुमारधवनः, पी.जी.टी.पी.एण्ड टी. उच्चमाध्यमिकविद्यालयः, देहली

समन्वयक-सदस्यः

आशुतोष के वझलवारः, प्रवाचकः, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नवदेहली

कृतज्ञता

परिषद् पाठ्यपुस्तकसमीक्षायाः कृते आयोजितायां कार्यशालायां भागग्रहितृणां निम्नलिखित-प्रतिभागिनां बहुमूल्ययोगदानार्थम् कृतज्ञतां प्रकटयति।

निरूपमा साहनी,टी.जी.टी.(गणितः), श्री महावीर-दिगम्बर-जैनः उच्च-माध्यमिक-विद्यालयः, जयपुरम् (राजस्थानम्)

डॉ. रूही फातिमा टी.जी.टी.जामिया उच्च-विद्यालयः नवदेहली, दीप्तिः माथुरः टी.जी.टी. मदर्स इण्टरनैशनल-विद्यालयः नवदेहली, के. बालाजी, टी.जी.टी.केन्द्रीयविद्यालयः दोनीमलाई कर्णाटकम्, अमितः बजाजः टी.जी.टी., सी.पी.आर.एफ. पब्लिकविद्यालयः देहली, ओमलता सिंहः,टी.जी.टी. (गणितः), प्रेजेन्टेशन-कॉन्वेन्टः उच्चमाध्यमिक-विद्यालयः देहली, श्रीनागेशमोने, टी.जी.टी. द्रविड – उच्च - विद्यालयः वाई महाराष्ट्रः, गोरखनाथः शर्मा पी.जी.टी. जवाहर-नवोदय-विद्यालयः मंसेरा ,राञ्ची, झारखण्डः, अजयः कुमारः सिंहः टी.जी.टी. रामजस-वरिष्ठः माध्यमिकः विद्यालयः सङ्ख्या – 3 देहली, रागिणी-सुब्रमण्यन् टी.जी.टी. सी.पी.आर.एफ. विवेकानन्दः विद्यालयः चैन्नई, तमिलनाडुः, राजरकुमारः धवनः पी.जी.टी. गीता-वरिष्ठ-माध्यमिक-विद्यालयः सङ्ख्या – 2 देहली, डॉ. मुदगिलः, प्रवक्ता सी.आई.ई.टी. एन.सी.ई.आर.टी. नवदेहली, डॉ.सुषमाजयरथः, प्रवाचिका, डी.डब्ल्यू.एस., एन.सी.ई.आर.टी. नवदेहली, डॉ. मोनायादव प्रवक्ता एन.सी.आई.ई.टी.,एन.सी.ई.आर.टी. नवदेहली।

परिषद् डॉ. रामः अवतारः (प्राप्तावकाशः प्राध्यापकः एन.सी.आई.ई.टी.,परामर्शदाता डी.ई. एस.एम.,सी. आई.ई.टी. नवदेहली, एवञ्च डॉ.आर.पी. मौर्यः, प्रवाचकः डी.ई. एस.एम.,सी.आई.ई.टी. नवदेहली, इत्येतैः प्रदत्तान् विचारान् प्रति एतेषां कृते कृतज्ञतां प्रकटयति।

परिषद् हिन्दीरूपान्तरणस्य पुनरावलोकनाय एन.सी.ई.आर.टी. इति संस्थायाम् आयोजितायां कार्यशालायां निम्नलिखित-प्रतिभागिनां बहुमूल्यटिप्पणीनां कृते कृतज्ञतां प्रकटीकरोति। प्रतापः सिंहः, प्रवक्ता एस.सी.ई.आर.टी. गुरूग्रामः, कविताखर्ब टी.जी.टी. केन्द्रीयः विद्यालयः नवदेहली, डी.पी. वार्ष्णेयः पी.जी.टी. केन्द्रीयः विद्यालयः सङ्ख्या - 1 देहली, डी.के.शर्मा टी.जी.टी. राजकीयः प्रतिभा-विकासविद्यालयः देहली, डी.आर.शर्मा पी.जी.टी. जवाहर-नवोदयः विद्यालयः देहली, चन्द्रशेखरः सिंहः सनबीम एकेडमी वाराणसी उत्तरप्रदेशः, बी.एम. गुप्ता, पी.जी.टी. शिक्षानिदेशालयः देहली (अवकशप्राप्तः) जी.डी.ढलः, प्रवाचकः, (अवकाशप्राप्तः) एन.सी.ई.आर.टी. नवदेहली।

पाठ्यपुस्तक-विकास-समितेः कार्यशालायां सौविध्यसंसाधनं प्रदातुं परिषद् विद्याभवन-सोसायटी उदयपुरम्, एतेषां संकायसदस्यान् प्रति कृतज्ञतां प्रकटयामि। पुस्तकालय-सहायतायै निदेशकं सेण्टर फॉर साइंस एजुकेशन एंड कम्युनिकेशन (C- SCE)दिल्ली-विश्वविद्यालयं प्रति परिषद् कृतज्ञतां ज्ञापयति। शैक्षिक-प्रशासनिकसहयोगाय परिषद् प्रो. हुकुमसिंहं विभाग-प्रमुखं डी.ई.एस.एम.एन.सी.ई.आर.टी. नवदेहलीं प्रति कृतज्ञतां ज्ञापयति।

परिषद् सज्जाद-हैदर अंसारी, नरेशकुमारः, नरगिस इस्लाम डी.टी.पी.सञ्चालकः (ऑपरेटर), एल.आर. भारती, अवधकिशोरसिंहः छायासम्पादकः (कॉपी एडीटर), अभिमन्युः मोहान्ती, रितु झा, रूबी कुमारी पाठसंशोधिका (प्रूफ रीडर) एन.सी.ई.आर.टी., दीपककपूरः सङ्गणकस्थानकप्रभारी (कम्प्यूटर स्टेशन प्रभारी) डी.ई. एस.एम., एन.सी. ई.आर. टी.,ए.पी.सी. कार्यालयः, प्रशासनविभागः, डी.ई.एस.एम., एन. सी. ई. आर.टी. तथा प्रकाशनविभागः एन.सी.ई.आर.टी. इत्येतेषां कृते हार्दिकीं कृतज्ञतां प्रकटयति।

अनुवादकः – देवर्षि अगस्त्यः

विषय-सूची

	आमुखम् –	iii
	प्रस्तावना	v
अध्यायः 1	पूर्णाङ्कः	1
अध्यायः 2	भिन्नम् एवञ्च दशमलवः	27
अध्यायः 3	आङ्कीयं प्रबन्धनम्	57
अध्यायः 4	सरलं समीकरणम्	79
अध्यायः 5	रेखा एवञ्च कोणः	96
अध्यायः 6	त्रिभुजम् अथ च तस्य गुणाः	116
अध्यायः 7	त्रिभुजानां सर्वाङ्गसमता	134
अध्यायः 8	राशीनां तुलना	153
अध्यायः 9	परिमेयसङ्ख्या	175
अध्यायः 10	प्रायोगिकी ज्यामितिः	193
अध्यायः 11	परिमापः एवञ्च क्षेत्रफलम्	205
अध्यायः 12	बीजीयः व्यञ्जकः	229
अध्यायः 13	घाताङ्कः अथ च घातः	249
अध्यायः 14	सममितिः	263
अध्यायः 15	सान्ध्राकाराणां चित्रणम्	275
	उत्तरमाला	290
	बौद्धिक-व्यायामः	308

भारतस्य संविधानम्

भागः-3 (अनुच्छेदः 12-35)

(अनिवार्य-नियमः, कश्चिदपवादः तथा युक्तियुक्तनिर्बन्धाधीनः)

द्वारा प्रदत्तः

मूलभूत-अधिकारः

समतायाः अधिकारः

- विधेः समक्षं तथा च विधीनां समानं संरक्षणम्
- धर्मस्य, मूलवंशस्य, जातेः, लिंगस्य अथवा जन्मस्थानस्य आधारे
- लोकनियोजन-विषये
- अस्पृश्यतायाः उपाधीनाञ्च अन्तः

स्वातन्त्र्य-अधिकारः

- अभिव्यक्तेः, सम्मेलनस्य, संघस्य, सञ्चरणस्य, निवासस्य, वृत्तेश्च स्वातन्त्र्यम्
- अपराधानां कृते दोष-सिद्धि-सम्बन्धे संरक्षणम्
- प्राणानां दैहिक-स्वतन्त्राणाञ्च संरक्षणम्
- षड्तः चतुर्दशवर्षपर्यन्तानां बालानां कृते निःशुल्क-अनिवार्य-शिक्षा
- कासुचित् दशासु बन्धनात् निरोधनाच्च संरक्षणम्

शोषणविरूद्धाधिकारः

- मानवानां दुर्व्यापारस्य बलपूर्वकश्रमस्य च प्रतिषेधः
- परिसंकटमयकार्येषु बालानां नियोजन-प्रतिषेधः

धर्मस्य स्वातन्त्र्य-अधिकारः

- अन्तःकरणस्य तथा च धर्मस्य अबाधरूपेण आमाननस्य, आचरणस्य, प्रचारस्य च स्वतन्त्रता
- धार्मिककार्याणां प्रबन्धस्य स्वतन्त्रता
- कस्यापि विशिष्ट-धर्मस्य अभिवृद्धये करदान-सम्बन्धे स्वतन्त्रता
- राज्यनिधितः पूर्णतः पोषित-शिक्षासंस्थासु, धार्मिक-शिक्षायां, धार्मिक-उपासनायाञ्च उपस्थिति-सम्बन्धे स्वातन्त्रता

संस्कृति-शिक्षा-सम्बन्धाधिकारः

- अल्पसंख्यक-वर्गाणां स्वभाषा-लिपि-संस्कृति-विषयकाणां हितानां संरक्षणम्
- अल्पसंख्यक-वर्गद्वारा स्वशिक्षा-संस्थानानां स्थापनं प्रशासनञ्च

संवैधानिक-उपचाराणाम् अधिकारः

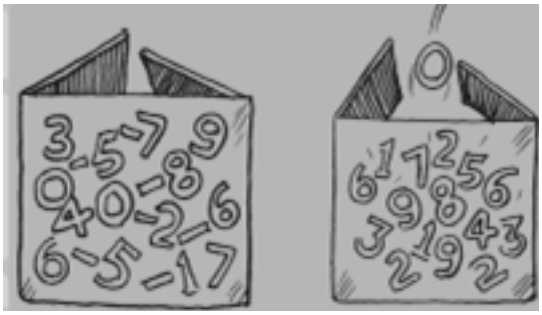
- उच्चतम-न्यायालयस्य, उच्च-न्यायालयस्य च निर्देशम् आदेशम् अथवा रिटद्वारा प्रदत्त-अधिकारं प्रवर्तयितुम् उपचारः

पूर्णाङ्काः

अध्यायः 1

1.1 भूमिका

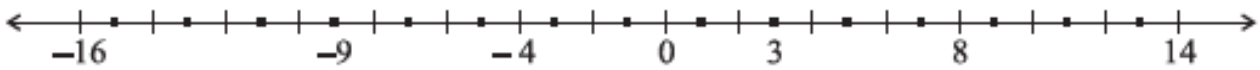
वयं षष्ठ-कक्ष्यायां पूर्णसङ्ख्यानां पूर्णाङ्कानां च विषये अध्ययनं कृतवन्तः। वयं जानीमः यत् पूर्णाङ्कः, सङ्ख्यानाम् एकः बृहत्सङ्ग्रहः भवति, यस्मिन् पूर्णसङ्ख्याः एवञ्च ऋणात्मिक्यः सङ्ख्याः सम्मिलिताः भवन्ति। भवन्तः पूर्णाङ्केषु तथा च पूर्णसङ्ख्यासु अन्यं किम् अन्तरं प्राप्नुवन्? अस्मिन् अध्याये, वयं पूर्णाङ्कानां, तेषां गुणानाम् एवञ्च सङ्क्रियाणां विषये विस्तरेण अधिगमिष्यामः। सर्वप्रथमं वयं गतकक्ष्यासु पूर्णाङ्कैः सम्बद्धकार्यस्य समीक्षां करिष्यामः एवञ्च तस्य आवृत्तिम् अपि करिष्यामः।



1.2 पुनरावलोकनम्

वयं जानीमः यत् पूर्णाङ्कानां सङ्ख्यारेखायां कथं निरूपणं भवति।अधः प्रदत्तायां सङ्ख्यारेखायां केचन पूर्णाङ्काः अङ्किताः सन्ति :

किं भवन्तः अङ्कितान् पूर्णाङ्कान् आरोहिक्रमे लेखितुं शक्नुवन्ति एतासां सङ्ख्यानाम् आरोहिक्रमः – 5, – 1, 3 इति अस्ति। अस्माभिः – 5 इति सर्वाभ्यः ह्रस्वासङ्ख्यारूपेण किमर्थं चिता ?



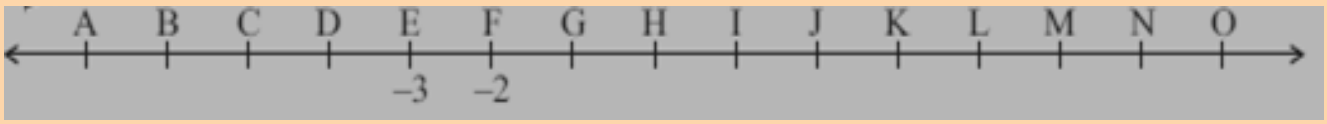
निम्नलिखितायां सङ्ख्यारेखायां पूर्णाङ्कैः सह केचन बिन्दवः अङ्किताः सन्ति। एतान् पूर्णाङ्कान् अवरोहिक्रमे लिखन्तु।

प्रयासं कुर्वन्तु

एतेषां पूर्णाङ्कानाम् अवरोहक्रमः 14, 8, 3, ... इति अस्ति।

उपर्युक्तायां सङ्ख्यारेखायां केवलं केचन एव पूर्णाङ्काः लिखिताः सन्ति। प्रत्येकं बिन्दौ उचितसङ्ख्यां लिखन्तु।

1. पूर्णाङ्कानां निरूपयित्री एका रेखा अधः दत्ता अस्ति :



–3 एवञ्च –2 इत्येतं क्रमशःE तथा च F द्वारा अङ्कितम् अस्ति । A, B, D, H, J, M एवञ्च O द्वारा के पूर्णाङ्काः अङ्किष्यते ?

2. 7, –5, 4, 0 तथा च – 4 इत्येतान् पूर्णाङ्कान् आरोहिक्रमे क्रमबद्धान् कुर्वन्तु निजोत्तरं च अवेक्षितुम् एतान् एकस्यां सङ्ख्यारेखायाम् अङ्कयन्तु ।

वयम् अस्माकं गतकक्ष्यायां पूर्णाङ्कानां योगस्य व्यवकलनस्य च अध्ययनम् अकुर्म ।

निम्नलिखितानि कथनानि पठन्तु यदा वयम् :

(i) एकं धनात्मकपूर्णाङ्कं योजयामः, तर्हि दक्षिणं प्रति गच्छामः।

(ii) एकम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कं योजयामः, तर्हि वामदिशां प्रति गच्छामः।

(iii) एकं धनात्मकपूर्णाङ्कं व्यवकलयामः, तर्हि दक्षिणं प्रति गच्छामः।

(iv) एकम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कं व्यवकलयामः, तर्हि वामं प्रति गच्छामः।

सूचयन्तु यत् निम्नलिखितानि शुद्धानि अशुद्धानि वा सन्ति । यानि कथानानि अशुद्धानि सन्ति तानि शोधयन्तु ।

(i) यदा द्वयोः धनात्मकपूर्णाङ्कयोः योजनं भवति, तदा वयम् एकं धनात्मकपूर्णाङ्कं प्राप्नुमः।

(ii) यदा द्वयोः ऋणात्मकपूर्णाङ्कयोः योजनं भवति, तदा वयम् एकं धनात्मकपूर्णाङ्कं प्राप्नुमः।

(iii) यदा एकस्य धनात्मकपूर्णाङ्कस्य एकस्य च ऋणात्मकपूर्णाङ्कस्य योजनं भवति, तदा सदैव एकः ऋणात्मकपूर्णाङ्कः प्राप्तः भवति ।

(iv) 8 इति पूर्णाङ्कस्य योज्यः प्रतिलोमः (– 8) इति अस्ति एवञ्च (– 8) इत्यस्य 8 इति योज्यः प्रतिलोमः अस्ति ।

(v) व्यवकलनार्थम्, यः व्यवकल्यमाणः पूर्णाङ्कः अस्ति तस्य योज्यं प्रतिलोमं द्वितीयस्मिन् पूर्णाङ्के योजयामः।

(vi) (–10) + 3 = 10 – 3

(vii) 8 + (–7) – (– 4) = 8+7– 4

स्वस्य उत्तराणां तुलनां निम्नलिखितैः उत्तरैः सह कुर्वन्तु :

(i) शुद्धम् अस्ति । उदाहरणतः

(a) 56 + 73 = 129 (b) 113 + 82 = 195 इत्यादि।

अस्य कथनस्य समर्थने अन्यानि पञ्चोदाहरणानि यच्छन्तु ।

(ii) अशुद्धम्, यतोहि (– 6) + (– 7) = – 13 अस्ति यत् धनात्मकपूर्णाङ्कः नास्ति । शुद्धं कथनम् एवम् अस्ति ।

यदा वयं द्वौ ऋणात्मकपूर्णाङ्कौ योजयामः, तदा वयम् एकम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कम् एव प्राप्नुमः।

उदाहरणतः

(a) (– 56) + (– 73) = – 129 (b) (– 113) + (– 82) = – 195, इत्यादि।

एतत् कथनं प्रमाणीकर्तुं स्वपक्षतः अन्यानि पञ्च उदाहरणानि यच्छन्तु ।

(iii) अशुद्धम्, यतोहि – 9 + 16 = 7, एषः एकः ऋणात्मकपूर्णाङ्कः नास्ति। उचितं कथनम् एवम् अस्ति - यदा एकः धनात्मकपूर्णाङ्कः एकः च ऋणात्मकपूर्णाङ्कः योज्येते, तदा वयं तयोः अन्तरं स्वीकुर्मः दीर्घपूर्णाङ्कस्य च चिह्नं तस्मात् अन्तरात् पूर्वं स्थाप्यते। दीर्घपूर्णाङ्कस्य निर्णयः द्वयोः पूर्णाङ्कयोः चिह्नानि अनपेक्ष्य क्रियते। उदाहरणतः

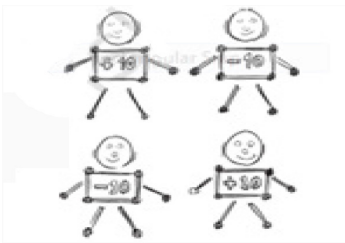
(a) (– 56) + (73) = 17 (b) (– 113) + 82 = – 31

(c) 16 + (– 23) = – 7 (d) 125 + (– 101) = 24

एतत् कथनं प्रमाणीकर्तुम् अन्यानि पञ्च उदाहरणानि यच्छन्तु।

(iv) उचितम्, योज्य- प्रतिलोमस्य अन्यानि उदाहराणि निम्नलिखितानि सन्ति :

पूर्णाङ्कः	योज्यः प्रतिलोमः
10	–10
–10	10
76	–76
–76	76



अतः a कस्यचित् पूर्णाङ्कस्य योज्यः प्रतिलोमः – a इति अस्ति तथा च (– a) इत्यस्य a योज्यः प्रतिलोमः अस्ति।

(v) उचितम्, व्यवकलनम्, योगस्य विपरीतं भवति अतः च वयं व्यवकल्यमानस्य पूर्णाङ्कस्य योज्यं प्रतिलोमम् अपरस्मिन् पूर्णाङ्के योजयामः। उदाहरणतः,

(a) 56 – 73 = 56 + 73 इत्यस्य योज्यः प्रतिलोमः = 56 + (–73) = –17

(b) 56 – (–73) = 56 + (–73) इत्यस्य योज्यः प्रतिलोमः = 56 + 73 = 129

(c) (–79) – 45 = (–79) + (– 45) = –124

(d) (–100) – (–172) = –100 + 172 = 72 इत्यादिः।

अस्य कथनस्य सत्यापनार्थम् एतादृशानि न्यूनातिन्यूनानि पञ्च उदाहरणानि लिखन्तु।

इत्थम्, वयं प्राप्नुमः यत् a एवञ्च b इति कयोश्चित् द्वयोः पूर्णाङ्कयोः कृते,

a – b = a + b इत्यस्य योज्यः प्रतिलोमः = a + (– b)

अन्यच्च a – (– b) = a + (– b) इत्यस्य योज्यः प्रतिलोमः = a + b

(vi) अशुद्धम् अस्ति। यतोहि (–10) + 3 = –7 तथा च 10 – 3 = 7,

अतः (–10) + 3= 10-3 इति अस्ति।

(vii) अशुद्धम् अस्ति। यतोहि 8 + (–7) – (– 4) = 8 + (–7) + 4 = 1 + 4 = 5

अन्यच्च 8 + 7 – 4 = 15 – 4 = 11 इति अस्ति, अतः

8 + (–7) – (– 4) = 8 – 7 + 4 इति अस्ति।

प्रयासं कुर्वन्तु

गतकक्ष्यायाम् अस्माभिः सङ्ख्याभिः सह विभिन्नानि प्रतिरूपाणि (पैटर्न) ज्ञातानि। किं भवन्तः निम्नलिखितेषु प्रत्येकं सङ्ख्यार्थम् एकं प्रतिरूपं ज्ञातुम् अर्हन्ति ? यदि आम्, तदा एतानि रिक्तस्थानि पूरयन्तु।

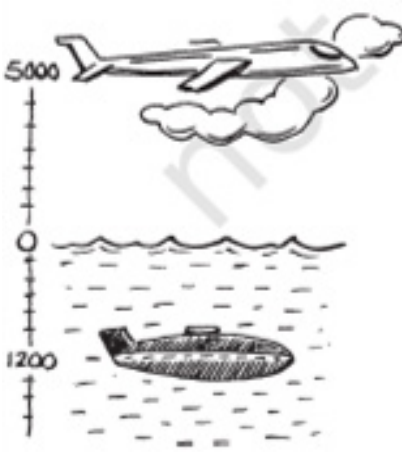
(a) 7, 3, – 1, – 5, _____, _____, _____. (b) – 2, – 4, – 6, – 8, _____, _____, _____.

(c) 15, 10, 5, 0, _____, _____, _____. (d) – 11, – 8, – 5, – 2, _____, _____, _____.

एतादृशानि कानिचित् अन्यानि प्रतिरूपाणि निर्मान्तु तानि च पूरयितुं स्वीय-मित्रानि वदन्तु।

प्रश्नावली 1.1

1. कस्मिंश्चित् विशिष्टे दिवसे विभिन्नस्थानानां तापमानं डिग्री सेल्सियस् (°C) मध्ये निम्नलिखित-सङ्ख्यया दर्श्यते :



(a) एतां सङ्ख्यारेखां पश्यन्तु अस्यां च अङ्कितस्थानानां तापमानानि लिखन्तु।

(b) उपर्युक्तेषु स्थानेषु सर्वस्मात् उष्णस्य सर्वस्मात् च शीतस्य स्थानयोः तापमानेषु किम् अन्तरम् अस्ति ?

(c) लाहुलस्पितिः एवञ्च श्रीनगरम् इति स्थानयोः तापमाने किम् अन्तरम् अस्ति ?

(d) किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् शिमलायाः श्रीनगरस्य च तापमानस्य योगः शिमलायाः तापमानात् न्यूनः अस्ति ? किम् एतयोः द्वयोः स्थानयोः तापमानयोः योगः श्रीनगरस्य तापमानात् न्यूनः अस्ति ?

2. कस्याञ्चित् प्रश्नोत्तरस्पर्धायां शुद्धोत्तराय धनात्मकाः अङ्काः दीयन्ते अशुद्धोत्तराय ऋणात्मकाः अङ्काः दीयन्ते। यदि पञ्चसु आवर्तेषु (rounds) जैकवर्येण प्राप्ताः अङ्काः 25, – 5, – 10, 15 एवञ्च 10 आसन्, तदा निर्दिशन्तु यत् अन्ते तस्य अङ्कानां योगः कियान् आसीत् ?

3. सोमवासरे श्रीनगरस्य तामानम् – 5°C इति आसीत् मङ्गलवासरे च तापमानम् 2°C न्यूनम् अभवत्। मङ्गलवासरे श्रीनगरस्य तामानं किम् आसीत् ? बुधवासरे तापमानम् 4°C वर्धितम्। बुधवासरे किं तापमानम् आसीत् ?

4. एकं वायुयानं समुद्रतलात् 5000 मी.परिमिते औन्नत्ये उड्डयत् अस्ति। एकस्मिन् विशिष्टे स्थाने एतत् वायुयानं समुद्रतलात् अधः 1200 मी. अगाधतायां तरन्तीम् एकां जलमग्ननौकाम् उपर्युपरि अस्ति। जलमग्ननौकायाः तथा च वायुयानस्य मध्ये ऊर्ध्वाधरं कियती दूरता अस्ति ?

5. मोहनः स्वस्य गणनापञ्जिकायाम् (लेखायाम्) 2000 रूप्यकाणि सङ्गृह्णाति (सञ्चिनोति) अन्येद्युः गणनापञ्जिकातः 1642 रूप्यकाणि निष्कास्यति। यदि लेखातः निस्कास्यमानः राशिः ऋणात्मकसङ्ख्यया निरूप्यते, तदा गणनापञ्जिकायां सङ्गृहीतराशिं भवन्तः कथं निरूपयिष्यन्ति? निर्गमनस्य अनन्तरं मोहनस्य लेखायां शेषः राशिः ज्ञायताम्।

6. रीता A बिन्दुतः पूर्वं प्रति B बिन्दुपर्यन्तं 20 कि.मी. दूरं गच्छति। तस्य एव मार्गस्य B इति अनुदिशबिन्दुतः 30 कि.मी. दूरं पश्चिमं प्रति गच्छति। यदि पूर्वं प्रति समाकलिता दूरता ऋणात्मकपूर्णाङ्केन निरूप्यते, तदा पश्चिमं प्रति समाकलितां दूरतां भवन्तः कथं निरूपयिष्यन्ति ? A बिन्दुतः तस्याः अन्तिमां स्थितिं केन पूर्णाङ्केन निरूपयिष्यन्ति ?

7. कस्मिंश्चित् ऐन्द्रजालिकवर्गे (जादुई वर्ग) प्रत्येकं पङ्क्तेः, प्रत्येकं स्तम्भस्य प्रत्येकं च विकर्णस्य सङ्ख्यानां योगः समानः भवति। बोधयन्तु यत् निम्नलिखतयोः कतमः वर्गः ऐन्द्रजालिकवर्गः अस्ति ?

5	-1	-4
-5	-2	7
0	3	-3

(i)

1	-10	0
-4	-3	-2
-6	4	-7

(ii)

8. a तथा च b इत्येतयोः निम्नलिखितमानेभ्यः $a - (-b) = a + b$ इत्यस्य सत्यापनं क्रियताम्

(i) $a = 21, b = 18$ (ii) $a = 118, b = 125$

(iii) $a = 75, b = 84$ (iv) $a = 28, b = 11$

9. निम्नलिखितानि कथनानि प्रमाणीकर्तुम्, पेटिकायां $>, <$ अथवा $=$ इति सङ्केतानाम् उपयोगं कुर्वन्तु

(a)	$(-8) + (-4)$	☐	$(-8) - (-4)$
(b)	$(-3) + 7 - (19)$	☐	$15 - 8 + (-9)$
(c)	$23 - 41 + 11$	☐	$23 - 41 - 11$
(d)	$39 + (-24) - (15)$	☐	$36 + (-52) - (-36)$
(e)	$-231 + 79 + 51$	☐	$-399 + 159 + 81$

10. जलस्य एकस्मिन् सरोवरे अन्तर्मुखानि सोपानानि सन्ति। एकः वानरः उपरितने सोपाने (अर्थात् प्रथमतमे सोपाने) उपविष्टः वर्तते। जलं नवतमे सोपाने अस्ति।

(i) सः एकेन कूर्दनेन त्रिसोपानम् अधः (अधोमुखम्) द्वितीयेन च कूर्दनेन द्विसोपानम् ऊर्ध्वं गच्छति। वानरः कतिभिः कूर्दनैः जलस्तरम् अवाप्स्यति।

(ii) जलपानान्तरं सः प्रत्यागन्तुम् इच्छति। एतदर्थं सः एकेन कूर्दनेन चत्वारि सोपानानि ऊर्ध्वम् अपरेण च कूर्दनेन सोपानद्वयम् अधः गच्छति। कतिभिः कूर्दनैः सः सर्वोपरितनं सोपानं प्राप्स्यति ?

(iii) यदि अधोमुखगामिनां समाकलितानां सोपानां सङ्ख्याम् ऋणात्मकेन पूर्णाङ्केन निरूप्यते ऊर्ध्वगामिनां च समाकलितानां सोपानां सङ्ख्यां धनात्मकेन पूर्णाङ्केन निरूप्यते, तदा निम्नलिखितानि रिक्तस्थानानि पूरयन्तः (i) तथा च (ii) भागे तस्य गतिः निरूपयन्तु।

(a) $-3 + 2 + \ldots = -8$ (b) $4 - 2 + \ldots = 8$.

(a) अत्र योगः (-8) इति अष्टौ सोपानानि अधोगमनं निरूपयति, तर्हि

(b) अत्र योगः 8 इति कं निरूपयिष्यति ?

1.3 पूर्णाङ्कानां योगः एवं व्यवकलनानां गुणाः

1.3.1 योगान्तर्गतः संवृत्तः

वयम् अधिगतवन्तः यत् द्वयोः पूर्णाङ्कसंख्ययोः योगः पुनः एका पूर्णा संख्या एव भवति। उदाहरणतः $17+24 = 41$ अस्ति, या पुनः एका पूर्णा संख्या अस्ति। वयं जानीमः यत् एषः गुणः पूर्णसंख्यानां योगस्य 'संवृतगुणः' इति कथ्यते।

आगच्छन्तु पश्यामः किम् एषः गुणः पूर्णाङ्केभ्यः अपि सत्यम् अस्ति अथवा नास्ति। पूर्णाङ्कानां केचन युग्माः अधः दत्ताः सन्ति। अधः दत्तां सारणीं पश्यन्तु एतां च पूरयन्तु :

कथनम्	प्रेक्षणम्
(i) 17 + 23 = 40	परिणामः एकः पूर्णाङ्कः अस्ति।
(ii) (- 10) + 3 = ----------	----------
(iii) (-75) + 18 = ----------	----------
(iv) 19 + (-25) = -6 ----------	परिणामः एकः पूर्णाङ्कः अस्ति।
(v) 27 + (-27) = ----------	----------
(vi) (-20) + 0 = ----------	----------
(vii) (-35) + (-10) = ----------	----------

भवन्तः किं पश्यन्ति ? किं पूर्णाङ्कद्वयस्य योगः सदैव पूर्णाङ्कं प्राप्नोति ? किं भवद्भिः पूर्णाङ्कानाम् एतादृशः युग्मः प्राप्तः यस्य योगः पूर्णाङ्कः नास्ति ?

यतोहि पूर्णाङ्कानां योगः एकः पूर्णाङ्कः भवति, अतः वयं कथयामः यत् पूर्णाङ्केषु योगान्तर्गताः संवृताः (Closed) भवन्ति?

व्यापकरूपेण, a तथा च b इति द्वयोः कयोश्चित् पूर्णाङ्कयोः कृते a + b अपि एकः पूर्णाङ्कः भवति।

1.3.2 व्यवकलनस्य अन्तर्गतः संवृतः

यदा वयम् एकं पूर्णाङ्कम् अन्यस्मात् पूर्णाङ्कात् व्यवकलयामः, तदा किं भवति ?

किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् तस्य अन्तरम् अपि एकः पूर्णाङ्कः भवति ?

कथनम्	प्रेक्षणम्
(i) 7 - 9 = -2	परिणामः एकः पूर्णाङ्कः अस्ति।
(ii) 17 - (-21) = ----------	----------
(iii) (-8) - (-14) = 6	परिणामः एकः पूर्णाङ्कः अस्ति।
(iv) (-21) - (-10) = ----------	----------
(v) 32 - (-17) = ----------	----------
(vi) (-18) - (-18) = ----------	----------
(vii) (-29) - 0 = ----------	----------

भवन्तः किं पश्यन्ति ? किं पूर्णाङ्कानां कश्चन एतादृशः युग्मः अस्ति यस्य अन्तरं पूर्णाङ्कः नास्ति ? किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् पूर्णाङ्कस्य व्यवकलनस्य अन्तर्गताः संवृताः सन्ति। आम्, वयं वक्तुं शक्नुमः यत् पूर्णाङ्कस्य व्यवकलनस्य अन्तर्गताः संवृताः भवन्ति।

अतः, यदि a तथा च b इति पूर्णाङ्कौ स्तः, तर्हि a - b अपि एकः पूर्णाङ्कः भवति। किं पूर्णसंख्याः अपि एतं गुणं सन्तुष्टं कुर्वन्ति ?

1.3.3 क्रमविनिमेयगुणः

वयं जानीमः यत् 3+5 = 5+3 = 8 अस्ति, अर्थात् द्वे पूर्णसंख्ये केनापि क्रमेण योजयितुं शक्येते। भिन्नशब्देषु, पूर्णसंख्याभ्यः योगः क्रमविनिमेयः भवति।

किम् एतत् एव कथनं वयं पूर्णाङ्कानां कृते अपि वक्तुं शक्नुमः ?

वयं प्राप्नुमः यत् 5 + (- 6) = -1 तथा च (-6) + 5 = -1 इति अस्ति।

अतः 5 + (- 6) = (-6) + 5 इति अस्ति।

किं निम्नलिखितं समानम् अस्ति ?

(i) (- 8) + (-9) तथा च (-9) + (-8)

(ii) (-23) + 32 तथा च 32 + (-23)

(iii) (-45)+ 0 तथा च 0 + (-45)

अन्येभ्यः पञ्चपूर्णाङ्कयुग्मेभ्यः एतादृशं प्रयासं कुर्वन्तु। किं भवद्भिः पूर्णाङ्कानाम् एतादृशः युग्मः प्राप्यते यदर्थं पूर्णाङ्कानां क्रमपरिवर्तनेन तेषां योगः अपि परिवर्तितः भवति ? निःसन्देहं न। अतः, वयम् एतं निष्कर्षं प्राप्स्यामः यत् योगः पूर्णाङ्केभ्यः क्रमविनिमेयः भवति।

व्यापकरूपे, कयोश्चित् पूर्णाङ्कयोः a तथा च b, एतर्थं वयं वक्तुं शक्नुमः यत्

$$a + b = b + a$$

वयं जानीमः यत् व्यवकलनं पूर्णसंख्याभ्यः क्रमविनिमेयं नास्ति। किम् एतत् क्रमविनिमेयं पूर्णाङ्केभ्यः अस्ति ?

पूर्णाङ्कम् 5 एवम् (-3) इति स्वीकुर्वन्तु। किम् 5 –(-3) एवम् (-3) – 5 परस्परं तुल्ये स्तः ? न, यतोहि 5 –(-3) = 5 + 3 = 8 इति अस्ति एवं (-3) – 5 = - 3 – 5 = -8 इति अस्ति।

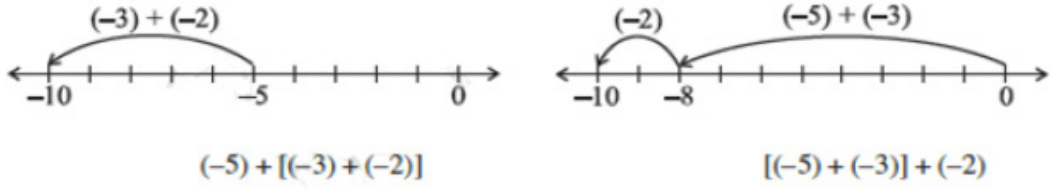
पूर्णाङ्कानां न्यूनातिन्यूनान् पञ्च विभिन्नयुग्मान् स्वीकुर्वन्तु अस्य च कथनस्य निरीक्षणं कुर्वन्तु।

वयम् एतं निष्कर्षं प्राप्नुमः यत् व्यवकलनं पूर्णाङ्केभ्यः क्रमविनिमेयं नास्ति।

1.3.4 सहाचर्यगुणः

निम्नलिखितानि उदाहरणाणि पश्यन्तु :

-3 , -2 एवञ्च -5 पूर्णाङ्कान् स्वीकुर्वन्तु। (-5) + [(-3)+(-2)] तथा च [(-5)+(-3)]+(-2) अस्य उपरि ध्यानं यच्छन्तु। प्रथमे योगे (-3) तथा च (-2) एतौ मेयलित्वा एकः समूहः निर्मितः अस्ति। द्वितीये योगे (-5) एवं (-3) एतौ मेयलित्वा एकः समूहः निर्मितः अस्ति। वयम् अस्य निरीक्षणं करिष्यामः यत् किं वयं विभिन्नान् परिणामान् प्राप्नुमः?



अनयोः द्वयोः स्थित्योः एव (-10) इति प्राप्यते।

अर्थात्, (-5) + [(-3)+(-2)] = [(-5) + (-3)] +(-2)

अनेन एव प्रकारेण, - 3,1 तथा च -7 इति स्वीकुर्वन्तु।

(-3) + [1+(-7)] = -3+ ------ = -------

[(-3) +1]+(-7) = -2+ -------- = ----

किं (-3) + [1+(-7)] एवञ्च [(-3) +1]+(-7) इति समानम् अस्ति ?

एतादृशानि पञ्च अन्यानि उदाहरणानि स्वीकुर्वन्तु। भवन्तः एतादृशं किमपि उदाहरणं नैव प्राप्स्यन्ति यदर्थम् एतादृशाः योगाः विभिन्नाः सन्ति। एतद् दर्शयति यत् पूर्णाङ्केभ्यः योगः सहचारी (associative) भवति।

व्यापकरूपेण, पूर्णाङ्कान् 'a, b तथा च c' इति पूर्णाङ्केभ्यः वयं वक्तुं शक्नुमः यत्

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

1.3.5 योज्यः तत्समकः

यदा वयं कयापि संख्यया सह शून्यं योजयामः, तदा वयं ताम् एव पूर्णसंख्यां प्राप्नुमः। पूर्णसंख्याभ्यः शून्यम् एकं योज्यं तत्समकम् (additive indenty) अस्ति। किम् एतत् पूर्णाङ्केभ्यः अपि योज्य-तत्समकम् अस्ति ? निम्नलिखितानि रिक्तस्थानानि पश्यन्तु पूरयन्तु च:

(i) $(-8) + 0 = -8$ (ii) $0 + (-8) = -8$

(iii) $(-23) + 0 =$ ------ (iv) $0 + (-37) = -37$

(v) $0 + 59 =$ -------- (vi) $0 +$ --------- $= -43$

(vii) $-61 +$ ------ $= -61$ (viii) ----- $+ 0 =$ ---------

उपर्युक्तानि उदाहरणानि दर्शयन्ति यत् शून्यं पूर्णाङ्केभ्यः योज्य-तत्समकम् अस्ति। भवन्तः केषुचित् पञ्चसु अन्योदाहरणेषु शून्यं योजयित्वा एतं प्रमाणीकर्तुं शक्नुवन्ति।

व्यापकरूपेण, कस्मैचित् अपि a इति पूर्णाङ्काय,

$$a + 0 = 0 + a$$

प्रयासं कुर्वन्तु

1. एकम् एतादृशं पूर्णाङ्कयुग्मं लिखन्तु यस्य योगेन वयं निम्नलिखितं प्राप्नुमः
   (a) एकः ऋणात्मकः पूर्णाङ्कः। (b) शून्यम्।
   (c) द्वयोः पूर्णाङ्कयोः एकः लघुतरः पूर्णाङ्कः। (d) द्वयोः पूर्णाङ्कयोः केवलम् एकस्मात् लघुतरः पूर्णाङ्कः।
   (e) द्वयोः पूर्णाङ्कयोः एकः गुरूतरः पूर्णाङ्कः।
2. एकम् एतादृशं पूर्णाङ्कयुग्मं लिखन्तु यस्य व्यवकलनेन वयं निम्नलिखितं प्राप्नुमः
   (a) एकः ऋणात्मकः पूर्णाङ्कः। (b) शून्यम्।
   (c) द्वयोः पूर्णाङ्कयोः एकः लघुतरः पूर्णाङ्कः। (d) द्वयोः पूर्णाङ्कयोः केवलम् एकस्मात् लघुतरः पूर्णाङ्कः।
   (e) द्वयोः पूर्णाङ्कयोः एकः गुरूतरः पूर्णाङ्कः।

उदाहरणम् 1 एतादृशान् पूर्णाङ्कयुग्मान् लिखन्तु येषाम्

(a) योगः -3 अस्ति। (b) अन्तरम् -5 अस्ति।

(c) अन्तरम् 2 अस्ति। (d) योगः 0 अस्ति।

समाधानम् (a) $(-1) + (-2) = -3$ अथवा $(-5) + 2 = -3$

(b) $(-9) - (-4) = -5$ अथवा $(-2) - 3 = -5$

(c) $(-7) - (-9) = 2$ अथवा $1 - (-1) = 2$

(d) $(-10) + 10 = 0$ अथवा $5 + (-5) = 0$

किं भवन्तः एतेषु उदाहरणेषु इतोऽपि अन्यान् युग्मान् लेखितुं शक्नुवन्ति ?

प्रश्नावली 1.2

1. एतादृशं पूर्णाङ्कयुग्मं लिखन्तु यस्य
   (a) योगः -7 अस्ति। (b) अन्तरम् -10 अस्ति।(c) योगः 0 अस्ति।

2. (a) एकम् ऋणात्मकं पूर्णाङ्कयुग्मं लिखन्तु यस्य अन्तरम् 8 अस्ति।
(b) एकम् ऋणात्मकं पूर्णाङ्कम् एकं च धनात्मकं पूर्णाङ्कं लिखन्तु येषाम् अन्तरम् -5 अस्ति।
(c) एकम् ऋणात्मकं पूर्णाङ्कम् एकं च धनात्मकं पूर्णाङ्कं लिखन्तु येषाम् अन्तरम् -3 अस्ति।

3. कस्याञ्चित् प्रश्नोत्तर-प्रतिस्पर्धायां त्रिषु उत्तरोत्तरचक्रेषु (rounds) A दलद्वारा प्राप्ताङ्काः 40,10,0 आसन् तथा च B दलद्वारा प्राप्ताङ्काः 10,0,-40 आसन्। केन दलेन अधिकाः अङ्काः प्राप्ताः? किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् पूर्णाङ्काः केनापि क्रमेण योजयितुं शक्यन्ते ?

4. निम्नलिखितानि कथनानि प्रमाणीकर्तुं रिक्तस्थानां पूर्तिं कुर्वन्तु

(i) (-5) + (-8) = (-8) + (-------)

(ii) – 53 + ---------- = -53

(iii) 17 + --------- = 0

(iv) [13+(-12)]+(-----)=13+[(-12)+(-7)]

(v) (-4) + [15+(-3)]=[-4+15]+------

1.4 पूर्णाङ्कानां गुणनम्

वयं पूर्णाङ्कानां योगम् एवं व्यवकलनं कर्तुम् अर्हामः। आगम्यताम् अधुना 'पूर्णाङ्कानां गुणनं' कथं क्रियते इति अधिगच्छामः।

1.4.1 एकस्य धनात्मकस्य एकस्य च ऋणात्मकस्य पूर्णाङ्कस्य गुणनम्

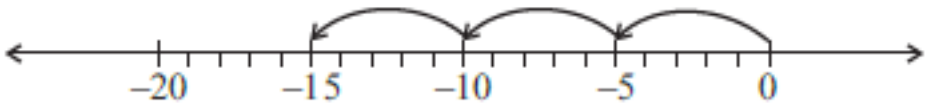
वयं जानीमः यत् पूर्णसंख्यानां गुणनं भूयः भूयः (अनवतरः) योगः एव अस्ति।

प्रयासं कुर्वन्तु

उदाहरणतः, $5 + 5 + 5 = 3 \times 5 = 15$

किं भवन्तः पूर्णाङ्कानां योगम् अपि एवमेव निरूपयितुं शक्नुवन्ति ?

निम्नलिखितया संख्यारेखया वयं प्राप्नुमः (-5)+(-5)+(-5) = -15 अस्ति।



प्रयासं कुर्वन्तु

संख्यारेखायाः प्रयोगं कुर्वन्तः, जानीमः

$4 \times (-8)$,

$8 \times (-2)$,

$3 \times (-7)$,

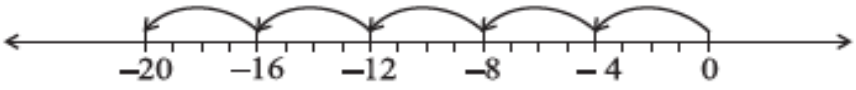
$10 \times (-1)$

परन्तु वयम् एतत् एवम् अपि लेखितुं शक्नुमः

(-5)+(-5)+(-5) = 3× (-5)

अतः $3 \times (-5) = -15$

अनेन प्रकारेण, (-4)+(-4)+(-4)+(-4)+(-4) = 5 × (-4) = -20



अन्यच्च (-3)+(-3)+(-3)+(-3) = --------- = ----------

सार्धमेव, (-7)+(-7)+(-7) = ---------- = ----------

आयान्तु, पश्यामः यत् संख्यारेखां विना कथं धनात्मकपूर्णाङ्कस्य ऋणात्मकपूर्णाङ्कस्य च गुणनफलं ज्ञायते ?

आयान्तु एकेन प्रकारेण 3 × (-5) इति जानीम। सर्वप्रथमम् 3 × 5 इति जानन्तु प्राप्त-गुणनफलात् च अग्रे ऋणम् (-) इति स्थापयन्तु। भवन्तः -15 इति प्राप्नुवन्ति। अर्थात् -15 इति प्राप्तुं वयं – (3×5) इति प्राप्नुमः।

अनेन प्रकारेण $5 \times (-4) = -(5\times4) = -20$ इति अस्ति।

इत्थमेव,निम्नलिखितं ज्ञायताम् :

$4 \times (-8) =$ _____ = _____ , $3 \times (-7) =$ _____ = _____

$6 \times (-5) =$ _____ = _____ , $2 \times (-9) =$ _____ = _____

अस्य विधेः प्रयोगं कुर्वन्तः वयं प्राप्नुमः यत्

$10 \times (-43) =$ _____ $-(10 \times 43) = -430$

अधुना यावत् वयं पूर्णाङ्कानाम् (धनात्मकपूर्णाङ्कः) × (ऋणात्मकपूर्णाङ्कः) इति रूपेण गुणां कृतवन्तः। आयान्तु अधुना एतान् (धनात्मकपूर्णाङ्कः) × (ऋणात्मकपूर्णाङ्कः) इति रूपेण गुणयामः ।

प्रयासं कुर्वन्तु

ज्ञायताम् :

(i) $6 \times (-19)$

(ii) $12 \times (-32)$

(iii) $7 \times (-22)$

सर्वप्रथमं वयं -3×5 इति जानीमः।

एतत् ज्ञातुं निम्नलिखितं क्रमं पश्यामः

वयं प्राप्नुमः $3 \times 5 = 15$

$2 \times 5 = 10 = 15 - 5$

$1 \times 5 = 5 = 10 - 5$

$0 \times 5 = 0 = 5 - 5$

अतः $-1 \times 5 = 0 - 5 = -5$

$-2 \times 5 = -5 - 5 = -10$

$-3 \times 5 = -10 - 5 = -15$

वयं पूर्वम् एव प्राप्तवन्तः यतः $3 \times (-5) = -15$

अतः, वयं प्राप्नुमः यत् $(-3) \times 5 = -15 = 3 \times (-5)$

एतादृशानां क्रमाणां प्रयोगं कुर्वन्तः, वयम् $(-5) \times 4 = -20 = 5 \times (-4)$ अपि प्राप्नुमः।

क्रमाणाम् उपयोगं कुर्वन्तः $(-4) \times 8$, $(-3) \times 7$, $(-6) \times 5$ तथा च $(-2) \times 9$ जानन्तु अन्यच्च निरीक्षणम् अपि कुर्वन्तु यत् किम्

$(-4) \times 8 = 4 \times (-8)$, $(-3) \times 7 = 3 \times (-7)$, $(-6) \times 5 = 6 \times (-5)$

तथा च $(-2) \times 9 = 2 \times (-9)$ अस्ति ?

अस्य प्रयोगं कुर्वाणाः, वयम् $(-33) \times 5 = 33 \times (-5) = -165$ इति प्राप्नुमः।

अनेन प्रकारेण वयं प्राप्नुमः यत् एकस्य धनात्मकपूर्णाङ्कस्य एकस्य च ऋणात्मकपूर्णाङ्कस्य गुणनसमये वयं तान् पूर्णसंख्यारूपेण गुणयामः गुणनफलात् च पूर्वम् ऋणचिह्नम् (-) स्थापयामः। अनेन प्रकारेण वयम् एकम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कं प्राप्नुमः।

व्यापकरूपेण, कयोश्चित् द्वयोः धनात्मकपूर्णाङ्कयोः कृते वयं कथयितुं शक्नुमः यत् --

प्रयासं कुर्वन्तु

1. ज्ञायताम् :

   (a) $15 \times (-16)$ (b) $21 \times (-32)$

   (c) $(-42) \times 12$ (d) -55×15

2. निरीक्षणं क्रियतां यत् किम्

   (a) $25 \times (-21) = (-25) \times 21$ अस्ति ?

   (b) $(-23) \times 20 = 23 \times (-20)$ अस्ति ?

   अन्यानि पञ्च उदाहरणानि लिखन्तु।

$$a \times (-b) = (-a) \times b = -(a \times b)$$

1.4.2 द्वयोः ऋणात्मकयोः पूर्णाङ्कयोः गुणनम्

किं भवन्तः (-3) × (-2) इत्यस्य गुणनफलं ज्ञातुं शक्नुवन्ति ?

अधः पश्यन्तु ?

$-3 \times 4 = -12$

$-3 \times 3 = -9 = -12 - (-3)$

$-3 \times 2 = -6 = -9 - (-3)$

$-3 \times 1 = -3 = -6 - (-3)$

$-3 \times 0 = 0 = -3 - (-3)$

$-3 \times -1 = 0 - (-3) = 0 + 3 = 3$

$-3 \times -2 = 3 - (-3) = 3 + 3 = 6$

किं भवन्तः अत्र कमपि क्रमं पश्यन्ति ? ध्यानं यच्छन्तु यत् गुणनफलानि कथं परिवर्तितानि सन्ति ?

एतेषां प्रेक्षणानाम् आधारेण, निम्नलिखितं पूरयन्तु :

$-3 \times -3 =$ _____, $-3 \times -4 =$ _____

इदानीम् एतानि गुणनफलानि पश्यन्तु, रिक्तस्थानि च पूरयन्तु :

प्रयासं कुर्वन्तु

(i) $(-5) \times 4$, इतः आरम्भं कुर्वन्तः $(-5) \times (-6)$ इति जानन्तु।

(ii) $(-6) \times 3$, इतः आरम्भं कुर्वन्तः $(-6) \times (-7)$ इति जानन्तु।

$-4 \times 4 = -16$

$-4 \times 3 = -12 = -16 + 4$

$-4 \times 2 =$ _____ $= -12 + 4$

$-4 \times 1 =$ _____

$-4 \times 0 =$ _____

$-4 \times (-1) =$ _____

$-4 \times (-2) =$ _____

$-4 \times (-3) =$ _____

वयम् एतैः क्रमैः पश्यामः यत्

$(-3) \times (-1) = 3 = 3 \times 1$

$(-3) \times (-2) = 6 = 3 \times 2$

$(-3) \times (-3) = 9 = 3 \times 3$

अन्यत् च $(-4) \times (-1) = 4 = 4 \times 1$

अतः $(-4) \times (-2) = 4 \times 2 =$ _____

$(-4) \times (-3) =$ _____ $=$ _____

अतः एतानि गुणनफलानि पश्यन्तः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् द्वयोः ऋणात्मकयोः पूर्णाङ्कयोः गुणनफलम् एकः धनात्मकपूर्णाङ्कः भवति। वयं द्वौ ऋणात्मकपूर्णाङ्कौ पूर्णसंख्यानां रूपेण गुणयामः गुणनफलात् च

पूर्वं धनात्मकचिह्नं (+) स्थापयामः।

अनेन प्रकारेण, वयं प्राप्नुमः यत् (–10) × (–12) = 120 वर्तते।

एवम् एव, (–15) × (– 6) = 90 अस्ति।

व्यापकरूपेण, कयोश्चित् a एवं b इति धनात्मकयोः पूर्णाङ्कयोः कृते ,

$$(-a) \times (-b) = a \times b$$

प्रयासं कुर्वन्तु	ज्ञायताम् : (–31) × (–100), (–25) × (–72), (–83) × (–28)

क्रीडा 1

(i) एकम् एतादृशं फलकं स्वीकुर्वन्तु यस्य उपरि –104 इत्यस्मात् आरभ्य 104 पर्यन्तं पूर्णाङ्काः अङ्किताः स्युः, यथा आकृतौ दर्शितम् अस्ति।

(ii) एकस्मात् स्यूतात् द्वौ नीलौ द्वौ च रक्तौ अक्षौ स्वीकुर्वन्तु। नीलाक्षयोः अङ्कित-बिन्दूनां संख्या धनात्मकपूर्णाङ्कान् दर्शयति, रक्ताक्षयोः च अङ्कित-बिन्दूनां संख्या ऋणात्मकपूर्णाङ्कान् दर्शयति।

104	103	102	101	100	99	98	97	96	95	94
83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93
82	81	80	79	78	77	76	75	74	73	72
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50
39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
–5	– 4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
– 6	–7	– 8	–9	–10	–11	–12	–13	–14	–15	–16
–27	–26	–25	–24	–23	–22	–21	–20	–19	–18	–17
–28	–29	–30	–31	–32	–33	–34	–35	–36	–37	–38
– 49	–48	–47	–46	–45	–44	–43	–42	–41	–40	–39
– 50	–51	–52	–53	–54	–55	–56	–57	–58	–59	– 60
–71	–70	–69	–68	–67	–66	–65	–64	–63	–62	–61
–72	–73	–74	–75	–76	–77	–78	–79	–80	–81	–82
–93	–92	–91	–90	–89	–88	–87	–86	–85	–84	–83
–94	–95	–96	–97	–98	–99	– 100	–101	–102	–103	–104

(iii) प्रत्येकं क्रीडकः निज गणकं (काउंटर) शून्यस्य उपरि स्थापयिष्यति।

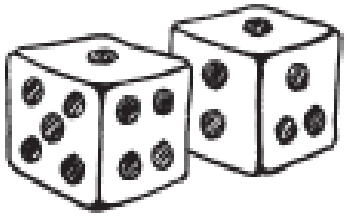
(iv) प्रत्येकं क्रीडकः स्यूतात् द्वयोः अक्षयोः युगपत् निष्कासनं क्षेपणं च करिष्यति।

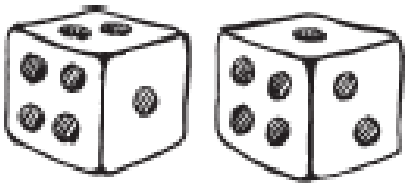
(v) अक्षान् क्षिप्त्वा क्रीडकः प्रतिवारं प्राप्ताः अक्षांकिताः संख्याः गुणयेत्।

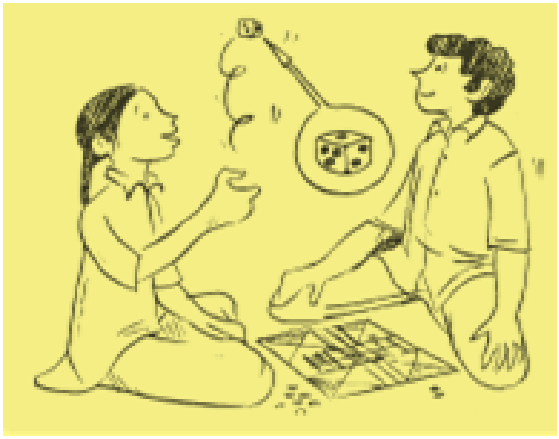
(vi) यदि गुणनफलम् एकः धनात्मकः पूर्णाङ्कः अस्ति, तर्हि क्रीडकः निजगणकं (काउंटर) 104

प्रति सारयिष्यति तथा च यदि गुणनफलम् एकः ऋणात्मकपूर्णाङ्कः अस्ति, तर्हि सः निजगणकं (काउंटर) -104 प्रति सारयिष्यति।

(vii) यः क्रीडकः सर्वप्रथमं 104 इति प्राप्नोति सः विजयी भविष्यति।







1.4.3 त्रयाणाम् अथवा त्र्यधिकानाम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कानां गुणनफलम्

वयं दृष्टवन्तः यत् द्वयोः ऋणात्मकपूर्णाङ्कयोः गुणनफलम् एकः धनात्मकः पूर्णाङ्कः भवति। त्रयाणाम् ऋणात्मकपूर्णाङ्काणां गुणनफलं किं भविष्यति? चतुर्णाम् ऋणात्मकपूर्णाङ्काणां गुणनफलं किं भविष्यति ? आगच्छन्तु निम्नलिखितानि उदाहरणानि पश्यामः

(a) $(-4) \times (-3) = 12$

(b) $(-4) \times (-3) \times (-2) = [(-4) \times (-3)] \times (-2)$
$= 12 \times (-2) = -24$

(c) $(-4) \times (-3) \times (-2) \times (-1) = [(-4) \times (-3) \times (-2)] \times (-1) = (-24) \times (-1)$

(d) $(-5) \times [(-4) \times (-3) \times (-2) \times (-1)] = (-5) \times 24 = -120$

उपर्युक्तैः उदाहरणैः वयं पश्यामः यत्

(a) द्वयोः ऋणात्मकपूर्णाङ्कानां गुणनफलम् एकः धनात्मकः पूर्णाङ्कः भवति।

(b) त्रयाणाम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कानां गुणनफलम् एकः ऋणात्मकः पूर्णाङ्कः भवति।

(c) चतुर्णाम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कानां गुणनफलम् एकः धनात्मकः पूर्णाङ्कः भवति।

(d) पञ्च ऋणात्मकपूर्णाङ्कानां गुणनफलं किम् अस्ति ?

षड् ऋणात्मकपूर्णाङ्कानां गुणनफलं किं भविष्यति ?

उपर्युक्ते (a) तथा च (c) मध्ये गुणितानां पूर्णाङ्कानां संख्या समा अस्ति (क्रमशः द्वौ चत्वारः च) (a) तथा च (c) मध्ये प्राप्तं गुणनफलं धनात्मकः पूर्णाङ्कः अस्ति। (b) एवं च (d) इत्यनयोः मध्ये गुणितानां

Euler सर्वप्रथमः गणितज्ञः आसीत् यः Ankitung zur Algebra(1770) इति स्वकीये पुस्तके एतत् सिद्धिकर्तुं प्रयत्नवान् यत्
$(-1) \times (-1) = 1$ इति भवति।

एका विशिष्टा स्थितिः

निम्नलिखितेषु कथनेषु एवञ्च परिणामिगुणनफलेषु विचारं कुर्वन्तु :

$(-1) \times (-1) = +1$

$(-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

$(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = +1$

$(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

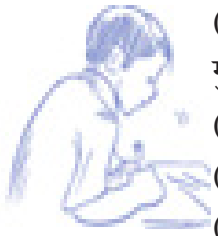
अस्य अर्थः अस्ति यत् यदि पूर्णाङ्कस्य (-1) संख्याक्रमेण गुणनं क्रियते तदा गुणनफलम् +1 अस्ति तथा च यदि संख्याक्रमेण गुणनं क्रियते तदा गुणनफलम् -1 अस्ति। भवन्तः उपरि दत्ते कथने (-1) इत्यस्य युग्मं विधाय अस्य निरीक्षणं कर्तुम् अर्हन्ति। पूर्णाङ्कानां गुणनफलस्य परिज्ञानाय एतत् बहु उपयोगी वर्तते।

ऋणात्मकपूर्णाङ्कानां संख्या विषमा अस्ति । तथा च (b) एवं च (d) इत्यनयोः मध्ये प्राप्तं गुणनफलम् ऋणात्मकः पूर्णाङ्कः अस्ति ।

अनेन प्रकारेण, वयं प्राप्नुमः यत् गुणनं क्रियमाणानाम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कानां संख्या यदि समा अस्ति, तर्हि गुणनफलं धनात्मकः पूर्णाङ्कः अस्ति तथा च यदि गुण्यमानाम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कानां संख्या विषमा अस्ति, तर्हि गुणनफलम् एकः ऋणात्मकः पूर्णाङ्कः अस्ति ।

प्रत्येकम् उदाहरणस्य पञ्च अन्यानि उदाहरणानि दत्त्वा अस्य कथनस्य पुष्टिं कुर्वन्तु ।

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च



(i) (–9) × (–5) × (– 6) × (–3) इति गुणनफलं धनात्मकम् अस्ति, अपरन्तु (–9) × (–5) × 6 × (–3) गुणनफलम् इति ऋणात्मकम् अस्ति । किमर्थम् ?

(ii) यदि वयं निम्नलिखितं युगपत् गुणयामः तर्हि गुणनफलस्य चिह्नं किं भविष्यति ?

(a) ऋणात्मकपूर्णाङ्काः अष्टौ एवं च धनात्मकपूर्णाङ्काः त्रयः

(b) ऋणात्मकपूर्णाङ्काः पञ्च एवञ्च धनात्मकपूर्णाङ्काः चत्वारः

(c) (-1) द्वादशवारम्

(d) (–1) इति 2m वारं, यत्र m , एका प्राकृतसंख्या अस्ति ।

1.5 पूर्णाङ्कानां गुणनस्य गुणाः

1.5.1 गुणनस्य अन्तर्गतः संवृतः

1. निम्नलिखितां तालिकां पश्यन्तु एतां च पूरयन्तु :

कथनानि	निष्कर्षाः
(–20) × (–5) = 100	गुणनफलम् एकः पूर्णाङ्कः अस्ति ।
(–15) × 17 = – 255	गुणनफलम् एकः पूर्णाङ्कः अस्ति ।
(–30) × 12 = _____	
(–15) × (–23) = _____	
(–14) × (–13) = _____	
12 × (–30) = _____	

भवन्तः किं पश्यन्ति ? किं भवन्तः एकम् एतादृशं पूर्णाङ्कयुग्मं ज्ञातुं शक्नुवन्ति यस्य गुणनफलम् एकः पूर्णाङ्कः नास्ति ? न, अनेन एतत् ज्ञायते यत् द्वयोः पूर्णाङ्कयोः गुणनफलं पुनः एकः पूर्णाङ्कः एव भवति । अतः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् पूर्णाङ्कगुणनस्य अन्तर्गतं संवृताः भवन्ति ।

व्यापकरूपेण,

a तथा च b इति सर्वेभ्यः पूर्णाङ्केभ्यः, a × b इति एकः पूर्णाङ्कः एव भवति ।

अन्येषां पञ्चानां पूर्णाङ्कयुग्मानां गुणनफलं ज्ञायताम् उपर्युक्तं कथनं च प्रमाणीक्रियताम् ।

1.5.2 गुणनस्य क्रमविनिमेयता

वयं जानीमः यत् पूर्णसंख्याभ्यः गुणनं क्रमविनिमेयं भवति । किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् पूर्णाङ्केभ्यः अपि

गुणनं क्रमविनिमेयम् अस्ति ?

निम्नलिखितां तालिकां पश्यन्तु एतां च पूरयन्तु :

कथनम् 1	कथनम् 2	निष्कर्षः
$3 \times (-4) = -12$	$(-4) \times 3 = -12$	$3 \times (-4) = (-4) \times 3$
$(-30) \times 12 =$ _____	$12 \times (-30) =$ _____	
$(-15) \times (-10) = 150$	$(-10) \times (-15) = 150$	
$(-35) \times (-12) =$ _____	$(-12) \times (-35) =$	
$(-17) \times 0 =$ _____		
_____ = _____	$(-1) \times (-15) =$	

भवन्तः किं पश्यन्ति ? उपर्युक्तानि उदाहरणानि सूचयन्ति यत् पूर्णाङ्केभ्यः गुणनं क्रमविनिमेयम् अस्ति । एतादृशानि पञ्च अन्यानि उदाहरणानि लिखन्तु तथा च प्रमाणीकुर्वन्तु ।

व्यापकरूपेण, a तथा च b इति कयोश्चित् द्वयोः पूर्णाङ्कयोः कृते,

$$a \times b = b \times a$$

1.5.3 शून्येन गुणनम्

वयं जानीमः यत् यदा कापि पूर्णसंख्या शून्येन गुण्यते, तदा गुणनफलरूपेण शून्यं प्राप्यते । ऋणात्मकपूर्णाङ्कानाम् एवं च शून्यस्य निम्नलिखितानि गुणनफलानि पश्यन्तु । वयं पूर्वप्रयुक्तप्रारूपम् आधारीकृत्य एतानि प्राप्नुमः ।

$(-3) \times 0 = 0$

$0 \times (-4) = 0$

$-5 \times 0 =$ _____

$0 \times (-6) =$ _____

तालिका दर्शयति यत् एकस्य ऋणात्मकपूर्णाङ्कस्य शून्यस्य च गुणनफलं शून्यं भवति ।

व्यापकरूपेण, a इति कस्मैचिदपि पूर्णाङ्काय,

$$a \times 0 = 0 \times a = 0$$

1.5.4 गुणनात्मकः तत्समकः

वयं जानीमः यत् पूर्णसंख्याभ्यः 1 गुणनात्मकः तत्समकः (multiplicative identity) अस्ति । निरीक्षणं कुर्वन्तु यत् 1 पूर्णाङ्केभ्यः अपि गुणनात्मकः तत्समकः अस्ति। एकेन सह पूर्णाङ्कानां निम्नलिखितानि गुणनफलानि पश्यन्तु :

$(-3) \times 1 = -3$ $\quad 1 \times 5 = 5$

$(-4) \times 1 =$ _____ $\quad 1 \times 8 =$ _____

$1 \times (-5) =$ _____ $\quad 3 \times 1 =$ _____

$1 \times (-6) =$ _____ $\quad 7 \times 1 =$ _____

एतत् दर्शयति यत् एकः पूर्णाङ्केभ्यः अपि गुणनात्मकः तत्समकः अस्ति ।

व्यापकरूपे, कस्मैचित् a पूर्णाङ्काय, वयं प्राप्नुमः यत् :

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

यदि कञ्चित् पूर्णाङ्कं -1 द्वारा गुणयामः, तदा किं भवति ? निम्नलिखितं पूरयन्तु :

$(-3) \times (-1) = 3$

$3 \times (-1) = -3$

$(-6) \times (-1) =$ _____

$(-1) \times 13 =$ _____

$(-1) \times (-25) =$ _____

$18 \times (-1) =$ _____

पूर्णाङ्केभ्यः शून्यं योज्यः तत्समकः अस्ति, यद्यपि 1 गुणनात्मकः तत्समकः अस्ति । यदा कञ्चित् a पूर्णाङ्कं (-1) द्वारा गुणयामः, तदा वयं तस्य पूर्णाङ्कस्य योज्यप्रतिलोमं प्राप्नुमः, अर्थात् $a \times (-1) = (-1) \times a = -a$ भवति ।

भवन्तः किं पश्यन्ति ?

किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् -1 पूर्णाङ्केभ्यः अपि गुणनात्मकः तत्समकः अस्ति ? न ।

1.5.5 गुणनस्य साहचर्यगुणः

-3,-2 तथा च 5 इति स्वीकुर्वन्तु ।

$[(-3) \times (-2)] \times 5$ तथा च $(-3) \times [(-2) \times 5]$ इत्यस्य उपरि विचारं कुर्वन्तु ।

प्रथमायां स्थितौ, (-3) एवं (-2) मेलयित्वा एकः समूहः निर्मितः अस्ति अपरायां स्थितौ, (-2) एवं 5 मेलयित्वा एकः समूहः निर्मितः वर्तते ।

वयं प्राप्नुमः यत् $[(-3) \times (-2)] \times 5 = 6 \times 5 = 30$

अन्यच्च $(-3) \times [(-2) \times 5] = (-3) \times (-10) = 30$

अनेन प्रकारेण, वयं द्वयोः स्थित्योः एकम् एव उत्तरं प्राप्नुमः

अतः $[(-3) \times (-2)] \times 5 = (-3) \times [(-2) \times 5]$

निम्नलिखितं विचारयन्तु गुणनफलानि च पूरयन्तु :

$[7 \times (-6)] \times 4 =$ _____ $\times 4 =$ _____

$7 \times [(-6) \times 4] = 7 \times$ _____ $=$ _____

किम् $[7 \times (-6)] \times 4 = 7 \times [(-6) \times (4)]$ अस्ति ?

किं पूर्णाङ्कानां विभिन्नप्रकारेभ्यः समूहेभ्यः गुणनफलं प्रभावितं जायते ?

व्यापकरूपे, केभ्यश्चित् त्रिभ्यः a, b तथा च c पूर्णाङ्केभ्यः,

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

a, b तथा च c मध्ये प्रत्येकस्मै पञ्च मानानि स्वीकुर्वन्तु अस्य गुणस्य सत्यापनं कुर्वन्तु ।

अतः पूर्णसंख्यावत् त्रिपूर्णाङ्कानां गुणनफलं तेषां समूहनिर्माणे निर्भरं नैव करोति एतत् च पूर्णाङ्केभ्यः गुणनस्य साहचर्यगुणः इति कथ्यते ।

1.5.6 वितरणगुणः

वयं जानीमः यत्

$16 \times (10 + 2) = (16 \times 10) + (16 \times 2)$ [योगस्य उपरि वितरणस्य नियमः]

आयान्तु निरीक्षणं कुर्मः किम् इदं पूर्णाङ्केभ्यः अपि सत्यम् अस्ति ? निम्नलिखितं पश्यन्तु :

(a) $(-2) \times (3 + 5) = -2 \times 8 = -16$

अन्यत् च $[(-2) \times 3] + [(-2) \times 5] = (-6) + (-10) = -16$

अतः, $(-2) \times (3 + 5) = [(-2) \times 3] + [(-2) \times 5]$

(b) $(-4) \times [(-2) + 7] = (-4) \times 5 = -20$

अन्यत् च $[(-4) \times (-2)] + [(-4) \times 7] = 8 + (-28) = -20$

अतः $(-4) \times [(-2) + 7] = [(-4) \times (-2)] + [(-4) \times 7]$

(c) $(-8) \times [(-2) + (-1)] = (-8) \times (-3) = 24$

अन्यत् च $[(-8) \times (-2)] + [(-8) \times (-1)] = 16 + 8 = 24$

अतः $(-8) \times [(-2) + (-1)] = [(-8) \times (-2)] + [(-8) \times (-1)]$

किं वयं कथयितुं शक्नुमः यत् पूर्णाङ्केभ्यः अपि योगस्य उपरि गुणनस्य वितरणनियमः सत्यम् अस्ति ?

आम्

व्यापकरूपे, केभ्यश्चित् a, b तथा च c त्रिपूर्णाङ्केभ्यः,

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

a, b तथा च c प्रत्येकस्मै न्यूनातिन्यूनं पञ्च विभिन्नमानानि स्वीकुर्वन्तु उपर्युक्तं च वितरणगुणं सत्यापितं कुर्वन्तु।

प्रयासं कुर्वन्तु

(i) किम् $10 \times [(6 + (-2)] = 10 \times 6 + 10 \times (-2)$?

(ii) किम् $(-15) \times [(-7) + (-1)] = (-15) \times (-7) + (-15) \times (-1)$?

अधुना निम्नलिखितं विचारयन्तु :

किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् $4 \times (3 - 8) = 4 \times 3 - 4 \times 8$ अस्ति ?

आयान्तु अस्य निरीक्षणं कुर्मः

$4 \times (3 - 8) = 4 \times (-5) = -20$

$4 \times 3 - 4 \times 8 = 12 - 32 = -20$

अतः, $4 \times (3 - 8) = 4 \times 3 - 4 \times 8$ अस्ति।

निम्नलिखितं विचारयन्तु :

$(-5) \times [(-4) - (-6)] = (-5) \times 2 = -10$

$[(-5) \times (-4)] - [(-5) \times (-6)] = 20 - 30 = -10$

प्रयासं कुर्वन्तु

(i) किम् $10 \times (6 - (-2)] = 10 \times 6 - 10 \times (-2)$ अस्ति ?

(ii) किम् $(-15) \times [(-7) - (-1)] = (-15) \times (-7) - (-15) \times (-1)$ अस्ति ?

अतः $(-5) \times [(-4) - (-6)] = [(-5) \times (-4)] - [(-5) \times (-6)]$

$(-9) \times [10 - (-3)]$ तथा च $[(-9) \times 10] - [(-9) \times (-3)]$

एतदर्थम् अस्य निरीक्षणं कुर्वन्तु।

भवन्तः प्राप्स्यन्ति यत् एतानि सर्वाणि समानानि सन्ति।

व्यापकरूपे, केभ्यश्चित् a, b तथा च c त्रिपूर्णाङ्केभ्यः,

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

a, b तथा च c प्रत्येकस्मै न्यूनातिन्यूनं पञ्च मानानि स्वीकुर्वन्तु एतं गुणं सत्यापितं कुर्वन्तु।

1.5.7 गुणनस्य सरलीकरणम्

निम्नलिखितस्य उपरि विचारं कुर्वन्तु :

(i) $(-25) \times 37 \times 4$ इत्येतं वयं $[(-25) \times 37] \times 4 = (-925) \times 4 = -3700$ इत्यसमिन् रूपे ज्ञातुम् अर्हामः। अथवा एतत् वयम् अनेन प्रकारेण अपि ज्ञातुं शक्नुमः

$(-25) \times 37 \times 4 = (-25) \times 4 \times 37 = [(-25) \times 4] \times 37 = (-100) \times 37 = -3700$

कतमः विधिः सरलः विद्यते ?

स्पष्टरूपेण द्वितीयः विधिः सरलः वर्तते, यतोहि (–25) इति चतुर्भिः गुणिते सति –100 प्राप्यते यस्य 37 द्वारा गुणनं सरलम् अस्ति। ध्यानं यच्छन्तु द्वितीये विधौ पूर्णाङ्कानां क्रमविनिमेयता सहचारिता च सम्मिलिता अस्ति।

अनेन प्रकारेण, वयं पश्यामः यत् पूर्णाङ्कानां क्रमविनिमेयता, सहचारिता वितरणता च परिकलनं सरलीकर्तुम् अस्माकं सहायतां करोति। आगच्छन्तु इतः अग्रे इतोऽपि अधिकं पश्यामः यत् एतेषां गुणानाम् उपयोगं कुर्वन्तः कथं परिकलनानि सरलानि कर्तुं शक्यते।

(ii) 16×12 ज्ञायताम्।

16×12 इति $16 \times (10 + 2)$ इत्यस्मिन् रूपे लिखितुं शक्यते।

$16 \times 12 = 16 \times (10 + 2) = 16 \times 10 + 16 \times 2 = 160 + 32 = 192$

(iii) $(-23) \times 48 = (-23) \times [50 - 2] = (-23) \times 50 - (-23) \times 2 = (-1150) - (-46) = -1104$

(iv) $(-35) \times (-98) = (-35) \times [(-100) + 2] = (-35) \times (-100) + (-35) \times 2 = 3500 + (-70) = 3430$

(v) $52 \times (-8) + (-52) \times 2$

$(-52) \times 2$ इति $52 \times (-2)$ अस्मिन् रूपे अपि लिखितुं शक्यते।

अतः, $52 \times (-8) + (-52) \times 2 = 52 \times (-8) + 52 \times (-2)$

$= 52 \times [(-8) + (-2)] = 52 \times [(-10)] = -520$

प्रयासं कुर्वन्तु

वितरणगुणस्य उपयोगं कुर्वन्तः, $(-49) \times 18$; $(-25) \times (-31)$; $70 \times (-19) + (-1) \times 70$ अस्य मानानि ज्ञायताम्।

उदाहरणम् 2 निम्नलिखितेषु प्रत्येकं गुणनफलं ज्ञायताम्

(i) $(-18) \times (-10) \times 9$ (ii) $(-20) \times (-2) \times (-5) \times 7$

(iii) $(-1) \times (-5) \times (-4) \times (-6)$

समाधानम्

(i) $(-18) \times (-10) \times 9 = [(-18) \times (-10)] \times 9 = 180 \times 9 = 1620$

(ii) $(-20) \times (-2) \times (-5) \times 7 = -20 \times (-2 \times -5) \times 7 = [-20 \times 10] \times 7 = -1400$

(iii) $(-1) \times (-5) \times (-4) \times (-6) = [(-1) \times (-5)] \times [(-4) \times (-6)] = 5 \times 24 = 120$

उदाहरणम् 3 सत्यापितं कुर्वन्तु

$(-30) \times [13 + (-3)] = [(-30) \times 13] + [(-30) \times (-3)]$

समाधानम् $(-30) \times [13 + (-3)] = (-30) \times 10 = -300$

$[(-30) \times 13] + [(-30) \times (-3)] = -390 + 90 = -300$

अतः, $(-30) \times [13 + (-3)] = [(-30) \times 13] + [(-30) \times (-3)]$

उदाहरणम् 4 15 प्रश्नयुतायाम् एकस्यां कक्ष्यापरीक्षायाम्, प्रत्येकं शुद्ध-उत्तराय 4 अङ्काः दीयन्ते प्रत्येकं च अशुद्ध-उत्तराय (-2) अङ्काः दीयन्ते। (i) गुरूप्रीतवर्या सर्वान् प्रश्नान् साधयति, परन्तु तस्याः उत्तरेषु केवलं 9 उत्तराणि एव शुद्धानि सन्ति। तया कियन्तः अङ्काः प्राप्ताः ? (ii) तस्याः एकस्य मित्रस्य केवलं 5 उत्तराणि शुद्धानि सन्ति। तस्याः मित्रद्वारा कियन्तः अङ्काः प्राप्ताः ?

समाधानम्

(i) शुद्धोत्तराय दीयमानाः अङ्काः = 4

अतः 9 शुद्धोत्तरेभ्यः दीयमानाः अङ्काः = $4 \times 9 = 36$

एकस्मै अशुद्धोत्तराय दीयमानाः अङ्काः = –2

अतः 6 (= 15 – 9) अशुद्धोत्तरेभ्यः दीयमानाः अङ्काः = $(-2) \times 6 = -12$

अतः गुरूप्रीतद्वारा प्राप्ताः अङ्काः = $36 + (-12) = 24$

(ii) एकस्मै शुद्धोत्तराय दीयमानाः अङ्काः = 4

अनेन प्रकारेण, 5 शुद्धोत्तरेभ्यः दीयमानाः अङ्काः = $4 \times 5 = 20$

एकस्मै अशुद्धोत्तराय दीयमानाः अङ्काः = –2

अतः, 10 (=15 – 5) अशुद्धोत्तरेभ्यः दीयमानाः अङ्काः = $(-2) \times 10 = -20$

अतः, गुरूप्रीतमहोदयायाः मित्रेण प्राप्ताः अङ्काः = $20 + (-20) = 0$

उदाहरणम् 5 कल्पनां कुर्वन्तु यत् पृथ्वीतः उपरिस्थः अन्तरालः धनात्मकपूर्णाङ्केन निरूप्यते पृथ्वीतः अधस्स्थः अन्तरालः ऋणात्मकपूर्णाङ्केन निरूप्यते, तदा निम्नलिखितानाम् उत्तराणि यच्छन्तु :

(i) एकः उत्थापकः(elevator) कस्मिंश्चित् आकरे 5 मी. प्रति मिनटमानेन अधः गच्छति। एकाहोरायाः अनन्तरं तस्य का स्थितिः भविष्यति ?

(ii) यदि सः भूमितः 15 मी. उपरिष्टात् अधः आगच्छति, तर्हि 45 निमेषानन्तरं तस्य का स्थितिः भविष्यति ?

समाधानम्

(i) यतो हि उत्थापकः अधः गच्छन् अस्ति, अतः तेन अतिक्रमितः अन्तरालः ऋणात्मकपूर्णाङ्केन निरूपयिष्यते।

एकस्मिन् निमेषे उत्थापकस्य स्थितौ परिवर्तनम् = - 5 मी.

60 निमेषानन्तरम् उत्थापकस्य स्थितौ परिवर्तनम् = $(-5) \times 60 = -300$ मी.,अर्थात् भूमितलतः 300 मी अधः।

(ii) 45 निमेषेषु उत्थापकस्य स्थितौ परिवर्तनम् = $(-5) \times 45 = -225$ मी.

अतः, उत्थापकस्य अन्तिमा स्थितिः = $-225 + 15 = -210$ मी., अर्थात् भूमितलतः 210 मी. अधः।

प्रश्नावली 1.3

1. निम्नलिखितानां गुणनफलानि ज्ञायताम् :

   (a) $3 \times (-1)$ (b) $(-1) \times 225$

   (c) $(-21) \times (-30)$ (d) $(-316) \times (-1)$

   (e) $(-15) \times 0 \times (-18)$ (f) $(-12) \times (-11) \times (10)$

   (g) $9 \times (-3) \times (-6)$ (h) $(-18) \times (-5) \times (-4)$

   (i) $(-1) \times (-2) \times (-3) \times 4$ (j) $(-3) \times (-6) \times (-2) \times (-1)$

2. निम्नलिखितानि सत्यापितानि कुर्वन्तु

   (a) $18 \times [7 + (-3)] = [18 \times 7] + [18 \times (-3)]$

   (b) $(-21) \times [(-4) + (-6)] = [(-21) \times (-4)] + [(-21) \times (-6)]$

3. (i) केभ्यश्चित् a पूर्णाङ्केभ्यः $(-1) \times a$ कस्य सामानम् अस्ति ?

   (ii) सः पूर्णाङ्कः ज्ञायतां, यस्य (-1) सह गुणनफलम् अस्ति :

   (a) –22 (b) 37 (c) 0

4. $(-1) \times 5$ इतः आरभ्य विभिन्नैः गुणनफलैः कञ्चित् क्रमं दर्शयन् $(-1) \times (-1) = 1$ इति निरूपयन्तु।

5. उचितगुणनाम् उपयोगं कुर्वन्तः, गुणनफलं ज्ञायताम् :

   (a) $26 \times (-48) + (-48) \times (-36)$ (b) $8 \times 53 \times (-125)$

   (c) $15 \times (-25) \times (-4) \times (-10)$ (d) $(-41) \times 102$

   (e) $625 \times (-35) + (-625) \times 65$ (f) $7 \times (50 - 2)$

   (g) $(-17) \times (-29)$ (h) $(-57) \times (-19) + 57$

6. कस्याञ्चित् हिमीकरणप्रक्रकियां, प्रकोष्ठस्य तापमानं 40°C इतः 5°C पर्यन्तं प्रति घण्टा अनुपातेन न्यूनीकरणस्य आवश्यकता अस्ति। अस्याः प्रक्रियायाः आरम्भात् 10 होराणाम् अनन्तरं, प्रकोष्ठस्य तापमानं किं भविष्यति ?

7. दशप्रश्नयुतायाम् एकस्यां कक्षपरीक्षायां प्रत्येकं शुद्धोत्तराय 5 अङ्काः दीयन्ते प्रत्येकं च अशुद्धोत्तराय (-2) अङ्काः दीयन्ते एवञ्च प्रयत्नरहितेभ्यः प्रश्नेभ्यः शून्यम् अङ्काः दीयन्ते।

   (i) मोहनः चत्वारि शुद्धोत्तराणि षड् च अशुद्धोत्तराणि ददाति। सः कियतः अङ्कान् प्राप्नोति ?

   (ii) रेशमायाः पञ्च उत्तराणि शुद्धानि सन्ति पञ्च च अशुद्धोत्तराणि सन्ति। तया कियन्तः अङ्काः प्राप्ताः ?

   (iii) हीना सप्त प्रश्नान् कृतवती तेषु द्वयोः उत्तरं शुद्धम् अस्ति पञ्चानां च प्रश्नानाम् उत्तराणि अशुद्धानि सन्ति। सा कियतः अङ्कान् प्राप्नोति ?

8. एकः पाषाणचूर्णोद्योगः श्वेतपाषाणचूर्णं 8 रू. प्रतिस्यूतम् अनुपातेन लाभं प्राप्नोति धुसरवर्णस्य च पाषाणचूर्णं 5 रू. प्रतिस्यूतम् अनुपातेन हानिं प्राप्नोति।

   (a) कस्मिंश्चित् मासे सः पाषाणचूर्णोद्योगः 3000 स्यूतान् श्वेतपाषाणचूर्णस्य 5000 स्यूतान् धुसरपाषाणचूर्णस्य विक्रीणाति। तस्य पाषाणचूर्णोद्योगस्य लाभः हानिः च किम् अस्ति ?

   (b) यदि धुसरपाषाणचूर्णस्य स्यूतानां संख्या 6400 अस्ति, तर्हि पाषाणचूर्णोद्योगः श्वेतपाषाणचूर्णस्य कियतः स्यूतान् विक्रीणीयात्, येन सः न लाभः न च हानिः स्यात् ?

9. निम्नलिखितं कथनं सत्ये परिवर्तितुम, रिक्तस्थानानि एकेन पूर्णाङ्केन प्रतिस्थापितं कुर्वन्तु :

(a) $(-3) \times$ _____ $= 27$ (b) $5 \times$ _____ $= -35$

(c) _____ $\times (-8) = -56$ (d) _____ $\times (-12) = 132$

1.6 पूर्णाङ्कानां विभाजनम्

वयं जानीमः यत् विभाजनं, गुणनस्य विपरीता संक्रिया अस्ति । आयान्तु पूर्णसंख्याभ्यः एकम् उदाहरणं पश्यामः

यतो हि $3 \times 5 = 15$ अस्ति, अतः $15 \div 5 = 3$ तथा च $15 \div 3 = 5$ अस्ति ।

अनेन प्रकारेण, $4 \times 3 = 12$ इतः $12 \div 4 = 3$ एवं च $12 \div 3 = 4$ इति प्राप्तं भवति ।

एवं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् पूर्णसंख्यानां प्रत्येकं गुणनकथनाय द्वौ विभाजन-भागौ, कथनम् अस्ति ।

किं भवन्तः पूर्णाङ्केभ्यः गुणनकथनानि एवं संगतभागान् लिखितुं शक्नुवन्ति ?

- निम्नलिखितां तालिकां पश्यन्तु एतां च पूरयन्तु ।

गुणनकथनानि	संगतभागस्य कथनानि
$2 \times (-6) = (-12)$	$(-12) \div (-6) = 2$, $(-12) \div 2 = (-6)$
$(-4) \times 5 = (-20)$	$(-20) \div (5) = (-4)$, $(-20) \div (-4) = 5$
$(-8) \times (-9) = 72$	$72 \div$ _____ $=$ _____ , $72 \div$ _____ $=$ _____
$(-3) \times (-7) =$ _____	_____ $\div (-3) =$ _____ , _____
$(-8) \times 4 =$ _____	_____ , _____
$5 \times (-9) =$ _____	_____ , _____
$(-10) \times (-5) =$	_____ , _____

उपर्युक्तेन वयं पश्यामः यत्

$(-12) \div 2 = (-6)$ $(-20) \div (5) = (-4)$

$(-32) \div 4 = -8$ $(-45) \div 5 = -9$

वयं पश्यामः यत् यदा वयम् एकम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कं धनात्मकपूर्णाङ्केन भागं दद्मः, तदा वयं तान् पूर्णसंख्यायाः रूपेण भागं दद्मः ततश्च भागफलात् पूर्वम् ऋणचिह्नं (-) स्थापयामः । अनेन प्रकारेण, वयम् एकम् ऋणात्मकं पूर्णाङ्कं प्राप्नुमः ।

प्रयासं कुर्वन्तु

ज्ञायताम् :

(a) $(-100) \div 5$ (b) $(-81) \div 9$

(c) $(-75) \div 5$ (d) $(-32) \div 2$

- वयम् इदम् अपि पश्यामः यत्

$72 \div (-8) = -9$ अथवा $50 \div (-10) = -5$

$72 \div (-9) = -8$ $50 \div (-5) = -10$

अनेन प्रकारेण, यदा वयम् एकं धनात्मकपूर्णाङ्कम् एकेन ऋणात्मकपूर्णाङ्केन भागं दद्मः, तदा सर्वप्रथमं वयं तान् पूर्णसंख्यायाः रूपेण भागं दद्मः तदनन्तरं भागफलात् पूर्वम् ऋणचिह्नं (-) स्थापयामः । अनेन प्रकारेण वयम् एकम् ऋणात्मकं पूर्णाङ्कं प्राप्नुमः ।

किं वयं कथयितुं शक्नुमः यत् $(-48) \div 8 = 48 \div (-8)$? आयान्तु निरीक्षणं कुर्मः। वयं जानीमः यत् $(-48) \div 8 = -6$ तथा च $48 \div (-8) = -6$। अतः $(-48) \div 8 = 48 \div (-8)$। निम्नलिखितस्य कृते अस्य निरीक्षणं कुर्वन्तु।

(i) $90 \div (-45)$ तथा च $(-90) \div 45$ (ii) $(-136) \div 4$ तथा च $136 \div (-4)$

व्यापकरूपेण, काभ्याञ्चित् a तथा च b धनात्मकपूर्णाङ्काभ्याम्,

$a \div (-b) = (-a) \div b$, यत्र $b \neq 0$ अस्ति।

प्रयासं कुर्वन्तु

ज्ञायताम् (a) $125 \div (-25)$ (b) $80 \div (-5)$ (c) $64 \div (-16)$

- अन्ते, वयं पश्यामः यत्

$(-12) \div (-6) = 2$; $(-20) \div (-4) = 5$; $(-32) \div (-8) = 4$; $(-45) \div (-9) = 5$

अनेन प्रकारेण, वयं वक्तुं शक्नुमः यदा वयम् एकम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कम् एकेन ऋणात्मकपूर्णाङ्केन भागं दद्मः, तदा सर्वप्रथमं वयं तान् पूर्णसंख्यायाः रूपेण भागं दद्मः ततश्च भागफलात् पूर्वं धनात्मकचिह्नं (+) स्थापयामः, अर्थात् वयम् एकम् धनात्मकं पूर्णाङ्कं प्राप्नुमः।

व्यापकरूपेण, काभ्याञ्चित् a तथा च b ऋणात्मकपूर्णाङ्काभ्याम्,

$(-a) \div (-b) = a \div b$, यत्र $b \neq 0$ अस्ति।

प्रयासं कुर्वन्तु

ज्ञायताम् (a) $(-36) \div (-4)$ (b) $(-201) \div (-3)$ (c) $(-325) \div (-13)$

1.7 पूर्णाङ्कानां भागस्य गुणाः

निम्नलिखितां तालिकां पश्यन्तु पूरयन्तु च :

कथनम्	निष्कर्षः	कथनम्	निष्कर्षः
$(-8) \div (-4) = 2$	परिणामः एकः पूर्णाङ्कः अस्ति।	$(-8) \div 3 = (-8)/(3)$	_____
$(-4) \div (-8) = (-4)/(-8)$	परिणामः एकः पूर्णाङ्कः नास्ति।	$3 \div (-8) = 3/(-8)$	_____

भवन्तः किं पश्यन्ति ? वयं पश्यामः यत् पूर्णाङ्कभागस्य अन्तर्गतः संवृतः नास्ति। निजपक्षात् पञ्चोदाहरणानि स्वीकुर्वन्तः, अस्य कथनस्य सत्यतायाः उचितं कारणं वदन्तु।

- वयम जानीमः यत् पूर्णसंख्याभ्यः भागस्य क्रमविनिमेयः नास्ति। आयान्तु पूर्णाङ्केभ्यः अपि अस्य निरीक्षणं कुर्मः।

भवन्तः तालिकां द्रष्टुम् अर्हन्ति यत् $(-8) \div (-4) \neq (-4) \div (-8)$ अस्ति।

किम् $(-9) \div 3$ तथा च $3 \div (-9)$ एकसमानम् अस्ति ?

किम् $(-30) \div (-6)$ तथा च $(-6) \div (-30)$ एकसमानम् अस्ति ?

किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् पूर्णाङ्केभ्यः भागः क्रमविनिमेयः अस्ति ?

नैव। भवन्तः पञ्च अन्यानि पूर्णाङ्कयुग्मानि स्वीकृत्य इदं सत्यापितं कर्तुं शक्नुवन्ति।

- पूर्णसंख्यानाम् इव, कस्यचित् अपि पूर्णाङ्कस्य शून्येन सह भागः अर्थहीनः वर्तते शून्येतरेण पूर्णाङ्केन शून्यं भागे सति शून्यमेव प्राप्यते, अर्थात् कस्मैचित् a पूर्णाङ्काय $a \div 0$ परिभाषितं नास्ति। परन्तु $0 \div a = 0$, $a \neq 0$ एतदर्थम् अस्ति।
- यदा वयं काञ्चित् पूर्णसंख्याम् एकेन भागं दद्मः तदा अस्मान् सा एव संख्या प्राप्ता भवति। आगच्छन्तु अस्य निरीक्षणं कुर्मः किम् एतत् ऋणात्मकपूर्णाङ्केभ्यः अपि सत्यम् अस्ति।

  निम्नलिखितं पश्यन्तु :

  $(-8) \div 1 = (-8)$ $(-11) \div 1 = -11$ $(-13) \div 1 = -13$

  $(-25) \div 1 =$ ____ $(-37) \div 1 =$ ____ $(-48) \div 1 =$ ____

  एतत् दर्शयति यत् ऋणात्मकपूर्णाङ्कम् एकेन भागे सति सः एव ऋणात्मकपूर्णाङ्कः प्राप्तः भवति। अतः कञ्चित् पूर्णाङ्कम् एकेन भागे सति सः एव पूर्णाङ्कः प्राप्तः भवति। व्यापकरूपे, कस्मैचित् a पूर्णाङ्काय,

  $$a \div 1 = a$$

- कञ्चित् पूर्णाङ्कम् (-1) द्वारा भागे सति किं भवति ? निम्नलिखितं तालिकां पूरयन्तु :

  $(-8) \div (-1) = 8$ $11 \div (-1) = -11$ $13 \div (-1) =$ ____

  $(-25) \div (-1) =$ ____ $(-37) \div (-1) =$ ____ $-48 \div (-1) =$ ____

  भवन्तः किं पश्यन्ति ?

  वयं वक्तुं शक्नुमः यत् कञ्चित् पूर्णाङ्कं (-1) द्वारा भागे सति सः एव पूर्णाङ्कः नैव प्राप्यते।
- किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् $[(-16) \div 4] \div (-2)$ एवं $(-16) \div [4 \div (-2)]$ समानम् अस्ति ?

  वयं जानीमः यत् $[(-16) \div 4] \div (-2) = (-4) \div (-2) = 2$

  तथा च $(-16) \div [4 \div (-2)] = (-16) \div (-2) = 8$

  अतः $[(-16) \div 4] \div (-2) \neq (-16) \div [4 \div (-2)]$

  किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् पूर्णाङ्केभ्यः भागः साहचर्यं नास्ति।

  स्वकीयपक्षात् पञ्च अन्यानि उदाहरणि इदं सत्यापितं कुर्वन्तु।

प्रयासं कुर्वन्तु

किं कस्यचित् a पूर्णाङ्कस्य कृते

(i) $1 \div a = 1$ अस्ति?

(ii) $a \div (-1) = -a$ अस्ति ? a इत्यस्य विभिन्नमानेभ्यः अस्य निरीक्षणं कुर्वन्तु।

उदाहरणम् 6 कस्याञ्चित् परीक्षायां शुद्धोत्तराय (+5) अङ्काः दीयन्ते प्रत्येकं (प्रत्येकस्मै) च अशुद्धोत्तराय (-2) अङ्काः दीयन्ते। (i) राधिका सर्वेषां प्रश्नानाम् उत्तराणि अददत् 30 च अङ्कान् आप्तवती, यद्यपि तस्याः 10 प्रश्नाः एव शुद्धाः आसन्। (ii) जयः अपि सर्वेषां प्रश्नानाम् उत्तराणि अददत् सः च (-12) अङ्कान् आप्तवान्, यद्यपि तस्य चत्वारि उत्तराणि शुद्धानि आसन्। तयोः मध्ये प्रत्येकं कतिप्रश्नानाम् अशुद्धानि उत्तराणि अददत् ?

समाधानम्

(i) एकस्य शुद्धोत्तराय दीयमानाः अङ्काः = 5

अतः, 10 शुद्धोत्तरेभ्यः दीयमानाः अङ्काः $= 5 \times 10 = 50$

राधिकाद्वारा प्राप्ताः अङ्काः = 30

अशुद्धोत्तराय दीयमानाः अङ्काः $= 30 - 50 = -20$

एकस्मै अशुद्धोत्तराय दीयमानाः अङ्काः = (-2)

अतः, अशुद्धप्रश्नानां संख्या $= (-20) \div (-2) = 10$

(ii) चतुर्भ्यः शुद्धोत्तरेभ्यः दीयमानाः अङ्काः = 5 × 4 = 20

जयद्वारा प्राप्ताः अङ्काः = -12

अशुद्धोत्तरेभ्यः प्रदत्ताः अङ्काः = –12 – 20 = – 32

अतः, अशुद्धप्रश्नानां संख्या = (–32) ÷ (–2) = 16

उदाहरणम् 7 काचित् आपणिका एकरूप्यकस्य लाभः एकस्याः लेखन्याः विक्रयेण अर्जयति स्वकीयस्य च पुरातनभण्डारस्य अङ्कनीः विक्रणन्ती सा 40 पणाः (पैसे) प्रतिअङ्कनि हानिं वहति।

(i) कस्मिंश्चित् विशिष्टे मासे सा 5 रूप्यकाणां हानिं वहति।

अस्याम् अवधौ सा 45 लेखनीः व्यक्रीणात्। उच्यताम् अस्याम् अवधौ सा कियतीः अङ्कनीः विक्रीतवती।

(ii) अग्रिमे मासे सा न तु लाभं न च हानिं प्राप्तवती। यदि अस्मिन् मासे सा 70 लेखनीः व्यक्रीणात्, तदा सा कियतीः अङ्कनीः विक्रीतवती ?

समाधानम्

(i) एकस्याः लेखन्याः विक्रयेण अर्जितः लाभः = 1 रू.

45 लेखनीनां विक्रयेण अर्जितः लाभः = 45 रू.

यं वयं '+ 45 रू.' इति रूपेण निर्दिष्टं कुर्मः।

प्रदत्ता हानिः = 5 रू.,यां वयं '-5 रू.'इति रूपेण निर्दिष्टां कुर्मः।

अर्जितः लाभः + उढा हानिः = अखिला हानिः

अतः, उढा हानिः = अखिला हानिः - अर्जितः लाभः

= (-5 -45) रू = (-50) रू = - 5000 पणाः (पैसे)

एकया अङ्कन्या विक्रयेण उढा हानिः = 40 पणाः यान् वयं - 40 पणाः इति लिखामः।

अतः विक्रीतानाम् अङ्कनीनां संख्या = (-5000) ÷ (-40) = 125 अङ्कन्याः।

(ii) अग्रिमे मासे सा न तु लाभं न च हानिं प्राप्तवती।

अतः, अर्जितः लाभः + उढा हानिः = 0

अर्थात् अर्जितः लाभः = - उढा हानिः

अधुना, 70 लेखनीनां विक्रयेण अर्जितः लाभः = 70 रू.

अतः अङ्कनीनां विक्रयेण उढा हानिः = 70 रू.,यं वयं – 70 रू.अर्थात् – 7000 पणैः दर्शयामः।

विक्रीतानाम् अङ्कनीनां संख्या = (-7000) ÷ (-40) = 175 अङ्कन्याः।

प्रश्नावली 1.4

1. निम्नलिखितेषु प्रत्येकं मानं ज्ञायताम् :

(a) (–30) ÷ 10 (b) 50 ÷ (–5) (c) (–36) ÷ (–9)

(d) (– 49) ÷ (49) (e) 13 ÷ [(–2) + 1] (f) 0 ÷ (–12)

(g) (–31) ÷ [(–30) + (–1)]

(h) [(–36) ÷ 12] ÷ 3 (i) [(– 6) + 5)] ÷ [(–2) + 1]

2. निम्नलिखितानां a, b तथा च c इत्येतेषां मानेषु प्रत्येकस्य कृते, a ÷ (b + c) ≠ (a ÷ b) + (a ÷ c) इति सत्यापितं कुर्वन्तु

(a) a = 12, b = – 4, c = 2 (b) a = (–10), b = 1, c = 1

3. रिक्तस्थानानां पूर्तिं कुर्वन्तु :

(a) $369 \div$ _____ $= 369$ (b) $(-75) \div$ _____ $= -1$

(c) $(-206) \div$ _____ $= 1$ (d) $-87 \div$ _____ $= 87$

(e) _____ $\div 1 = -87$ (f) _____ $\div 48 = -1$

(g) $20 \div$ _____ $= -2$ (h) _____ $\div (4) = -3$

4. पञ्च एतादृशान् पूर्णाङ्कयुग्मान् (a, b) लिखन्तु,येन $a \div b = -3$ स्यात् । एतादृशः एकः युगमः (6, –2) अस्ति, यतोहि $6 \div (-2) = (-3)$ अस्ति ।

5. मध्याह्ने 12 वादने तापमानं 10°C तः उपरि आसीत् । यदि इदम् अर्धरात्रीं यावत् 2°C प्रति घण्टा अनुपातेन न्यूनं भवति, तदा कस्मिन् समये तापमानं शून्यात् 8°C अधः भविष्यति ? अर्धरात्र्यां किं तापमानं भविष्यति ?

6. एकस्यां कक्षापरीक्षायां प्रत्येकं शुद्धोत्तराय (+3) अङ्काः दीयन्ते प्रत्येकम् अशुद्धोत्तराय (-2) अङ्काः दीयन्ते कञ्चित् च प्रश्नं साधयितुम् अप्रयत्ने सति किमपि अङ्काः न दीयन्ते (i) राधिका 20 अङ्कान् प्राप्तवती । यदि तस्याः 12 उत्तराणि शुद्धानि सन्ति, तदा तया कति प्रश्नानाम् अशुद्धम् उत्तरं दत्तम् ? (ii) मोहनी परीक्षायां (-5) अङ्कान् प्राप्नोति, यद्यपि तस्याः 7 उत्तराणि शुद्धानि आसन् । तया कति प्रश्नानाम् उत्तरम् अशुद्धं दत्तम् ?

7. एकः उत्थापकः कस्मिंश्चित् आकरे 6 मी. प्रति निमेषानुपातेन अधः गच्छति । यदि अधः गमनं भूमितलात् 10 मी. उपरिष्टात् आरम्भं भवति, तदा -350 मी. पर्यन्तं प्राप्तुं सः कियन्तं कालं स्वीकरिष्यति ?

अस्माभिः का चर्चा कृता ?

1 पूर्णाङ्कः संख्यानां विशालः संग्रहः अस्ति यस्मिन् पूर्णसंख्याः तेषां च ऋणात्मकाः सम्मिलिताः सन्ति । येषां परिचयः VI कक्ष्यायां कारितम् आसीत् ।

2. भवद्भिः गतकक्ष्यायां पूर्णाङ्कानां संख्यारेखायां निरूपणं तेषां च योगस्य एवं च व्यवकलनस्य विषये अपि अधीतम् ।

3. अधुना अस्माभिः योगेन एवं च व्यवकलेन च सन्तुष्यमानां गुणानाम् अध्ययनं कृतवन्तः।

(a) पूर्णाङ्कः योगस्य एवं व्यवकलनस्य कृते संवृतः अस्ति । अर्थात् $a + b$ तथा च $a - b$ द्वौ एव पुनः पूर्णाङ्कौ भवतः, यत्र a तथा च b कश्चन पूर्णाङ्कः अस्ति ।

(b) पूर्णाङ्केभ्यः योगः क्रमविनिमेयः अस्ति, अर्थात् सर्वेभ्यः a तथा च b पूर्णाङ्केभ्यः $a + b = b + a$

(c) पूर्णाङ्केभ्यःयोगस्य साहचर्यः अस्ति, अर्थात् सर्वेभ्यः a, b तथा च c पूर्णाङ्केभ्यः $(a + b) + c = a + (b + c)$ भवति ।

(d) योगस्य अन्तर्गतः पूर्णाङ्कः शून्यस्य तत्समकः अस्ति, अर्थात् कस्मैचित् a पूर्णाङ्काय $a + 0 = 0 + a = a$ इति भवति ।

4. वयम् अधीतवन्तः यत् पूर्णाङ्काः कथं गुण्यन्ते इति, अस्माभिः च एतत् अपि दृष्टं यत् एकस्य धनात्मकस्य एकस्य च ऋणात्मकस्य पूर्णाङ्कस्य गुणनफलम् एकः ऋणात्मकपूर्णाङ्कः भवति, यद्यपि द्वयोः ऋणात्मकपूर्णाङ्कयोः गुणनफलम् एकः धनात्मकपूर्णाङ्कः भवति ।

उदाहरणतः, $-2 \times 7 = -14$ एवं $-3 \times -8 = 24$ अस्ति ।

5. ऋणात्मकपूर्णाङ्कानां समसंख्यायां सत्यां तेषां गुणनफलं धनात्मकं भवति किन्तु अस्यां संख्यायां विषमाां सत्याम् अपि गुणनफलम् ऋणात्मकं भवति ।

6. पूर्णाङ्कस्य गुणनान्तर्गतान् केचन गुणान् दर्शयामः
   (a) गुणनान्तर्गताः पूर्णाङ्काः संवृताः भवन्ति, अर्थात् काभ्याञ्चित् a तथा च b पूर्णाङ्काभ्यां $a \times b$, एकः पूर्णाङ्कः भवति।
   (b) पूर्णाङ्केभ्यः गुणनं क्रमविनिमेयः भवति, अर्थात् काभ्याञ्चित् a तथा च b पूर्णाङ्काभ्यां $a \times b = b \times a$ भवति।
   (c) गुणनस्य अन्तर्गतः 1 पूर्णाङ्कः, तत्समकः अस्ति, अर्थात् कस्मैञ्चित् अपि a पूर्णाङ्काय $1 \times a = a \times 1 = a$ भवति।
   (d) पूर्णाङ्केभ्यः गुणनं साहचर्यं भवति, अर्थात् केषाञ्चित् त्रयाणां a, b तथा च c पूर्णाङ्केभ्यः $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ भवति।
7. योगस्य एवं गुणनस्य अन्तर्गतः पूर्णाङ्कम् एकं गुणं दर्शयन्ति, यः वितरणगुणः इति कथ्यते, अर्थात् केषाञ्चित् त्रयाणां a, b तथा च c पूर्णाङ्केभ्यः, $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ भवति।
8 योगस्य एवं गुणनस्य अन्तर्गतः क्रमविनिमेयतायाः, सहचारितायाः वितरणतायाः च गुणाः अस्माकं परिकलनं सरलं कुर्वन्ति।
9. अस्माभिः एतत् अपि अधिगतं यत् कथं पूर्णाङ्कानां भागः क्रियते।वयं प्राप्तवन्तः यत्
   (a) यदा एकं धनात्मकं पूर्णाङ्कम् एकेन ऋणात्मकपूर्णाङ्केन विभज्यते अथवा यदा एकम् ऋणात्मकं पूर्णाङ्कम् एकेन धनात्मकपूर्णाङ्केन विभज्यते तु प्राप्तं भागफलम् एकम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कं भवति।
   (b) एकम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कम् अपरेण ऋणात्मकपूर्णाङ्केन भागे सति प्राप्तं भागफलम् एकं धनात्मकपूर्णाङ्कं भवति।
10. कस्मैचित् अपि a पूर्णाङ्काय, वयं प्राप्नुमः यत्
   (a) $a \div 0$ परिभाषितं नास्ति।
   (b) $a \div 1 = a$ अस्ति।

भिन्नम् एवं दशमलवः

अध्यायः 2

2.1 भूमिका

भवन्तः गतकक्ष्यासु भिन्न-दशमलवयोः विषये अध्ययनं कृतवन्तः। भिन्नानाम् अध्ययने वयम् उचितभिन्नम्, विषमभिन्नं, मिश्रितभिन्नं, भिन्नानां च योगः व्यकलनं च इत्येषां विषये अपि चर्चां कृतवन्तः। वयं भिन्नानां तुलना, तुल्यभिन्नं, भिन्नानां संख्यारेखायां निरूपणं, भिन्नानां क्रमबद्धीकरणं च इत्यादिविषयेषु अपि पठितवन्तः।

दशमलवानाम् अध्ययने वयं, तेषां तुलनां, संख्यारेखायां तेषां निरूपणं, तेषां योगः एवं व्यकलनम् इत्यादिविषयेषु अपि चर्चां कृतवन्तः।

अधुना वयं भिन्नानाम् एवं दशमलवानां गुणन-विभजनयोः विषये अध्ययनं करिष्यामः।

2.2 भिन्नानां विषये भवताम् अध्ययनं कियद्-भद्रतया अस्ति ?

उचितभिन्नं नाम तत् भिन्नं भवति यत् सम्पूर्णस्य एकं भागं निरूपयति। किम् $\frac{7}{4}$ इति एकम् उचितभिन्नम् अस्ति ? अस्य अंश-हरयोः मध्ये कः दीर्घतरः वर्तते ?

विषमभिन्नं, सम्पूर्णस्य एवम् उचितस्य भिन्नस्य संयोजनं भवति। किम् $\frac{7}{4}$ इति एकं विषमभिन्नं वर्तते ?

अत्र अंश-हरयोः कः दीर्घतरः वर्तते ?

$\frac{7}{4}$ इति विषमभिन्नं $1\frac{3}{4}$ इति रूपेण अपि लेखितुं शक्यते। एतत् एकं मिश्रितभिन्नम् अस्ति।

किं भवन्तः उचित-विषम-मिश्रितेषु भिन्नेषु एकैकस्य पञ्च उदाहरणानि लेखितुम् अर्हन्ति ?

उदाहरणम् 1 $\frac{3}{5}$ इत्यस्य पञ्च तुल्यानि भिन्नानि लिखन्तु।

समाधानम् $\frac{3}{5}$ इत्यस्य तुल्यभिन्नेषु एकम् $\frac{3}{5} = \frac{3\times2}{5\times2} = \frac{6}{10}$ इति अस्ति।

अन्यानि चत्वारि भिन्नानि भवन्तः स्वयं ज्ञातुं प्रयासं कुर्वन्तु।

उदाहरणम् 2 रमेशेन एकस्याः प्रश्नावल्याः $\frac{2}{7}$ भागः साधितः अपरन्तु सीमा तस्याः एव प्रश्नावल्याः

$\frac{4}{5}$ भागं साधितवती। ज्ञायतां तयोर्मध्ये केन न्यूनः भागः साधितः ?

समाधानम् एतत् ज्ञातुं यत् केन प्रश्नावल्याः न्यूनः भागः साधितः, आगच्छन्तु $\frac{2}{7}$ तथा च $\frac{4}{5}$ इत्येतयोर्मध्ये तुलनां कुर्मः।

एते भिन्ने समानभिन्नयोः परिवर्त्य वयं

$\frac{2}{7} = \frac{10}{35}, \frac{4}{5} = \frac{28}{35}$ इति प्राप्नुमः।

यतोहि $10<28$, अतः $\frac{10}{35} < \frac{28}{35}$.

अतः $\frac{2}{7} < \frac{4}{5}$.

रमेशेन सीमायाः अपेक्षया प्रश्नावल्याः न्यूनः भागः साधितः।

उदाहरणम् 3 समीरा $3\frac{1}{2}$ किलोग्रामपरिमित-सेवफलानि $4\frac{3}{4}$ किलोग्रामपरिमितानि च नारङ्गफलानि क्रीतवती। समीरया क्रीतानां फलानां सम्पूर्णः भारः कियान् वर्तते ?

समाधानम् फलानां सम्पूर्णः भारः $= 3\frac{1}{2} + 4\frac{3}{4}$ कि.ग्रा.

$= \frac{7}{2} + \frac{19}{4}$ कि.ग्रा. $\frac{14}{4} + \frac{19}{4}$ कि.ग्रा.

$= \frac{33}{4}$ कि.ग्रा. $= 8\frac{1}{4}$ कि.ग्रा. इति वर्तते।

उदाहरणम् 4 सुमनवर्या प्रतिदिनं $5\frac{2}{3}$ होरापर्यन्तं पठति। सा स्वकीये अस्मिन् समये $2\frac{4}{5}$ होराः यावत् गणितं विज्ञानं च पठति। सा अन्यविषयेभ्यः कियन्तं कालं ददाति ?

समाधानम् सुमनवर्यायाः अध्ययनस्य सम्पूर्णः समयः $= 5\frac{2}{3}$ होरा $= \frac{17}{3}$ होराः विज्ञान-गणितयोः अध्ययने नियोजितः कालः $= 2\frac{4}{5}$ होराः $= \frac{14}{5}$ होराः।

अतः तया अन्यविषयेषु नियोजितः कालः $= \frac{17}{3} - \frac{14}{5}$ होराः

$$= \frac{17\times5}{15} - \frac{14\times3}{15} \text{ होराः}$$

$$= \frac{85-42}{15} \text{ होराः} = \frac{43}{15} \text{ होराः} = 2\frac{13}{15} \text{ होराः ।}$$

प्रश्नावली 2.1

1. समाधानं क्रियताम् :

   (i) $2-\frac{3}{5}$ (ii) $4+\frac{7}{8}$ (iii) $\frac{3}{5}+\frac{2}{7}$ (iv) $\frac{9}{11}-\frac{4}{15}$

   (v) $\frac{7}{10}+\frac{2}{5}+\frac{3}{2}$ (vi) $2\frac{2}{3}+3\frac{1}{2}$ (vii) $8\frac{1}{2}-3\frac{5}{8}$

2. निम्नलिखितानि अवरोहिक्रमे लिखन्तु :

   (i) $\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, \frac{8}{21}$ (ii) $\frac{1}{5}, \frac{3}{7}, \frac{7}{10}$

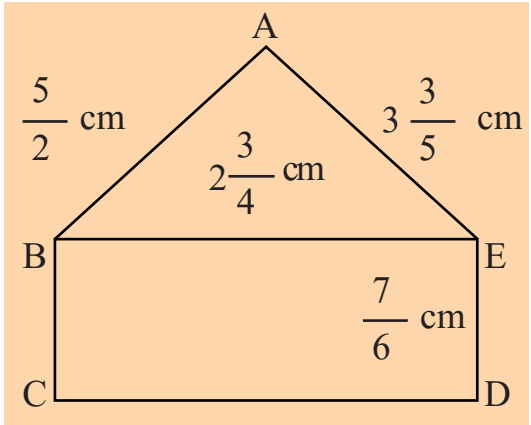
3. एकस्मिन् 'एन्द्रजालिक-वर्गे' प्रत्येकं पङ्क्तेः प्रत्येकं स्तम्भस्य प्रत्येकं विकर्णस्य च संख्यानां योगः समानः भवति। किम् एषः एकः एन्द्रजालिक-वर्गः वर्तते ?

$\frac{4}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{2}{11}$
$\frac{3}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{7}{11}$
$\frac{8}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{6}{11}$

प्रथमपङ्क्तेः अनुदिशम् $\frac{4}{11}+\frac{9}{11}+\frac{2}{11}=\frac{15}{11}$

4. एकस्य आयताकार-कर्गदस्य दैर्घ्यं (लम्बाई) $12\frac{1}{2}$ सेण्टीमीटरपरिमितं तथा च प्रस्थता (चौडाई) $10\frac{2}{3}$ सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति। कर्गदस्य परिमाणम् अवज्ञायताम्।

5. प्रदत्तायाम् आकृत्यां (i)△ABE इति त्रिभुजस्य (ii) BCDE इति आयतस्य परिमाणम् ज्ञायताम्।
   एतयोः कस्य परिमाणम् अधिकं वर्तते ?



6. सलीलः एकं चित्रम् एकस्मिन् काष्ठालवने (चौखट) जटयितुम् इच्छति।

   चित्रं $7\frac{3}{5}$ सेण्टीमीटरपरिमितं प्रस्थम् अस्ति । काष्ठालवने

उचितरूपेण जटनाय चित्रस्य प्रस्थता $7\frac{3}{10}$ इत्यतः अधिका न भवितुं शक्नोति।
चित्रे कियत् कर्तनम् आवश्यकं वर्तते ?

7. रीतुः एकस्य सेवफलस्य $\frac{3}{5}$ भागं खादितवती शेषं भागं तस्याः भ्राता सोमुः अखादत्।

सोमुः सेवफलस्य कियन्तं भागम् अखादत् ? कस्य भागः अधिकः आसीत् ? कियान् अधिकः आसीत् ?

8. माईकलः एकस्मिन् चित्रे रङ्गपूरणस्य कार्यं $\frac{7}{12}$ होराभिः समाप्तवान्। वैभवः तस्मिन् एव चित्रे रङ्गपूरणस्य कार्यं $\frac{3}{4}$ होराभिः समाप्तवान्। कः अधिकं कालं यावत् कार्यं कृतवान् ?

एषः समयः कियान् अधिकः आसीत् ?

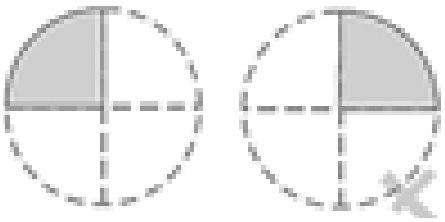
2.3 भिन्नानां गुणनम्

भवन्तः जानन्ति यत् एकस्य आयतस्य क्षेत्रफलं कथं ज्ञायते। एतत् दैर्घ्य-प्रस्थतयोः गुणनेन समं भवति अर्थात् दैर्घ्य × प्रस्थता = क्षेत्रफलम् इति। (लम्बाई×चौडाई = क्षेत्रफलम् इति) यदि कस्यचित् आयतस्य दैर्घ्यं 7 सेण्टीमीटरपरिमितं तथा च प्रस्थता 4 सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति।
तदा अस्य क्षेत्रफलं किं भविष्यति ? अस्य क्षेत्रफलं $7\times4=28\text{cm}^2$ इति भविष्यति।
यदि आयतस्य दैर्घ्यं $7\frac{1}{2}$ सेण्टीमीटरपरिमितं तथा च प्रस्थता $3\frac{1}{2}$ सेण्टीमीटरपरिमिता तदा अस्य क्षेत्रफलं किं भविष्यति ? भवन्तः कथयिष्यन्ति यत् $7\frac{1}{2}\times 3\frac{1}{2}=\frac{15}{2}\times\frac{7}{2}\text{ cm}^2$ इति अस्ति।

$\frac{15}{2}$ एवं $\frac{7}{2}$ इति संख्ये भिन्नरूपेण स्तः। प्रदत्तस्य आयतस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुम् एतत् ज्ञानम् आवश्यकम् अस्ति यत् भिन्नानां गुणनं कथं भवेत्। अधुना वयम् एतद् अधिगमिष्यामः।

2.3.1 एकस्य भिन्नस्य पूर्णसंख्यया सह गुणनम्

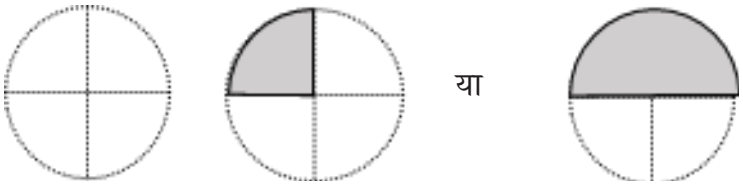
वामतः 2.1 आकृतौ प्रदत्तं चित्रं पश्यन्तु प्रत्येकं छायाङ्कितः भागः वृतस्य $\frac{1}{4}$ भागः अस्ति। द्वौ



आकृतिः 2.1

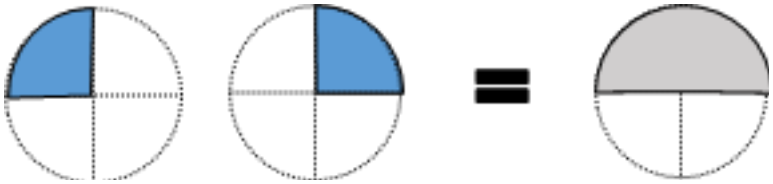
छायाङ्कितौ भागौ मिलित्वा वृत्तस्य कियन्तं भागं निरूपयिष्यतः? एतौ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=2\times\frac{1}{4}$ इति भागं निरूपयिष्यतः।

द्वौ छायाङ्कितौ भागौ संयोज्य वयम् 2.2 इति आकृतिं प्राप्नुमः। 2.2 इत्यस्याः आकृतेः छायाङ्कितः भागः वृत्तस्य कतमं भागं निरूपयिष्यति ? एषः वृत्तस्य $\frac{2}{4}$ इति भागं निरूपयति।



आकृतिः 2.2

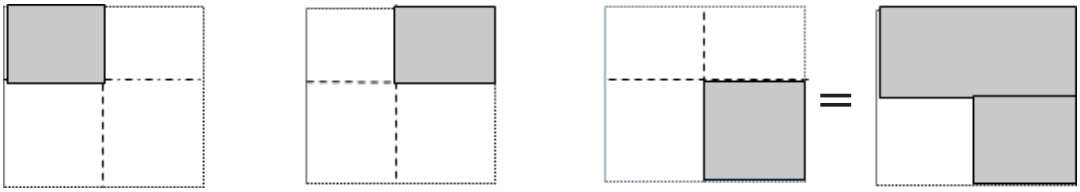
एवं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् 2.1 इत्यस्याः आकृतेः उभे छायाङ्कित-खण्डे मिलित्वा, 2.2 आकृतेः छायाङ्कितभागस्य समाने स्तः अर्थात् वयं 2.3 इति आकृतिं प्राप्नुमः।



आकृतिः 2.3

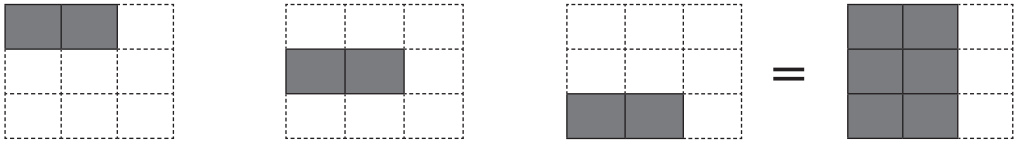
अथवा $2\times\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$

किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् 2.4 आकृतिः किं निरूपयिष्यति ?



आकृतिः 2.4

एवं च आकृतिः 2.5 किं निरूपयिष्यति ?



आकृतिः 2.5

आगच्छन्तु अधुना वयम् $3\times\frac{1}{2}$ इति जानीम -

$$3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

वयम् एतदपि प्राप्नुमः यत् $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+1+1}{2}=\frac{3\times1}{2}=\frac{3}{2}$

अतः $3\times\frac{1}{2}=\frac{3\times1}{2}=\frac{3}{2}$

अनेन प्रकारेण $\frac{2}{3}\times5=\frac{2\times5}{3}=?$

किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति $3\times\frac{2}{7}$ = ? $4\times\frac{3}{5}$ = ?

एतावता वयं यावतां भिन्नानां विषये चर्चां कृतवन्तः स्मः अर्थात् $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{7}$ एवं $\frac{3}{5}$ तानि सर्वाणि उचितभिन्नानि सन्ति।

विषमभिन्नेभ्यः अस्माकं पार्श्वे अस्ति :

$$2\times\frac{5}{3}=\frac{2\times5}{3}=\frac{10}{3}$$

प्रयासं कुर्वन्तु : $3\times\frac{8}{7}$ = ? $4\times\frac{7}{5}$ = ?

अतः काञ्चित् पूर्णसंख्यां केनचित् उचितेन अथवा विषमेण भिन्नेन गुणीकर्तुं वयं पूर्णसंख्यां भिन्नस्य अंशेन सह गुणयामः तथा च भिन्नस्य हरः अपरिवर्तितः अथवा समानः एव वर्तते।

प्रयासं कुर्वन्तु

1. ज्ञायताम् (a) $\frac{2}{7}\times3$ (b) $\frac{9}{7}\times6$ (c) $3\times\frac{1}{8}$ (d) $\frac{13}{11}\times6$

   यदि गुणनफलम् एकं विषमभिन्नम् अस्ति तर्हि एतद् मिश्रितभिन्न-रूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु।

2. $2\times\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$ सचित्रं निरूपयताम्।

प्रयासं कुर्वन्तु

ज्ञायताम्

(i) $5\times2\frac{3}{7}$

(ii) $1\frac{4}{9}\times6$

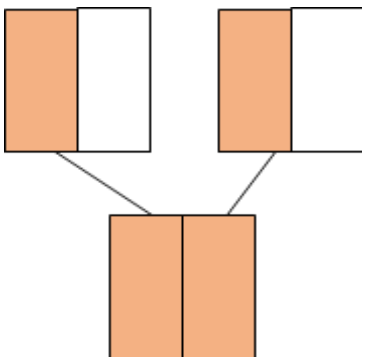
किमपि मिश्रित-भिन्नम् एकया पूर्णसंख्यया सह गुणीकर्तुं सर्वप्रथमं मिश्रितभिन्नं विषमभिन्न-रूपेण परिवर्तयन्तु ततः च गुणां कुर्वन्तु।

अतः $3\times2\frac{5}{7}=3\times\frac{19}{7}=\frac{57}{7}=8\frac{1}{7}$

अनेन प्रकारेण $2\times4\frac{2}{5}=2\times\frac{22}{5}$ = ?

भिन्नं प्रचालक-गुणनरूपेण

2.6 इति आकृतिं पश्यन्तु । द्वौ वर्गौ पूर्णतया समरूपौ स्तः। प्रत्येकं छायाङ्कितः खण्डः एकस्य अर्धं $\frac{1}{2}$ भागं निरूपयति।



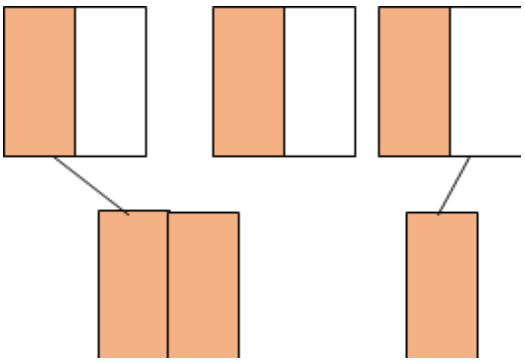
आकृतिः 2.6

अतः द्वौ छायाङ्कितौ खण्डौ मिलित्वा द्वयोः $\frac{1}{2}$ भागं निरूपयतः।

द्वौ छायाङ्कितौ $\frac{1}{2}$ भागौ संयोजन्तु । एतत् एकं भागं निरूपयति । इत्थं वयं कथयामः यत् द्वयस्य अर्धभागः $\frac{1}{2}$ एकः भागः अस्ति । वयम् एतत् $\frac{1}{2}\times 2 = 1$ इति रूपेण अपि प्राप्तुं शक्नुमः ।

अतः द्वयस्य $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\times 2 = 1$

2.7 आकृतेः समरूप-वर्गान् पश्यन्तु ।



आकृतिः 2.7

प्रत्येकं छायाङ्कितः खण्डः एकस्य $\frac{1}{2}$ भागं निरूपयति । अतः त्रयः छायाङ्किताः खण्डाः मिलित्वा त्रयस्य $\frac{1}{2}$ भागं निरूपयन्ति ।

त्रीन् छायाङ्कित-भागान् संयोजन्तु ।

एतत् $1\frac{1}{2}$ अर्थात् $\frac{3}{2}$ भागं निरूपयति ।

अतः त्रयस्य $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ अस्ति । अन्यच्च $\frac{1}{2}\times 3 = \frac{3}{2}$

अतः त्रयस्य $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\times 3 = \frac{3}{2}$

एवं वयं पश्यामः यत् 'का' इति गुणनं निरूपयति ।

फरीदायाः पार्श्वे 20 काचगुलिकाः सन्ति । रेशमायाः पार्श्वे फरीदायाः काचगुलिकानां $\frac{1}{5}$ अस्ति । रेशमायाः पार्श्वे कति काचगुलिकाः सन्ति ? यथा वयं जानीमः यत् 'का' इति गुणनं दर्शयति। अतः रेशमायाः पार्श्वे $\frac{1}{5}\times 20$ = चतस्रः (4) काचगुलिकाः सन्ति ।

एवमेव वयं प्राप्नुमः यत् 16 इत्यस्य $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\times 16 = \frac{16}{2} = 8$ अस्ति ।

प्रयासं कुर्वन्तु

किं भवन्तः वक्तुम् अर्हन्ति यत् (i) 10 का $\frac{1}{2}$ (ii) 16 का $\frac{1}{4}$ (iii) 25 का $\frac{2}{5}$ किम् अस्ति ?

उदाहरणम् 5 40 विद्यार्थिनाम् एकस्यां कक्षायां समस्त-विद्यार्थिनां संख्यायाः $\frac{1}{5}$ भागः आङ्ग्लं पठितुम् इच्छति, समग्रसंख्यायाः $\frac{2}{5}$ भागः गणितं पठितुम् इच्छति शेषविद्यार्थिनः विज्ञानं पठितुम् इच्छन्ति ।

(i) कति विद्यार्थिनः आङ्ग्लं पठितुम् इच्छन्ति ?

(ii) कति विद्यार्थिनः गणितं पठितुम् इच्छन्ति ?

(iii) सर्वेषां विद्यार्थिनां संख्यायाः कियान् भागः विज्ञानं पठितुम् इच्छति ?

समाधानम् कक्ष्यायां सर्वेषां विद्यार्थिनां संख्या = 40

(i) एतेषु समग्रसंख्यायाः $\frac{1}{5}$ भागः आङ्ग्लं पठितुम् इच्छति।

अतः आङ्ग्लं पठितुकामानां 40 इत्यस्य $\frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times 40 = 8$ अस्ति।

(ii) स्वयं प्रयासं कुर्वन्तु।

(iii) आङ्ग्लम् एवं गणितं पठितुकामानां विद्यार्थिनां संख्या = 8+16 = 24 अस्ति। अतः विज्ञानं पठितुकामानां विद्यार्थिनां संख्या = 40 – 24 = 16 अस्ति।

अतः वाञ्छितभिन्नम् $\frac{16}{40}$ वर्तते।

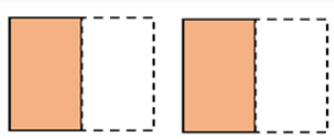
प्रश्नावली 2.2

1. (a) तः(d) पर्यन्तं रेखाचित्रेषु निम्नलिखितं केन दर्शितं भवति :

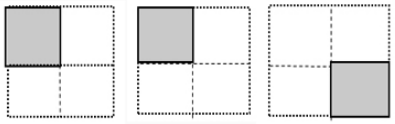
(i) $2 \times \frac{1}{5}$ (ii) $2 \times \frac{1}{2}$ (iii) $3 \times \frac{2}{3}$ (iv) $3 \times \frac{1}{4}$

(a)

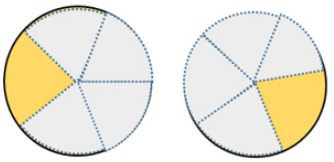
(b)



(c)

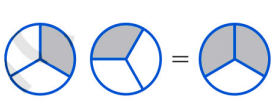


(d)

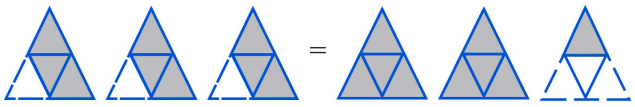


2. (a) तः (c) पर्यन्तं कानिचन चित्राणि प्रदत्तानि सन्ति। कथयन्तु तेषु किं निम्नलिखितं दर्शयति :

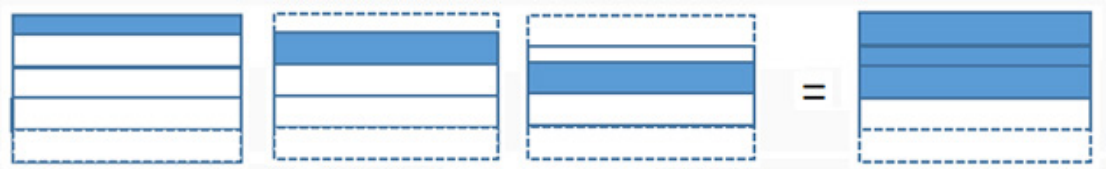
(i) $3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ (ii) $2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (iii) $3 \times \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}$



(a)



(b)



(c)

3. गुणीकृत्य न्यूनतमरूपेण लिखन्तु तथा च मिश्रितभिन्नेरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु :

(i) $7\times\frac{3}{5}$ (ii) $4\times\frac{1}{3}$ (iii) $2\times\frac{6}{7}$ (iv) $5\times\frac{2}{9}$ (v) $\frac{2}{3}\times4$

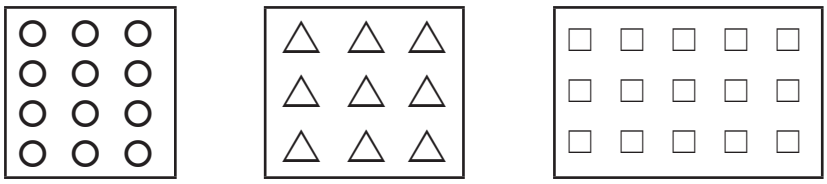
(vi) $\frac{5}{2}\times6$ (vii) $11\times\frac{4}{7}$ (viii) $20\times\frac{4}{5}$ (ix) $13\times\frac{1}{3}$ (x) $15\times\frac{3}{5}$

4. छायाङ्कितं कुर्वन्तु :

(i) (a) इति मञ्जूषायाः वृत्तानाम् $\frac{1}{2}$ भागम्

(ii) (b) इति मञ्जूषायाः त्रिभुजानां $\frac{2}{3}$ भागम्

(iii) (c) मञ्जूषायाः वर्गाणाम् $\frac{3}{5}$ भागम्



(a) (b) (c)

5. ज्ञायताम् -

(a) (i) चतुर्विंशत्याः $\frac{1}{2}$ (ii) षट्चत्वारिंशदः $\frac{1}{2}$

(b) (i) अष्टादशानाम् $\frac{2}{3}$ (ii) सप्तविंशत्याः $\frac{2}{3}$

(c) (i) षोडशानाम् $\frac{3}{4}$ (ii) षट्त्रिंशदः $\frac{3}{4}$

(d) (i) विंशत्याः $\frac{4}{5}$ (ii) पञ्चत्रिंशदः $\frac{4}{5}$

6. गुणां कुर्वन्तु अथ च मिश्रितभिन्नरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु :

(a) $3\times5\frac{1}{5}$ (b) $5\times6\frac{3}{4}$ (c) $7\times2\frac{1}{4}$

(d) $4\times6\frac{1}{3}$ (e) $3\frac{1}{4}\times6$ (f) $3\frac{2}{5}\times8$

7. ज्ञायताम् :

(a) (i) $2\frac{3}{4}$ इत्यस्य $\frac{1}{2}$ (ii) $4\frac{2}{9}$ इत्यस्य $\frac{1}{2}$

(b) (i) $3\frac{5}{6}$ इत्यस्य $\frac{5}{8}$ (ii) $9\frac{2}{3}$ इत्यस्य $\frac{5}{8}$

8. विद्या प्रतापः च भ्रमितुं गतवन्तौ । तयोः माता ताभ्यां पञ्चलीटरपरिमाणाम् एकां जलकूपीम् अयच्छत् । विद्यया समग्रजलस्य $\frac{2}{5}$ भागः प्रयुक्तः । अवशिष्टं जलं प्रतापः अपिबत् ।

(a) विद्या कियत् जलम् अपिबत् ?

(b) प्रतापः जलस्य सम्पूर्णमात्रायाः कियन्तं भागम् अपिबत् ?

2.3.2 भिन्नस्य भिन्नेन गुणनम्

फरीदायाः पार्श्वे 9 सेण्टीमीटरपरिमिता एका दीर्घा रिबन-पट्टिका आसीत्। सा एतां पट्टिकां समानेषु चतुर्षु भागेषु अकर्तयत् । सा एतत् कथं कृतवती ? सा पट्टिकां द्विवारं वक्रीकृतवती । प्रत्येकं भागः सम्पूर्णलम्बमानं किं भिन्नं निरूपयिष्यति । प्रत्येकं भागः पट्टिकायाः $\frac{9}{4}$ तमः भागः भविष्यति । सा एतेषु एकं भागं स्वीकृतवती एतं च भागम् एकवारं वक्रीकुर्वती द्वयोः समान-भागयोः विभक्तवती । एतयोः द्वयोः खण्डयोः एकः खण्डः किं निरूपयिष्यति ? एषः $\frac{9}{4}$ इत्यस्य $\frac{1}{2}$ अर्थात् $\frac{1}{2} \times \frac{9}{4}$ भागं निरूपयिष्यति। आगच्छन्तु पश्यामः यत् द्वयोः भिन्नयोःगुणनफलं यथा $\frac{1}{2} \times \frac{9}{4}$ इति कथं ज्ञायते ?

एतत् ज्ञातुं सर्वप्रथमम् आगच्छन्तु वयं $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ सदृशं गुणनफलं ज्ञातुम् अधिगच्छामः।

आकृतिः2.8

(a) कस्यचित् सम्पूर्णभागस्य $\frac{1}{3}$ भागं वयं कथं जानीमः ? वयं सम्पूर्णं समानेषु त्रिषु भागेषु विभाजयामः। त्रिषु प्रत्येकं भागः सम्पूर्णस्य $\frac{1}{3}$ तमं भागं निरूपयति । एषु त्रिषु एकम् अंशं स्वीकृत्य छायाङ्कितं कुर्वन्तु यथा 2.8 आकृत्यां दर्शितम् अस्ति ।

आकृतिः 2.9

(b) भवन्तः एतस्य छायाङ्कित-भागस्य $\frac{1}{2}$ इति भागं कथं ज्ञास्यन्ति ? इमं छायाङ्कितं तृतीयांशम् ($\frac{1}{3}$ भागं) द्वयोः समानभागयोः विभक्तीकुर्वन्तु । अनयोः द्वयोः भागयोः प्रत्येकं भागः तृतीयांशस्य ($\frac{1}{3}$ भागस्य) $\frac{1}{2}$ इति भागं निरूपयति । अर्थात् $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ इति भागं निरूपयति (आकृतिः 2.9) ।

एतयोः द्वयोः भागयोः एकं भागं बहिः निष्कासयन्तु अस्मै च 'A' इति नाम ददतु।

'A' $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ इति निरूपयति।

'A' इति सम्पूर्णस्य कियान् भागः वर्तते ? एतत् ज्ञातुं $\frac{1}{3}$ शेषभागेषु प्रत्येकं द्वयोः समानभागयोः विभक्तीकुर्वन्तु। अधुना भवतां पार्श्वे एतादृशाः कियन्तः भागाः सन्ति ? एतादृशाः षड् भागाः सन्ति। एतेषु 'A' एकः भागः अस्ति।

अतः 'A' इति सम्पूर्णस्य $\frac{1}{6}$ भागः अस्ति। अनेन प्रकारेण $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

अस्माभिः कथम् एतत् निर्णीतं यत् 'A' सम्पूर्णस्य $\frac{1}{6}$ भागः अस्ति ? सम्पूर्णं षड्षु भागेषु (2 × 3 = 6) विभाजितम् अस्ति तथा च एकः भागः एभ्यः भागेभ्यः बहिः निष्कासितः।

अतः $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1\times1}{2\times3}$

अथवा $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1\times1}{2\times3}$

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ इत्यस्य मानम् अपि एवमेव ज्ञातुं शक्यते। सम्पूर्णं द्वयोः समानभागयोः विभक्तीकुर्वन्तु ततः परं च एतयोः कञ्चित् एकं भागं त्रिषु समानभागेषु विभक्तीकुर्वन्तु। एभ्यः एकं भागं स्वीकुर्वन्तु एतत् $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ अर्थात् षष्ठांशम् $\frac{1}{6}$ निरूपयिष्यति।

अतः यथा पूर्वमेव चर्चा कृता अस्ति यत् $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = \frac{1\times1}{3\times2}$

अतः $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ एवञ्च $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$ एवञ्च $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$ इति ज्ञायतां निरीक्षणं च

प्रयासं कुर्वन्तु

निम्नलिखित-वर्गान् पूरयन्तु :

(i) $1/2\times1/7 = (1\times1)/(2\times7) =$ ☐ (ii) $1/5\times1/7 =$ ☐ = ☐

(iii) $1/7\times1/2 =$ ☐ = ☐ (iv) $1/7\times1/5 =$ ☐ = ☐

विधीयतां यत् भवन्तः $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}$ इति प्राप्नुवन्ति ?

उदाहरणम् 6 सुशान्तः एकया होरया कस्यचित् पुस्तकस्य $\frac{1}{3}$ भागं पठति । सः $2\frac{1}{5}$ होरासु पुस्तकस्य कियन्तं भागं पठिष्यति?

समाधानम् सुशान्तद्वारा एकया होरया कस्यचित् पुस्तकस्य पठितः भागः $=\frac{1}{3}$,

अतः तेन $2\frac{1}{5}$ होराभिः पुस्तकस्य पठितः भागः $= 2\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}$

$= \frac{11}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{11\times1}{5\times3}=\frac{11}{15}$ इति

अधुना आगच्छन्तु वयं $\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}$ ज्ञातं कुर्मः । वयं जानीमः यत् $\frac{5}{3}=\frac{1}{3}\times5$

अतः $\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times5=\frac{1}{6}\times5=\frac{5}{6}$

सममेव $\frac{5}{6}=\frac{1\times5}{2\times3}$ । अतः $\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}=\frac{1\times5}{2\times3}=\frac{5}{6}$

एतत् अधोलिखिताकृतिषु अपि दर्शितम् अस्ति । पञ्चसु समानाकारेषु (आकृतिः2.10) वृत्तेषु प्रत्येकं पञ्चानां समरूपवृत्तानां भागः अस्ति । एतादृशम् एकम् आकारं स्वीकुर्वन्तु । एनम् आकारं प्राप्तुं सर्वप्रथमं वयं वृत्तं त्रिषु समानभागेषु विभक्तीकुर्मः । अग्रे अपि एषु त्रिषु भागेषु प्रत्येकं द्वयोः समानभागयोः विभक्तीकुर्मः । अस्य एकः भागः सः आकारः अस्ति यस्य वयं चर्चां कृतवन्तः । एषः किं निरूपयिष्यति ? एषः $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ इति निरूपयिष्यति । एतादृशाः भागाः मिलित्वा आहत्य $5\times\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ भविष्यन्ति ।

आकृतिः 2.10

अनेन प्रकारेण $\frac{3}{5}\times\frac{1}{7}=\frac{3\times1}{5\times7}=\frac{3}{35}$

अनेन प्रकारेण वयं $\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}$ इत्येतं $\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}=\frac{2\times7}{3\times5}$

प्रयासं कुर्वन्तु

ज्ञायताम् $\frac{7}{3}\times\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}$

$= \frac{14}{15}$ इति रूपेण ज्ञातुं शक्नुमः।

अनेन प्रकारेण वयं प्राप्नुमः यत् वयं द्वयोः भिन्नयोः गुणनं

$\frac{\text{(अंशानां गुणनफलम्)}}{\text{(हराणां गुणनफलम्)}}$ इति रूपेण कुर्मः ।

प्रयासं कुर्वन्तु

ज्ञायताम् $\frac{8}{3} \times \frac{4}{7}$; $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$

गुणनफलस्य मानम्

भवन्तः दृष्टवन्तः यत् द्वयोः पूर्णसंख्ययोः गुणनफलं तयोः संख्ययोः प्रत्येकं संख्यातः अधिकं भवति ।

उदाहरणार्थम् $3 \times 4 = 12$ एवञ्च $12 > 4, 12 > 3$.

यदा वयं द्वयोःभिन्नयोः गुणनं कुर्मः तदा गुणनफलस्य माने किं परिवर्तनं संजायते ?

आगच्छन्तु सर्वप्रथमं वयं द्वयोः उचितभिन्नयोः गुणनफलस्य चर्चां कुर्मः । वयं लभामहे ।

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$	$\frac{8}{15} < \frac{2}{3}$, $\frac{8}{15} < \frac{4}{5}$	गुणनफलं प्रत्येकं भिन्नात् न्यूनम् अस्ति।
$\frac{1}{5} \times \frac{2}{7} =$	....., ...	.....
$\frac{3}{5} \times \frac{}{8} = \frac{21}{40}$	....., ...	.....
$\frac{2}{} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{45}$	....., ...	.....

वयं प्राप्नुमः यत् यदा द्वयोः भिन्नयोः गुणनं क्रियते तदा गुणनफलं द्वाभ्यां भिन्नाभ्यां न्यूनं भवति । अर्थात् द्वयोः उचितभिन्नयोः गुणनफलस्य मानं द्वयोः भिन्नयोः प्रत्येकं भिन्नतः लघु भवति । अन्यानि पञ्चोदाहरणानि कल्पयित्वा अस्य परीक्षणं कुर्वन्तु ।

आगच्छन्तु अधुना वयं द्वे विषमभिन्ने गुणयामः।

$\frac{7}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{36}{6}$	$\frac{35}{6} > \frac{7}{3}$, $\frac{35}{6} > \frac{5}{2}$	गुणनफलं प्रत्येकं भिन्नात् अधिकम् अस्ति।
$\frac{6}{5} \times \frac{}{3} = \frac{24}{15}$	....., ...	.....
$\frac{9}{2} \times \frac{7}{} = \frac{63}{8}$	....., ...	.....
$\frac{3}{} \times \frac{8}{7} = \frac{24}{14}$	....., ...	.....

वयं लभामहे यत् द्वयोः विषमभिन्नयोः गुणनफलं तयोः प्रत्येकं भिन्नतः गुरू अस्ति । अथवा द्वयोः विषमभिन्नयोः गुणनफलस्य मानं तयोः प्रत्येकं भिन्नतः अधिकं भवति ।

एतादृशानि पञ्च उदाहरणानि रचयित्वा उपर्युक्तं कथनं प्रमाणीकुर्वन्तु ।

आगम्यताम् अधुना वयम् एकम् उचितम् एकं च विषमं भिन्नं गुणयामः ।

$\frac{2}{3}$ एवञ्च $\frac{7}{5}$ इति चिन्तयन्तु

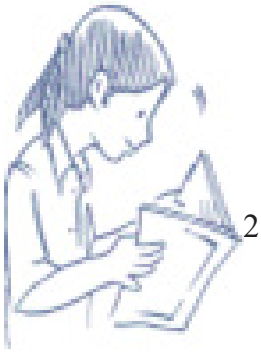
वयं प्राप्नुमः $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$ अत्र $\frac{14}{15} < \frac{7}{5}$ अन्यच्च $\frac{14}{15} > \frac{2}{3}$

लब्धं गुणनफलं गुणने प्रयुक्तात् विषमभिन्नात् न्यूनं वर्तते उचितात् भिन्नात् अधिकं वर्तते।

$\frac{6}{5} \times \frac{2}{7}$, $\frac{8}{3} \times \frac{4}{5}$ इत्यस्य कृतेऽपि गुणनफलस्य परीक्षणं कुर्वन्तु।

प्रश्नावली 2.3

1. ज्ञायताम् :



(i) (a) $\frac{1}{4}$ इत्यस्य $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{3}{5}$ इत्यस्य $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{4}{3}$ इत्यस्य $\frac{1}{4}$

(ii) (a) $\frac{2}{9}$ इत्यस्य $\frac{1}{7}$ (b) $\frac{6}{5}$ इत्यस्य $\frac{1}{7}$ (c) $\frac{3}{10}$ इत्यस्य $\frac{1}{7}$

2. गुणनं कुर्वन्तु न्यूनतम-रूपेण च परिवर्तनं कुर्वन्तु (यदि सम्भवति) :

(i) $\frac{2}{3} \times 2\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{2}{7} \times \frac{7}{9}$ (iii) $\frac{3}{8} \times \frac{6}{4}$ (iv) $\frac{9}{5} \times \frac{3}{5}$

(v) $\frac{1}{3} \times \frac{15}{8}$ (vi) $\frac{11}{2} \times \frac{3}{10}$ (vii) $\frac{4}{5} \times \frac{12}{7}$

3. निम्नलिखित-भिन्नानां गुणनं कुर्वन्तु :

(i) $\frac{2}{5} \times 5\frac{1}{4}$ (ii) $6\frac{2}{5} \times \frac{7}{9}$ (iii) $\frac{3}{2} \times 5\frac{1}{3}$

(iv) $\frac{5}{6} \times 2\frac{3}{7}$ (v) $3\frac{2}{5} \times \frac{4}{7}$ (vi) $2\frac{3}{5} \times 3$

(vii) $3\frac{4}{7} \times \frac{3}{5}$

4. कः दीर्घतरः वर्तते :

(i) $\frac{3}{4}$ इत्यस्य $\frac{2}{7}$ अथवा $\frac{5}{8}$ इत्यस्य $\frac{3}{5}$

(ii) $\frac{6}{7}$ इत्यस्य $\frac{1}{2}$ अथवा $\frac{3}{7}$ इत्यस्य $\frac{2}{3}$

5. सैली स्वकीयोद्याने चतुरः लघुपादपान् एकस्यां पङ्क्तौ रोपयति। द्वयोः क्रमागतयोः लघुपादपयोः मध्यगतोऽन्तरालः $\frac{3}{4}$ मीटरपरिमितः अस्ति। प्रथम-अन्तिमपादपयोः मध्ये कियान् 'अन्तरालः'

अस्ति इति ज्ञायताम्।

6. लिपिका एकं पुस्तकं प्रतिदिनं $1\frac{3}{4}$ होरापर्यन्तं पठति। सा समग्रपुस्तकं 6 दिनेषु पठति। सा तत् पुस्तकम् आहत्य कियता कालेन पठितवती ?

7. एकं कारयानं 1 लीटरपरिमितपैट्रोल-तैलेन 16 किलोमीटरगत्या धावति। $2\frac{3}{4}$ लीटरपरिमितपैट्रोल-तैलेन एतत् कारयानं कियद् दूरं गमिष्यति?

8. (a) (i) मञ्जूषायां $\square$ संख्यां लिखन्तु येन $\frac{2}{3} \times \square = \frac{10}{30}$।

(ii) मञ्जूषायां $\square$ प्राप्तसंख्यायाः न्यूनतमं रूपं ---------- अस्ति।

(b) (i) मञ्जूषायां $\square$ संख्यां लिखन्तु येन $\frac{3}{5} \times \square = \frac{24}{75}$।

(ii) मञ्जूषायां $\square$ प्राप्तसंख्यायाः न्यूनतमं रूपं ---------- अस्ति।

2.4 भिन्नानां भागः

जॉनस्य पार्श्वे 6 सेण्टीमीटरपरिमितदीर्घा कर्गदस्य एका पट्टिका अस्ति। सः एतां पट्टिकां द्विसेण्टीमीटरपरिमितासु लघुपट्टिकासु कर्तयति। भवन्तः जानन्ति यत् सः $6 \div 2 = 3$ पट्टिकाः प्राप्स्यति। जॉनः षट्सेण्टीमीटरपरिमिताम् एकाम् अन्यां दीर्घाम् एकाम् अन्यां पट्टिकां $\frac{3}{2}$ सेण्टीमीटरपरिमितासु लघुपट्टिकासु कर्तयति। अधुना सः कति लघुपट्टिकाः प्राप्स्यति ? सः $6 \div \frac{3}{2}$ पट्टिकाः प्राप्स्यति।

एका $\frac{15}{2}$ सेण्टीमीटरपरिमितदीर्घा पट्टिका $\frac{3}{2}$ सेण्टीमीटरपरिमितासु लघुपट्टिकासु कर्तितुं शक्यते येन वयं $\frac{15}{2} \div \frac{3}{2}$ इति खण्डान् प्राप्स्यामः।

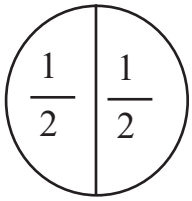
अतः अस्माकं कृते एतद् आवश्यकं वर्तते यत् एका पूर्णसंख्या केनचित् भिन्नेन अथवा एकं भिन्नम् अपरेण भिन्नेन विभाजितं भवेत्।

आगच्छन्तु वयं पश्यामः यत् एतत् कथं करणीयम् अस्ति।

2.4.1 भिन्नेन पूर्णसंख्यायाः भागः

आगम्यताम् $1 \div \frac{1}{2}$ इति जानीम -

वयं किमपि सम्पूर्णं केषुचित् समानभागेषु एतथर्थं विभाजयामः यत् प्रत्येकं भागः सम्पूर्णस्य अर्धः भवति। एतादृशानाम् अर्धभागानां संख्या $1 \div \frac{1}{2}$ इति भविष्यति। 2.11 आकृतिं पश्यन्तु। भवन्तः कति अर्धभागान् पश्यन्ति ? एतादृशौ द्वौ अर्ध-भागौ स्तः।

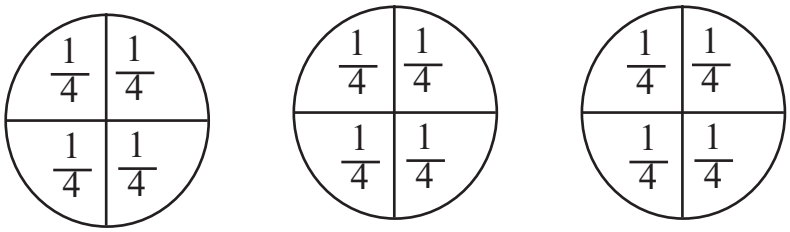


आकृतिः2.11

अतः $1 \div \frac{1}{2} = 2$ सममेव $1 \times \frac{2}{1} = 1 \times 2 = 2$

अतः $1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1}$

अनेनैव प्रकारेण, यदि $3 \div \frac{1}{4} = 3$ सम्पूर्णेषु प्रत्येकं समानेषु चतुर्थांशेषु ($\frac{1}{4}$ भागेषु) विभक्तीकुर्मः तर्हि $\frac{1}{4}$ भागानां संख्या = 12 (2.12 आकृतिः)



आकृतिः 2.12

एतदपि पश्यन्तु यत् $3 \times \frac{1}{4} = 3 \times 4 = 12$ एवमेव $3 \div \frac{1}{4} = 3 \times \frac{4}{1} = 12.$

अनेनैव प्रकारेण $3 \div \frac{1}{2}$ एवं च $3 \times \frac{2}{1}$ इति ज्ञायताम्।

भिन्नस्य व्युत्क्रमः

$\frac{1}{2}$ इत्यस्य अंशम् एवं च हरं परस्परं परिवर्त्य अथवा $\frac{1}{2}$ इत्यस्य प्रतिलोमं कृत्वा $\frac{2}{1}$ इति संख्या प्राप्तुं शक्यते। एवम् एव $\frac{1}{3}$ इत्यस्य प्रतिलोमं कृत्वा $\frac{3}{1}$ इति प्राप्यते।

आगच्छन्तु सर्वप्रथमम् एतादृशीनां संख्यानां प्रतिलोमस्य विषये चर्चयामः।

निम्नलिखितानि गुणनफलानि पश्यन्तु रिक्तस्थानानां च पूर्तिं कुर्वन्तु।

$7 \times \frac{1}{7} = 1$	$\frac{5}{4} \times \frac{4}{5} =$ .....
$\frac{1}{9} \times 9 =$	$\frac{2}{7} \times$ ..... $= 1$
$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{2\times3}{3\times2} = \frac{6}{6} = 1$	..... $\times \frac{5}{9} = 1$

पञ्च अन्यान् एतादृशान् युग्मान् गुणयन्तु।

शून्येतराः एतादृशाः संख्याः यासां परस्परं गुणनफलम् एकम् (1) अस्ति, ताः मिथः व्युत्क्रमाः कथ्यन्ते।

एवमेव $\frac{5}{9}$ इत्यस्य व्युत्क्रमः $\frac{9}{5}$ अस्ति $\frac{9}{5}$ इत्यस्य च $\frac{5}{9}$ वर्तते। $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{7}$ इत्यनयोः व्युत्क्रमः कः अस्ति ?

भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् $\frac{2}{3}$ इत्यस्य प्रतिलोमं कृत्वा अस्य व्युत्क्रमः प्राप्यते। अनेन प्रकारेण भवन्तः $\frac{3}{2}$ इति प्राप्नुवन्ति।

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

(i) किम् एकस्य उचितभिन्नस्य व्युत्क्रमः अपि उचितभिन्नम् एव भविष्यति ?

(ii) किम् एकस्य विषमभिन्नस्य व्युत्क्रमः अपि विषमभिन्नम् एव भविष्यति ?

अतः वयं वक्तुं शक्नुमः यत्

$1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1} = 1 \times$ ($\frac{1}{2}$ इत्यस्य व्युत्क्रमः)

$3 \div \frac{1}{4} = 3 \times \frac{4}{1} = 3 \times$ ($\frac{1}{4}$ इत्यस्य व्युत्क्रमः)

$3 \div \frac{1}{2} =$ ..... = ...

अतः $2 \div \frac{3}{4} = 2 \times$ ($\frac{3}{4}$ इत्यस्य व्युत्क्रमः) $= 2 \times \frac{4}{3}$

$5 \div \frac{2}{9} = 5 \times$ ..... $= 5 \times$ .....

अनेन प्रकारेण काञ्चित् पूर्णसंख्यां केनचिद् भिन्नेन विभक्तीकर्तुं तां पूर्णसंख्यां तस्य भिन्नस्य व्युत्क्रमेण गुणयन्तु।

यदा काञ्चित् पूर्णसंख्याम् केनचिद् मिश्रितभिन्नेन विभक्तीकुर्मः तदा

प्रयासं कुर्वन्तु

ज्ञायताम् (i) $7 \div \frac{2}{5}$ (ii) $6 \div \frac{4}{7}$ (iii) $2 \div \frac{8}{9}$

सर्वप्रथमं मिश्रितभिन्नस्य विषमभिन्नरूपेण परिवर्तनं कुर्मः ततः परम् अस्य समाधानं कुर्वन्तु।

इत्थम् $4 \div 2\frac{2}{5} = 4 \div \frac{12}{5} = ?$

सममेव $5 \div 3\frac{1}{3} = 3 \div \frac{10}{3} = ?$

प्रयासं कुर्वन्तु

ज्ञायताम् (i) $6 \div 5\frac{1}{3}$

(ii) $7 \div 2\frac{4}{7}$

2.4.2 पूर्णसङ्ख्यया भिन्नस्य भागः

- $\frac{3}{4} \div 3$ इत्यस्य मानं किं भविष्यति ?

पूर्वप्रेक्षणानि आधारीकृत्य वयं प्राप्नुमः $\frac{3}{4} \div 3 = \frac{3}{4} \div \frac{3}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

अतः $\frac{2}{3} \div 7 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{7} = ?$ $\frac{5}{7} \div 6$, $\frac{2}{7} \div 8$ इत्यस्य मानं किम् अस्ति ?

यदा मिश्रितभिन्नानि पूर्णसंख्यया विभक्तीकुर्मः तदा मिश्रितभिन्नस्य विषमभिन्नरूपेण परिवर्तनं कुर्मः ।

अर्थात् $2\frac{2}{3} \div 5 = \frac{8}{3} \div 5 =$ ....., $4\frac{2}{5} \div 3 =$.....=..... $2\frac{3}{5} \div 2 =$ .....=.....

2.4.3 एकभिन्नस्य अपरभिन्नेन भागः

अधुना वयम् $\frac{1}{3} \div \frac{5}{6}$ इति ज्ञातुं शक्नुमः।

$\frac{1}{3} \div \frac{5}{6} = \frac{1}{3} \times (\frac{5}{6}$ इत्यस्य व्युत्क्रमः$) = \frac{1}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{2}{5}$

इत्थमेव, $\frac{8}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{8}{5} \times (\frac{2}{3}$ इत्यस्य व्युत्क्रमः$) = ?$ एवं च $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = ?$

प्रयासं कुर्वन्तु

ज्ञायताम् (i) $\frac{3}{5} \div \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ (iii) $2\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ (iv) $5\frac{1}{6} \div \frac{9}{2}$

प्रश्नावली 2.4

1. ज्ञायताम्

(i) $12 \div \frac{3}{4}$ (ii) $14 \div \frac{5}{6}$ (iii) $8 \div \frac{7}{3}$

(iv) $4 \div \frac{8}{3}$ (v) $3 \div 2\frac{1}{3}$ (vi) $5 \div 3\frac{4}{7}$

2. निम्नलिखितभिन्नेषु प्रत्येकं भिन्नस्य व्युत्क्रमः ज्ञायताम् । व्युत्क्रमान् उचितभिन्न-विषमभिन्न-पूर्णसंख्यानां रूपेण वर्गीकुर्वन्तु।

(i) $\frac{3}{7}$ (ii) $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{9}{7}$ (iv) $\frac{6}{5}$

(v) $\frac{12}{7}$ (vi) $\frac{1}{8}$ (vii) $\frac{1}{11}$

3. ज्ञायताम् :

(i) $\frac{7}{3} \div 2$ (ii) $\frac{4}{9} \div 5$ (iii) $\frac{6}{13} \div 7$

(iv) $4\frac{1}{3} \div 3$ (v) $3\frac{1}{2} \div 4$ (vi) $4\frac{3}{7} \div 7$

4. ज्ञायताम् :

(i) $\frac{2}{5} \div \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{4}{9} \div \frac{2}{3}$ (iii) $\frac{3}{7} \div \frac{8}{7}$ (iv) $2\frac{1}{3} \div \frac{3}{5}$

(v) $3\frac{1}{2} \div \frac{8}{3}$ (vi) $\frac{2}{5} \div 1\frac{1}{2}$ (vii) $3\frac{1}{5} \div 1\frac{2}{3}$ (viii) $2\frac{1}{5} \div 1\frac{1}{5}$

2.5 दशमलवसंख्यानां विषये भवन्तः कियता सम्यग्-रूपेण पठितवन्तः सन्ति ?

भवन्तः गतकक्ष्यासु दशमलवसंख्यानां विषये अध्ययनं कृतवन्तः सन्ति। आगच्छन्तु अत्र वयं संक्षिप्तरूपेण आसां संख्यानां स्मरणं कुर्मः। निम्नलिखितसारणीं पश्यन्तु रिक्तस्थानानि च पूरयन्तु -

शतकम् (100)	दशकम् (10)	ऐककम् (1)	दशांशः $\frac{1}{10}$	शतांशः $\frac{1}{100}$	सहस्रांशः $\frac{1}{1000}$	संख्या
2	5	3	1	4	7	253.147
6	2	9	3	2	1	.....
0	4	3	1	9	2	.....
.....	1	4	2	5	1	514.251
2	.....	6	5	1	2	236.512
.....	2	.....	5	....	3	724.503
6	.....	4	.....	2	.....	614.326
0	1	0	5	3	0	.....

उपर्युक्तायां सारण्यां भवन्तः एतादृशीः संख्याः लिखितवन्तः यासां प्रसारितं स्थानीयमानं प्रदत्तम् आसीत्। भवन्तः विलोमम् अपि कर्तुं शक्नुवन्ति अर्थात् यदि भवतां पार्श्वे संख्या वर्तते तर्हि भवन्तः अस्याः प्रसारितरूपं लेखितुम् अर्हन्ति। उदाहरणतः

$$253.417 = 2\times100+5\times10+3\times1+4\times\frac{1}{10}+1\times\frac{1}{100}+7\times\frac{1}{1000}$$

जॉनस्य पार्श्वे 15.50 रूप्यकाणि सन्ति सलमायाः च पार्श्वे 15.75 रूप्यकाणि सन्ति। कस्य सविधे अधिकं धनम् अस्ति ? एतत् अवज्ञातुं 15.50 एवं 15.75 इत्येतयोः दशमलवसंख्ययोः तुलनायाः आवश्यकता अस्ति। एतदर्थं वयं सर्वप्रथमं दशमलवबिन्दोः वामभागीय-अङ्कतः आरम्भं कुर्वन्तः वामभागस्थानाम्

अङ्कानां तुलनां कुर्मः । अत्र बिन्दोः वामभागीयौ द्वौ अङ्कौ 1 एवं 5 द्वयोः संख्ययोः एकसमानौ स्तः । अतः वयं दशांशस्थानात् आरम्भं कुर्वन्तः दशमलवबिन्दोः दक्षिणभागीय-अङ्कानां तुलनां कुर्मः । वयं प्राप्नुमः यत् पञ्चतः सप्त अधिकम् अस्ति (5<7) । एवमेव वयं वक्तुं शक्नुमः यत् 15.50 < 15.75.अतः सलमायाः पार्श्वे अधिकं धनम् अस्ति ।

यदि दशांशस्थानीयाः अंकाः अपि एकसमानाः सन्ति तु शतांशस्थानीय-अंकानां तुलनां कुर्वन्तु एवमेव च अग्रे अपि कुर्वन्तु ।

अधुना सद्यःएव 35.63 एवञ्च 35.67,20.1 एवञ्च 20.01.19.36 एवञ्च 29.36 इत्येषां तुलनां कुर्वन्तु ।

धनस्य, दीर्घतायाः भारस्य च निम्नम् ऐककम् उच्चरूपेण परिवर्तितुं दशमलवस्य आवश्यकता भवति ।

उदाहरणतः 3 नाणकम् = $\frac{3}{100}$ रू. = 0.03 रूप्यकाणि,

5 ग्रा. = $\frac{5}{1000}$ कि.ग्रा. = 0.005 कि.ग्रा., 7 से.मी. = $\frac{7}{100}$ = 0.07 मी.

75 नाणकानि = ----- रूप्यकाणि, 250 ग्रा. = ---- कि.ग्रा., 85 से.मी.= ..... मी., लिखन्तु

वयम् एतदपि जानीमः यत् दशमलव-संख्यानां योगः व्यवकलनं च कथं क्रियते..... ? इत्थम् 21.36 + 37.35 अस्ति

$$\begin{array}{r} 21.36 \\ +\ 37.35 \\ \hline 58.71 \end{array}$$

0.19+2.3 एतयोः मानं किमस्ति ? 29.35-4.56 एतयोः अन्तरम् अस्ति,

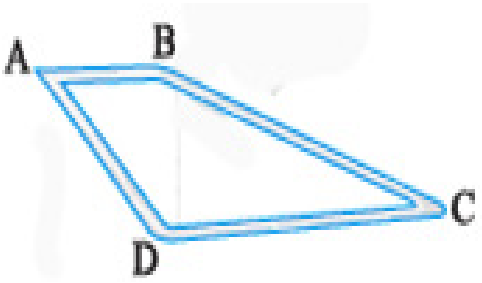
$$\begin{array}{r} 29.35 \\ -\ 04.56 \\ \hline 24.79 \end{array}$$

39.87 – 21.98 अस्य मानं वदन्तु

प्रश्नावली 2.5

1. दीर्घतरः कः वर्तते ?
   (i) 0.5 अथवा 0.05 (ii) 0.7 अथवा 0.5 (iii) 7 अथवा 0.7
   (iv) 1.37 अथवा 1.49 (v) 2.03 अथवा 2.30 (vi) 0.8 अथवा 0.88
2. दशमलवस्य उपयोगं कुर्वन् निम्नलिखितानि रूप्यकेषु व्यक्तीकुर्वन्तु :
   (i) 7 नाणकानि (ii) 7 रूप्यकाणि 7 नाणकानि (iii) 77 रूप्यकाणि 77 नाणकानि
   (iv) 50 नाणकानि (v) 235 नाणकानि
3. (i) 5 से.मी. इत्येतत् मीटर् एवं कि.मी. रूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु :
   (ii) 35 मि.मी. इत्येतत् से.मी.,मी.एवं कि.मी. इति रूपेषु व्यक्तीकुर्वन्तु :
4. निम्नलिखितानि कि.ग्रा. रूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु :
   (i) 200 ग्रा. (ii) 3470 ग्रा. (iii) 4 कि.ग्रा.8 ग्रा.
5. निम्नलिखिताः दशमलवसंख्याः विस्तारितरूपेण लिखन्तु :
   (i) 20.03 (ii) 2.03 (iii) 200.03 (v) 2.034

6. निम्नलिखितासु दशमलवसंख्यासु '2' इत्यस्य स्थानीयमानं लिखन्तु :
(i) 2.56 (ii) 21.37 (iii) 10.25 (v i) 9.42 (v) 63.352



7. दिनेशः A स्थानात् B स्थान-पर्यन्तम् अगच्छत् ततश्च C स्थानपर्यन्तम् अगच्छत्। A तथा B स्थानयोः अन्तरालः 7.5 किलोमीटरपरिमितः अस्ति, B तथा C स्थानयोः अन्तरालः12.7 किलोमीटरपरिमितः अस्ति। अयुबः A स्थानात् D स्थान-पर्यन्तम् अगच्छत् ततश्च C स्थानपर्यन्तम् अगच्छत्। A तथा C स्थानयोः मध्ये अन्तरालः 9.3 किलोमीटरपरिमितः अस्ति तथा च D स्थानतःC स्थान-पर्यन्तम् अन्तरालं 11.8 किलोमीटरपरिमितम् अस्ति। कः अधिकं दूरं गतवान् तत् च अन्तरालं कियत् आसीत् ?
8. श्यामा 5 कि. 300 ग्रा. सेवफलानि 3 कि. 250 ग्रा. च आम्राणि क्रीतवती । सरला 4 कि. 800 ग्रा. नारङ्गाणि 4 कि.150 ग्रा. च कदलीफलानि क्रीतवती । का अधिकानि फलानि क्रीतवती ?
9. 28 कि.मी. 42.6 किलोमीटरतः कियत् न्यूनं वर्तते ?

2.6 दशमलवसंख्यानां गुणनम्

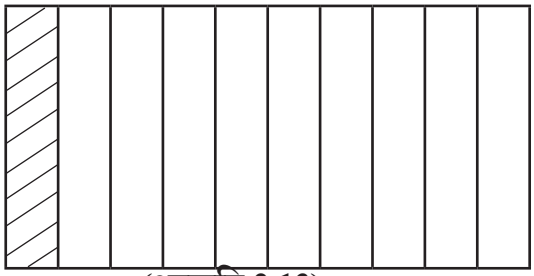
रेशमा 8.50 रूप्यकैः प्रति कि.ग्रा. मानेन 1.5 किलोग्रामपरिमितं शाकं क्रीतवती । सा कियत् धनं व्ययीकरिष्यति ? निश्चितरूपेण एतत् 8.50×1.50 रूप्यकाणि भविष्यति। 8.5 तथा च 1.5 उभे एव दशमलवसंख्ये स्तः। अनेन प्रकारेण अस्माभिः एका एतादृशी स्थितिः प्राप्यते यत्र अस्माकं कृते एतत् ज्ञातुम् आवश्यकम् अस्ति यत् दशमलवद्वयस्य गुणनं कथं क्रियते ? आगम्यताम् इदानीं द्वयोः दशमलवसंख्ययोः गुणनम् अधिगच्छामः। सर्वप्रथमं वयं 0.1×0.1 इति जानीमः।

अधुना $0.1 = \frac{1}{10}$, अतः $0.1 \times 0.1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$

$= \frac{1\times1}{10\times10} = \frac{1}{100}$

= 0.01. आकृतिः 2.13

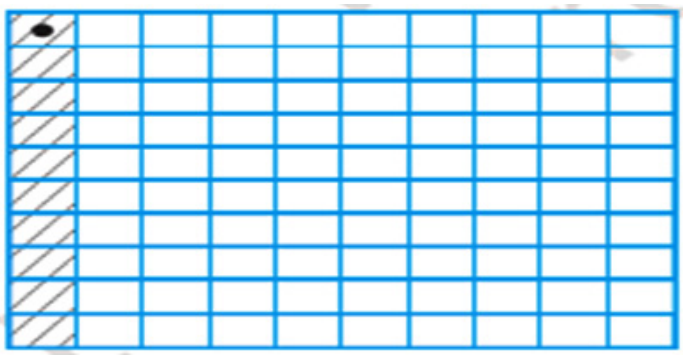
आगच्छन्तु अस्य सचित्रं निरूपणं पश्यामः।



(आकृति 2.13)

$\frac{1}{10}$ इति भिन्नं दशसु समानभागेषु एकं भागं निरूपयति। चित्रे छायाङ्कितभागः $\frac{1}{10}$ इत्येतं निरूपयति।

वयं जानीमः यत्



आकृतिः 2.14

$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ इत्यस्यार्थः $\frac{1}{10}$ इत्यस्य $\frac{1}{10}$, अतः एतं $\frac{1}{10}$ तमं भागं 10 समानभागेषु

विभक्तीकुर्वन्तु एतेषु च एकं भागं स्वीकुर्वन्तु।

अनेन प्रकारेण वयं लभामहे (आकृतिः 2.14) यत् $\frac{1}{10}$ तमस्य भागस्य 10 भागेषु एकः भागः बिन्दुद्वारा

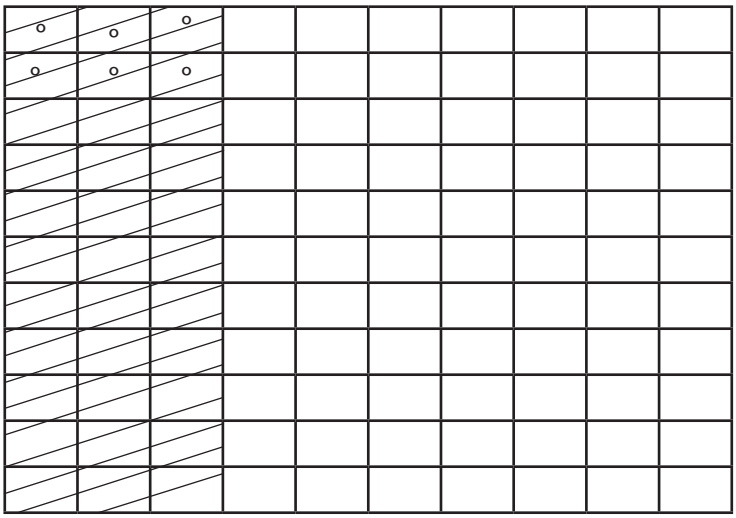
चिह्नितवर्गः अस्ति। अर्थात् एतत् $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ अथवा 0.1×0.1 इति निरूपयति।

किं बिन्दुवर्गस्य केनचित् अपरविधिना निरूपणं कर्तुं शक्यते ?

भवन्तः 2.14 आकृत्यां कति लघुवर्गान् प्राप्नुवन्ति। अस्यां 100 लघुवर्गाः सन्ति। इत्थं बिन्दुद्वारा चिह्नितवर्गः शते एकं निरूपयति। अतः $0.1 \times 0.1 = 0.01$.

ध्यानं यच्छन्तु 0.1 गुणनफले द्विवारं सम्मिलितं वर्तते। 0.1 मध्ये दशमलवबिन्दोः दक्षिणभागे एकः अङ्कः अस्ति। 0.01 मध्ये दशमलवबिन्दोः दक्षिणभागे द्वौ (1+1) अङ्कौ स्तः।

आयान्तु सम्प्रति वयं 0.2×0.3 जानीमः।



आकृतिः2.15

वयं लभामहे, $0.2 \times 0.3 = \frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$

यथा अस्माभिः $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ इत्यस्य कृते कृतम् आसीत्

तथैव आगच्छन्तु वयं वर्गं दशसु समानभागेषु विभक्तीकुर्मः तथा $\frac{3}{10}$ इति प्राप्तुम् एतेषु दशसु भागेषु

त्रीन् भागान् बहिः निस्कासयामः। पुनः एषु त्रिषु भागेषु प्रत्येकं भागं दशसु समानभागेषु विभक्तीकुर्वन्तु प्रत्येकं भागतः द्वयं (2) स्वीकुर्वन्तु।

अनेन प्रकारेण वयं $\frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$ इति प्राप्नुमः।

बिन्दुद्वारा चिह्नितः वर्गः, $\frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$ अर्थात् 0.2×0.3 इत्येतत् निरूपयन्ति (2.15 आकृतिं पश्यन्तु)

यतोहि शतमध्ये षड् बिन्दुद्वाराचिह्निताः वर्गाः सन्ति अतः एते 0.06 इति निरूपयन्ति। अनेन प्रकारेण $0.2 \times 0.3 = 0.06$.

ध्यानं यच्छन्तु यत् $2 \times 3 = 6$ तथा च 0.06 इत्यत्र दशमलवबिन्दुतः दक्षिणभागे अंकानां संख्या 2 (= 1+1) अस्ति।

निरीक्षणं कुर्वन्तु यत् किमेतत् 0.1×0.1 इत्यस्य कृते अपि उचितम् अस्ति।

एतेषां प्रेक्षणानाम् उपयोगेन 0.2×0.3 इत्यपि ज्ञायताम्।

0.1×0.1 तथा च 0.2×0.3 इत्यनयोः ज्ञानसमये सम्भवतः भवन्तः ध्यानं दत्तवन्तः स्युः यत् सर्वप्रथमं वयं

दशमलवबिन्दोः उपेक्षां कुर्वन्तः पूर्णसंख्यानां रूपेण गुणनं कृतवन्तः आस्म । 0.1×0.1 इत्यत्र अस्माभिः प्राप्तम्, 01×01 अर्थात् 1×1 इत्थमेव 0.2×0.3 इत्यत्र अस्माभिः लब्धं 02×03 = 2×3. इति । तदानीं वयं दक्षिणभागीय-अंकात् आरम्भं कुर्वन्तः एवं च वामं प्रति चलन्तः अङ्कानां संख्याम् अगणयाम । तदा वयं तत्र दशमलवबिन्दुं अस्थापयाम । गण्यमानानाम् अङ्कानां संख्या, गुण्यमानानां दशमलवसंख्यानां दशमलवबिन्दोः दक्षिणभागीय-अङाकानां संख्यायाः योगे कृते सति प्राप्यते ।

आयान्तु इदानीं वयं 1.2×2.5 इति जानीम । 12 एवं 25 इति गुणयन्तु । वयं 300 इति प्राप्नुमः। 1.2 तथा च 2.5 इत्यत्र द्वयोः मध्ये दशमलवबिन्दोः दक्षिणभागे एकः अंकः अस्ति। अतः 300 मध्ये सर्वस्मात् दक्षिणतः 1+1 = 2 अंकौ गणयन्तु (अर्थात् 0) तदन्तरं वामभागे चलन्तु । वयं 3.00 अर्थात् 3 इति प्राप्नुमः ।

अनेन प्रकारेण 1.5×1.6, 2.4×4.2 इति ज्ञायताम् ।

2.5 तथा च 1.25 इत्यनयोः गुणनसमये सर्वप्रथमं भवन्तः 25 एवं 125 एतयोर्मध्ये गुणयिष्यन्ति ।

लब्धगुणनफले दशमलवं स्थापयितुं भवन्तः सर्वस्मात् दक्षिणस्थात् अंकात् आरम्भं कुर्वन्तः 1+2 = 3 (किमर्थम्) अंकान् गणयिष्यन्ति । अतः 2.5×1.25 = 3.225 । 2.7×1.35 इति ज्ञायताम् ।

प्रयासं कुर्वन्तु

1. ज्ञायताम् (i) 2.7×4 (ii) 1.8×1.2 (iii) 2.3×4.35
2. प्रथमप्रश्ने प्राप्तगुणनफलानि अवरोहिक्रमे क्रमबद्धीकुर्वन्तु ।

उदाहरणम् 7 एकस्य समबाहुत्रिभुजस्य भुजा 3.5 सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति । अस्य परिमापनं ज्ञायताम् ।

समाधानम् समबाहुत्रिभुजस्य सर्वाः भुजाः समानाः भवन्ति ।

अतः प्रत्येकं भुजायाः दीर्घता = 3.5 सेण्टीमीटरपरिमिता अतः परिमापनम् = 3×3.5 से.मी. =10.5 से.मी.

उदाहरणम् 8 एकस्य आयतस्य दीर्घता 7.1 सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति अस्य च विस्तृतिः 2.5 सेण्टीमीटरपरिमिता वर्तते । आयतस्य क्षेत्रफलं किमस्ति ?

समाधानम् आयतस्य दीर्घता = 7.1 सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति, आयतस्य विस्तृतिः = 2.5 सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति अतः आयतस्य क्षेत्रफलम् = 7.1 से.मी.×2.5 से.मी. =17.75 cm^2 इति अस्ति ।

2.6.1 दशमलवसंख्यानाम् 10,100 तथा च 1000 इति संख्याभिः गुणनम्

रेशमा अपश्यत् यत् 2.3 = $\frac{23}{10}$ इति अस्ति अपरन्तु 2.35 = $\frac{235}{100}$, अतः सा प्राप्तवती यत्

दशमलवबिन्दोः स्थित्याश्रयपूर्वकं दशमलवसंख्या तस्य भिन्नस्य रूपेण परिवर्तितुं शक्यते यस्य हरः दश अथवा शतम् इति अस्ति । सा चिन्तितवती यत् यदि दशमलवसंख्या दशेन शतेन अथवा सहस्रेण (10 /100 /1000 द्वारा) गुण्यते तदा किं भविष्यति ?

आगच्छन्तु पश्यामः किं वयं दशमलवसंख्याः दशेन शतेन अथवा सहस्रेण (10 /100 /1000 द्वारा) गुणयितुं किमपि प्रतिरूपं प्राप्तुं शक्नुमः ?

अधः प्रदत्तां तालिकां पश्यन्तु रिक्तस्थानपूर्तिं च कुर्वन्तु :

$1.76\times10=\frac{176}{100}\times10=17.6$ $1.76\times100=\frac{176}{100}\times100=176$ अथवा 176.0 $1.76\times1000=\frac{176}{100}\times1000$ =1760 अथवा 1760.0	2.35 ×10 =..... 2.35 ×100 =..... 2.35 × 1000 = ...	12.356 × 10 = ... 12.356 × 100 = ... 12.356 × 1000 = ...
0.5×10 =5/10× 10=5 ; 0.5×100=.....; 0.5 × 1000 = ...		

सारण्यां गुणनफलस्य दशमलवबिन्दोः विस्थापनं पश्यन्तु । अत्र संख्याः दशेन शतेन अथवा सहस्रेण (10/100/1000 द्वारा) गुणिताः सन्ति । 1.76 × 10 = 17.6 इत्यत्र अंकाः ते एव सन्ति अर्थात् उभयत्र 1,7 तथा च 6 इति अङ्काः सन्ति । किं भवन्तः एतत् अन्येषु गुणनफलेषु अपि दृष्टवन्तः ? 1.76 एवञ्च 17.6 इति पश्यन्तु । दशमलवबिन्दुः दक्षिण-वामयोः कस्मिन् भागे विस्थापितः अस्ति ? ध्यानं यच्छन्तु दशे (10) एकम् (1)अतिरिच्य एकं शून्यम् अस्ति ।1.76 ×100 =176.0 इत्यस्मिन् 1.76 एवं 176.0 इति पश्यन्तु यत् कस्मिन् भागे एवं च कतिभ्यः स्थानेभ्यः दशमलवबिन्दोः विस्थापनम् अभवत् । दशमलवबिन्दुः दक्षिणं प्रति द्वाभ्यां स्थानाभ्यां विस्थापितः अभवत् । ध्यानं ददतु 100 इत्यस्मिन् एकम् अतिरिच्य द्वे शून्ये स्तः ।

प्रयासं कुर्वन्तु

ज्ञायताम् (i) 0.3× 10
(ii) 1.2 ×100
(iii) 56.3 × 1000

किं भवन्तः अन्येषु गुणनफलेषु अपि दशमलवबिन्दोः एतादृशं विस्थापनं पश्यन्ति ?

अनेन प्रकारेण वयं वक्तुं शक्नुमः यत् यदा काञ्चित् दशमलवसंख्यां दशेन शतेन अथवा सहस्रेण (10 /100 /1000 द्वारा) गुण्यते तदा गुणनफलस्य अङ्काः ते एव भवन्ति ये अङ्काः दशमलवसंख्यायां भवन्ति परन्तु गुणनफले दशमलवबिन्दुः दक्षिणभागे तावदेभ्यः स्थानेभ्यः विस्थापितः भवति यावन्ति एकम् अतिरिच्य शून्यानि भवन्ति । एतानि प्रेक्षणानि आधारीकृत्य इदानीं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् :

0.07 × 10 = 0.7, 0.07 × 100 = 7 तथा च 0.07 × 1000 = 70.

किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् 2.97 × 10 =? 2.97 × 100 =? 2.97 × 1000 =?

किम् इदानीं भवन्तः रेशमाद्वारा व्ययीकरिष्यमाणस्य राशेः अर्थात् 8.50×150 रूप्यकाणाम् अवगमने तस्याः साहाय्यं कर्तुं शक्नुवन्ति ?

प्रश्नावली 2.6

1. ज्ञायताम् :
   (i) 0.2 × 6 (ii) 8 × 4.6 (iii) 2.71 × 5 (iv) 20.1 × 4
   (v) 0.05 × 7 (vi) 211.02 × 4 (vii) 2 × 0.86
2. एकस्य आयतस्य क्षेत्रफलं ज्ञायतां यस्य दीर्घता 5.7 सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति विस्तृतिः च 3 सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति ।
3. ज्ञायताम् :
   (i) 1.3× 10 (ii) 36.8 × 10 (iii) 153.7× 10 (iv)168.07× 10

(v) 31.1×100 (vi) 156.1 × 100 (vii)3.62 × 100 (viii) 43.07 × 100

(ix) 0.5 × 10 (x) 0.08 × 10 (xi) 0.9 × 100 (xii) 0.03 × 1000

4. एकं द्विचक्रिकायानम् एकलीटरपरिमितेन पैट्रोलतैलेन 55.3 कि.मी. दूरं गच्छति। दशलीटरपरिमितेन पैट्रोलतैलेन कियत् दूरं गमिष्यति ?

5. ज्ञायताम् :

(i) 2.5×0.3 (ii) 0.1×51.7 (iii) 0.2×316.8 (iv)1.3× 3.1

(v) 0.5×0.05 (vi) 11.2× 0.15 (vii) 1.07× 0.02

(viii) 10.05×1.05 (ix) 101.01×0.01 (x) 100.01× 1.1

2.7 दशमलवसंख्यानां भागः

सविता निजकक्षायाः शोभार्थम् एकस्याः चित्रकल्पनायाः निर्माणं कुर्वती आसीत्। तस्याः कृते 1.9 सेण्टीमीटरपरिमित-दीर्घाणां केषाञ्चित् वर्णीय-कर्गदानां पट्टिकाः अपेक्षिताः आसन्। तस्याः पार्श्वे 9.5 सेण्टीमीटरपरिमित-दीर्घा एका वर्णयुता कर्गदपट्टिका आसीत्। अस्याः पट्टिकातः सा अभीष्ट-दीर्घतायाः कति खण्डान् प्राप्तुं शक्नोति ? सा प्रायशः अचिन्तयत् यत् एतत् $\frac{9.5}{1.9}$ इति भविष्यति।

किम् इदं सत्यं वर्तते ?

9.5 तथा च 1.9 इति उभे एव दशमलवसंख्ये स्तः। अतः अस्माकं कृते दशमलवसंख्यानां भागविषये अपि ज्ञानम् आवश्यकं वर्तते।

2.7.1 दशेन , शतेन सहस्रेण च (10,100 तथा च 1000 द्वारा) भागः

आयान्तु अधुना वयम् एकस्याः दशमलवसंख्यायाः दशेन, शतेन सहस्रेण च (10.100 तथा च 1000 एभिः) भाग-विधिं जानीम।

आगच्छन्तु वयं 31.5÷10 इति जानीम।

$$31.5 \div 10 = \frac{315}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{315}{100} = 3.15$$

एवमेव $31.5 \div 100 = \frac{315}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{315}{1000} = 0.315$

प्रयासं कुर्वन्तु
ज्ञायताम् (i) 235.4 ÷ 10
(ii) 235.4 ÷ 100
(iii) 235.4 ÷ 1000

आगच्छन्तु वयम् एतत् पश्यामः यत् किं वयं संख्याः दशेन, शतेन सहस्रेण च (10,100 तथा च 1000 द्वारा) विभक्तीकर्तुं किमपि प्रतिरूपं ज्ञातुम् अर्हामः। एतद्-द्वारा संख्यानां दशेन, शतेन सहस्रेण च (10,100 तथा च 1000 द्वारा) संक्षिप्तविधिना विभक्तीकरणे अस्माकं साहाय्यं भवितुं शक्नोति।

31.5÷10=3.15	231.5÷10= ...	1.5÷10 =....	29.36÷10=...
31.5÷100=0.315	231.5÷100=.....	1.5÷100=	29.36÷100=.....
31.5÷1000=0.0315	231.5÷1000=.....	1.5÷1000=.....	29.36÷1000=....

31.5 ÷ 10 = 3.15 इति स्वीकुर्वन्तु। 31.5 तथा च 3.15 इत्यत्र अङ्काः एकसमानाः सन्ति अर्थात् 3,1 तथा च 5 परन्तु भागफले दशमलवबिन्दुः विस्थापितः जातः। कस्मिन् भागे एवं च कतिभ्यः स्थानेभ्यः? दशमलवबिन्दुः वामं प्रति एकस्मात् स्थानात् विस्थापितः अभवत्। ध्यानं यच्छन्तु 10 मध्ये एकम् अतिरिच्य एकं शून्यम् अस्ति।

इदानीं 31.5÷100=0.315 इति चर्चयामः । 31.5 तथा च 0.315 इत्यत्र अंकाः एकसमानाः सन्ति परन्तु भागफले दशमलवबिन्दोः विषये किं वक्तुं शक्नुमः ? अयं वामं प्रति स्थानद्वयात् विस्थापितः जातः । ध्यानं यच्छन्तु 100 मध्ये एकम् अतिरिच्य द्वे शून्ये स्तः।

अनेन प्रकारेण वयं वक्तुं शक्नुमः यत् यदि काञ्चित् संख्यां दशेन, शतेन सहस्रेण च (10,100 तथा च 1000 द्वारा) विभक्तीकुर्मः तर्हि संख्यायाः एवं भागफलस्य अंकाः सदृशाः सन्ति परन्तु भागफले दशमलवबिन्दुः वामं प्रति तावत्स्थानेभ्यः एव विस्थापितः भवति यावन्ति एकेन सह शून्यानि भवन्ति । अस्य प्रेक्षणस्य उपयोगं कुर्वन्तः वयम् अधुना शीघ्रतापूर्वकं निम्नलिखितं ज्ञास्यामः ।

$$2.38 \div 10 = 0.238$$

$$2.38 \div 100 = 0.0238$$

$$2.38 \div 1000 = 0.00238$$

2.7.2 पूर्णसंख्यया दशमलवसंख्यायाः भागः

आयान्तु , वयं $\frac{6.2}{2}$ इति जानीम । स्मरन्ति वा यत् वयम् एतत् 6.4÷2 इति रूपेण अपि लिखामः ।

अतः यथा वयं भिन्नेभ्यः अधिगतवन्तः स्मः।

$$6.4 \div 2 = \frac{64}{10} \div 2$$

$$= \frac{64}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{64 \times 1}{10 \times 2} = \frac{1 \times 64}{10 \times 2} = \frac{1}{10} \times \frac{64}{2}$$

$$= \frac{1}{10} \times 32 = \frac{32}{10} = 3.2$$

प्रयासं कुर्वन्तु

(i) 35.7 ÷ 3 =?

(ii) 25.5 ÷ 3 = ?

अथवा, आयान्तु सर्वप्रथमं वयं चतुःषष्टिं (64) द्वि-अङ्केन (2) विभक्तीकुर्मः । वयं द्वात्रिंशत् (32) इति प्राप्नुमः । 6.4 इत्यस्मिन् दशमलवबिन्दोः दक्षिणभागे एकः अंकः विद्यते। 32 इत्यस्मिन् दशमलवबिन्दुम् अनेन प्रकारेण स्थापयन्तु यथा दशमलवबिन्दोः दक्षिणभागे एकः एव अंकः अवशिष्टः स्यात् । वयं पुनः 3.2 इति प्राप्नुमः ।

19.5 इति ज्ञातुं पूर्वं 195 ÷ 5 इति ज्ञायताम् । वयम् एकोनचत्वारिंशतं (39) प्राप्नुमः । 19.5 इत्यस्मिन् दशमलवबिन्दोः दक्षिणभागे एकः अंकः अस्ति । 39 इत्यस्मिन् दशमलवबिन्दुं तेन प्रकारेण स्थापयन्तु येन दक्षिणभागे एकः एव अंकः अवशिष्टः स्यात् । भवन्तः 3.9 इति प्राप्स्यन्ति ।

अधुना $12.96 \div 4 = \frac{1296}{100} \div 4$

$$= \frac{1296}{100} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{100} \times \frac{1296}{4}$$

$$= \frac{1}{100} \times 324 = 3.24$$

अथवा,1296 इत्येतं 4 इत्यनेन विभक्तीकुर्वन्तु । भवन्तः 324 इति आप्नुवन्ति । 12.96 इत्यस्मिन् दशमलवबिन्दोः दक्षिणभागे द्वौ अंकौ स्तः । 324 इत्यत्र अनेनैव प्रकारेण दशमलवबिन्दुं स्थापयन्तः भवन्तः 3.24 इति प्राप्स्यन्ति ।

ध्यानं यच्छन्तु अत्र तथा च इतः अग्रिमे परिच्छेदे अस्माभिः केवलम् एतादृशानि विभाजनानि चर्चितानि सन्ति येषु दशमलवं ध्याने न स्थापयित्वा, एका संख्या अन्यया संख्यया पूर्णतया विभक्तीकर्तुं शक्यते अर्थात् शेषफलरूपेण शून्यं प्राप्स्यते । यथा 19.5 ÷ 5 इत्यत्र, यदा 195 इत्येतं 5 इत्यनेन विभक्तीकुर्मः तदा शेषफलं शून्यं प्राप्यते ।

यद्यपि एतादृश्यः अपि स्थितयः सन्ति यासु काचित् संख्या कयाचित् अपरसंख्यया पूर्णतया विभाजयितुं न शक्यते अर्थात् वयं शेषफलरूपेण शून्यं न प्राप्नुमः । उदाहरणतः 195÷7 इति एतादृशीनां स्थितीनां विषये वयम् अग्रिम-कक्षासु चर्चयिष्यामः ।

अतः 40.86 ÷ 6 = 6.81

प्रयासं कुर्वन्तु

ज्ञायताम्

(i) 43.15 ÷ 5 =?

(ii)82.44 ÷ 6 =?

उदाहरणम् 9 4.2,3.8 तथा च 7.6 इत्यस्य मध्यमानं ज्ञायताम् ।

समाधानम् 4.2,3.8 तथा च 7.6 इत्यस्य मध्यमानं भविष्यति ।

$$\frac{4.2+3.8+7.6}{3}$$

$$= \frac{15.6}{3} = 5.2 \text{ इति भविष्यति ।}$$

प्रयासं कुर्वन्तु

(i) 15.5 ÷ 5

(ii) 126.35 ÷ 7

2.7.3 एकस्याः दशमवलसंख्यायाः अन्यदशमवलसंख्यया सह भागः

आयान्तु वयं $\frac{25.5}{0.5}$ अर्थात् 25.5÷0.5 इति जानीम -

वयं प्राप्नुमः $25.5 \div 0.5 = \frac{255}{10} \div \frac{5}{10} = \frac{255}{10} \times \frac{10}{5} = 51$

अतः $25.5 \div 0.5 = 51$

भवन्तः किं पश्यन्ति ? $\frac{25.5}{0.5}$ एतदर्थं

वयं प्राप्नुमः यत् 0.5 इत्यत्र दशमलवतः दक्षिणभागे एकः अंकः अस्ति । एतं 10 इत्यनेन विभक्तीकुर्मः चेद् पूर्णसंख्यायां परिवर्तयितुं शक्यते । इत्थमेव 25.5 इत्येतम् अपि 10 द्वारा विभक्तीकृत्य एकस्मिन् भिन्ने परिवर्तितम् ।

अथवा वयं वक्तुं शक्नुमः यत् 0.5 इत्येतम् 5 कर्तुं दशमलवबिन्दुः दक्षिणं प्रति एकस्मात् स्थानात् विस्थापितः कृतः ।

अतः 25.5 इत्यस्मिन् अपि दशमलवबिन्दुं दक्षिणं प्रति एकस्मात् स्थानात् विस्थाप्य 255 इत्यनेन रूपेण परिवर्तितम् ।

अनेन प्रकारेण $22.5 \div 1.5 = \frac{22.5}{1.5} = \frac{225}{15} = 15$

अनेन प्रकारेण $\frac{20.3}{0.7}$ तथा च $\frac{15.2}{0.8}$ इति ज्ञायताम् ।

प्रयासं कुर्वन्तु

ज्ञायताम्

(i) $\frac{7.75}{0.25}$

(ii) $\frac{42.8}{0.02}$

(iii) $\frac{5.6}{1.4}$

आगच्छन्तु अधुना वयं 20.55÷1.5 इति जानीम -

उपर्युक्तां चर्चाम् अनुसृत्य वयम् एतं 205.5÷15 इत्यनेन रूपेण अपि लेखितुम् अर्हामः। अनेन वयं 13.7 इति प्राप्नुमः।

$\frac{3.96}{0.4}, \frac{2.31}{0.3}$ इति ज्ञायताम्।

सम्प्रति $\frac{33.725}{0.25}$ इत्यस्य चर्चां कुर्मः। वयम् एतं $\frac{3372.5}{25}$ इत्यनेन रूपेण अपि लेखितुं शक्नुमः। (कथम्)

अन्यच्च वयं 134.9 इत्यनेन रूपेण भागफलं प्राप्नुमः। भवन्तः $\frac{27}{0.03}$ इति कथं ज्ञास्यन्ति ? वयं जानीमः यत् 27 इति 27.0 इत्यनेन रूपेण अपि लेखितुं शक्यते।

अतः $\frac{27}{0.03} = \frac{27.00}{0.03} = \frac{2700}{3} = ?$

उदाहरणम् 10 एकस्य समबहुभुजस्य प्रत्येकं भुजायाः दीर्घता 2.5 सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति। बहुभुजस्य परिमापः 12.5 सेण्टीमीटरपरिमितः अस्ति। अस्य बहुभुजस्य कति भुजाः सन्ति ?

समाधानम् समबहुभुजस्य परिमापः अस्य समेषां समानभुजानां दीर्घतायाः योगः भवति = 12.5 से.मी. प्रत्येकं भुजायाः दीर्घता = 2.5 सेण्टीमीटरपरिमिता

अतः भुजानां संख्या $= \frac{12.5}{2.5} = \frac{125}{25} = 5$

बहुभुजस्य 5 भुजाः सन्ति।

उदाहरणम् 11 एकं कारयानं 2.2 होराभिः 89.1 किलोमीटरपरिमितं दूरं गच्छति। कारयानेन 1 होरायाम् आकलितः मध्यमानः अन्तरालः कियान् भविष्यति ?

समाधानम् कारद्वारा आकलितः अन्तरालः = 89.1 किलोमीटरपरिमितः

एतम् अन्तरालं पूरयितुं स्वीकृतः समयः = 2.2 होराः

अतः कारयानेन एकहोरायाम् आकलितः अन्तरालः $= \frac{89.1}{2.2} = \frac{891}{22} = 40.5$ कि.मी.

प्रश्नावली 2.7

1. ज्ञायताम् :
   (i) 0.4÷2 (ii) 0.35÷5 (iii) 2.48÷4 (iv) 65.4÷6
   (v) 651.2÷4 (vi) 14.49÷7 (vii) 3.96÷4 (viii) 0.80÷5
2. ज्ञायताम् :
   (i) 4.8÷10 (ii) 52.5÷10 (iii) 0.7÷10 (iv) 33.1÷10
   (v) 272.23÷10 (vi) 0.56÷10 (vii) 3.97÷10
3. ज्ञायताम् :
   (i) 2.7÷100 (ii) 0.3÷100 (iii) 0.78÷100

(iv) 432.6÷100 (v) 23.6÷100 (vi) 98.53÷100

4. ज्ञायताम् :

(i) 7.9÷1000 (ii) 26.3÷1000 (iii) 38.53÷1000

(iv) 128.9÷1000 (v) 0.5÷1000

5. ज्ञायताम् :

(i) 7÷3.5 (ii) 36÷0.2 (iii) 3.25÷0.5

(iv) 30.94÷0.7 (v) 0.5÷0.25 (vi) 7.75÷0.25

(vii) 76.5÷0.15 (viii) 37.8÷1.4 (i×) 2.73÷1.3

6. एकं यानं 24 लीटरपरिमितेन पैट्रोल्-तैलेन 43.2 किलोमीटरदूरं गच्छति। एतद् यानम् एकलीटरपरिमितेन पैट्रोल्-तैलेन कियद् दूरं गमिष्यति ?

वयं किं चर्चितवन्तः ?

1. वयं गतकक्ष्यासु भिन्नस्य एवं दशमलवस्य विषये, तथा च तेषु योगस्य एवं व्यकलनस्य संक्रियाः समेत्य अध्ययनं कृतवन्तः ।
2. अधुना वयं भिन्नेषु एवं दशमलवेषु गुणन-भागयोः संक्रियानाम् अध्ययनं कृतवन्तः।
3. अस्माभिः अधीतं यत् भिन्नानां गुणनं कथं करणीयम् । द्वयोः भिन्नयोः गुणनार्थं तेषाम् अंश-हरयोः गुणनं क्रियते पुनश्च गुणनफलम् $\frac{\text{(अंशानां गुणनफलम्)}}{\text{(हराणां गुणनफलम्)}}$ (अंशानां गुणनफलम्)/हराणां गुणनफलम् इति रूपेण लिख्यते । उदाहरणार्थम् - $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2\times5}{3\times7} = \frac{10}{21}$
4. भिन्नं, प्रचालक-गुणनस्य इति रूपेण कार्यं करोति ।

उदाहरणार्थम् - 2 इति अस्य $\frac{1}{2}$ इत्यस्य $\frac{1}{2} \times 2 = 1$

5. (a) द्वयोः उचितभिन्नयोः गुणनफलं, प्रत्येकं गुणितात् भिन्नात् न्यूनं भवति ।

(b) एकोचितस्य एवं च एकविषमस्य भिन्नस्य गुणनफलं विषमभिन्नात् न्यूनं भवति उचितात् भिन्नात् च अधिकं भवति ।

(c) द्वयोः विषमभिन्नयोः गुणनफलं, गुणितयोः उभयोः भिन्नयोः प्रत्येकं भिन्नात् अधिकं भवति ।

6. कस्यचिद् भिन्नस्य व्युत्क्रमः अस्य अंश-हरयोः परस्परं परिवर्तनेन प्राप्यते ।
7. अस्माभिः दृष्टं यत् द्वे भिन्ने कथं विभक्तीक्रियेते ।

(a) यदा एका पूर्णसंख्या केनचित् भिन्नेन सह विभक्तीक्रियते तर्हि वयं पूर्णसंख्यां भिन्नस्य व्युत्क्रमेण गुणयामः।

उदाहरणतः $2 \div \frac{3}{5} = 2 \text{ x } \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$

(b) यदा एकभिन्नं पूर्णसंख्यया विभक्तीकुर्मः तदा वयं भिन्नं पूर्णसंख्यायाः व्युत्क्रमेण गुणयामः।

उदाहरणतः $\frac{2}{3} \div 7 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{7} = \frac{2}{21}$

(c) एकभिन्नस्य द्वितीयभिन्नेन सह विभाजनाय वयं प्रथमभिन्नं द्वितीयभिन्नस्य व्युत्क्रमेण गुणयामः। अतः $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$

8. वयम् एतदपि अधिगतवन्तः यत् द्वे दशमलवसंख्ये कथं गुण्येते। द्वयोः दशमलवसंख्ययोः गुणनार्थं सर्वप्रथमं वयं ते संख्ये पूर्णसंख्यारूपेण गुणयामः। द्वयोः दशमलवसंख्ययोः दशमलवबिन्दोः वामभागे अङ्कसंख्यां गणयामः। अङ्कानाम् आकलितायाः संख्यायाः योगं जानीमः। दक्षिणतमस्थानात् अङ्कान् गणयन्तः गुणफले दशमलवबिन्दुं स्थापयामः। एषा गणना पूर्वप्राप्तेन योगेन समाना भवेत्। उदाहरणतः $0.5 \times 0.7 = 0.35$

9. कस्याश्चिद् दशमलवसंख्यायाः दशेन शतेन अथ च सहस्रेण (10, 100 तथा च 1000 एभिः) गुणनार्थं वयं तस्यां संख्यायां दशमलवबिन्दुं दक्षिणं प्रति तावत्स्थानेभ्यः विस्थापयामः यावन्ति एकम् अङ्कम् अतिरिच्य शून्यानि भवन्ति।

अतः $0.53 \times 10 = 5.3$, $0.53 \times 100 = 53$, $0.53 \times 1000 = 530$

10 दृष्टं यत् दशमलवसंख्याः कथं विभज्यन्ते।

(a) कस्याश्चिद् दशमलवसंख्यायाः पूर्णसंख्यया सह विभाजनाय सर्वप्रथमं वयं तां पूर्णसंख्यारूपेण विभक्तीकुर्मः। तदानीं भागफले दशमलवबिन्दुः तथैव स्थाप्यते यथा दशमलवसंख्यायाम्।

उदाहरणतः $8.4 \div 4 = 2.1$

ध्यानं यच्छन्तु वयम् अत्र केवलम् एतादृशानां विभाजनानां विषये वार्तां कुर्वन्तः स्मः येषु शेषफलं शून्यम् अस्ति।

(b) एकां दशमलवसंख्यां शतेन अथ च सहस्रेण (10, 100 तथा च 1000 एभिः) विभाजनाय वयं दशमलवसंख्यायां दशमलवबिन्दुं वामभागे तावत्स्थानेभ्यः विस्थापयामः यावन्ति एकम् अङ्कम् अतिरिच्य शून्यानि भवन्ति। एवमेव भागफलस्य प्राप्तिः भवति।

अतः $23.9 \div 10 = 2.39$, $23.9 \div 100 = 0.239$, $23.9 \div 1000 = 0.0239$

(c) यदा द्वे दशमलवसंख्ये विभक्तीकुर्मः तदा सर्वप्रथमं वयं द्वयोः संख्ययोः दशमलवबिन्दुं दक्षिणं प्रति समानस्थानेभ्यः विस्थापयामः तदा च विभाजनं कुर्मः।

अतः $2.4 \div 0.2 = 24 \div 2 = 12$.

दत्तांशानां प्रबन्धनम्

अध्यायः 3

3.1 भूमिका

गतकक्ष्यासु भवन्तः विभिन्नप्रकारकाणां दत्तांशैः सह कार्यं कृतवन्तः । भवन्तः दत्तांशानाम् एकत्रीकरणं तेषां तालिकाबद्धनं तथा च तेषां दण्डालेखरूपेण निरूपणम् इति विषयान् अधिगतवन्तः । दत्तांशानां संग्रहः आलेखनं प्रस्तुतीकरणं च अस्माकम् अनुभवानाम् एकत्रीकरणे तेभ्यः च निष्कर्ष-निस्सारणे साहाय्यं कुर्वन्ति । अस्मिन् अध्याये वयम् इमां दिशं प्रति एकं सोपानम् इतोऽपि अग्रे वर्धिष्यामहे । भवतां पुरतः केचन अन्यप्रकारकाणां दत्तांशाः आलेखाः च आगमिष्यन्ति । भवन्तः समाचारपत्रैः, पत्रिकाभिः, दूरदर्शनेन अन्यविधसाधनैः च विभिन्नप्रकारकाणान् दत्तांशान् दृष्टवन्तः सन्ति । भवन्तः एतदपि जानन्ति यत् सर्वे दत्तांशाः अस्मभ्यः सूचनाम् अवश्यमेव ददति । आयान्तु दत्तांशानां कानिचित् सामान्यरूपाणि पश्यामः यानि रूपाणि भवतां पुरतः आयान्ति एव । अङ्कानाम् एते संग्रहाः भवतः किं बोधयन्ति ?

तालिका 3.1

20.6.2006 तमे दिने नगराणां तापमानम्		
	अधिकतमम्	न्यूनतमम्
अहमदाबादः	38°C	29°C
अमृतसरः	37°C	26°C
बेङ्गलूरः	28°C	21°C
चेन्नई	36°C	27°C
देहली	38°C	28°C
जयपुरम्	39°C	29°C
जम्मूः	41°C	26°C
मुम्बयी	32°C	27°C

तालिका 3.2

पादकन्दुकस्य विश्व-चषकः प्रतियोगिता 2006	
यूक्रेणेन सऊदी-अरबः पराजितः	4-0 तः
स्पेनेन ट्यूनिशिया पराजितः	3-1 तः
स्विटजरलैण्डदेशेन टोगोदेशः पराजितः	2-0 तः

हिन्द्याः एकस्यां कक्षापरिक्षायां पञ्चभिः विद्यार्थिभिः दशसु प्राप्ताः दत्तांशाः 4,5,8,6,7 इति सन्ति ।

तालिका 3.3

एकस्यां कक्ष्यायां साप्ताहिकानुपस्थित्याः प्रद्रष्टारः दत्तांशाः	
सोमवासरः	
मङ्गलवासरः	
बुधवासरः	-
बृहस्पतिवासरः	
शुक्रवासरः	
शनिवासरः	
	इति एकं छात्रं निरूपयति

उदाहराणार्थं भवन्तः एतत् वक्तुं शक्नुवन्ति यत् 20.06.2006 तमे दिने जम्मोः अधिकतमं तापमानं सर्वाधिकम् आसीत् (तालिका 3.1) अथवा वयं वक्तुं शक्नुमः यत् बुधवासरे कश्चन अपि छात्रः अनुपस्थितः नासीत् (तालिका3.2)।

किम् वयम् एतान् अंकान् केनचित् अन्यविधिना संघटयितुं प्रस्तोतुं च शक्नुमः येन तेषां विश्लेषणं व्याख्या च इतोऽपि सम्यक् भवेत् ? अस्मिन् अध्याये वयम् एतादृशानां प्रश्नानां उत्तराणि प्राप्तुं प्रयतिष्यामहे।

3.2 दत्तांशानां सङ्ग्रहः

नगर-तापमानानां विषये दत्तांशाः (तालिका 3.1) अस्मान् अनेकानि तथ्यानि बोधयितुं शक्नुवन्ति परञ्च एते दत्तांशाः अस्मान् एतत् वक्तुं न शक्नुवन्ति यत् सम्पूर्णे वर्षे कस्य नगरस्य अधिकतमं तापमानं सर्वाधिकम् आसीत् । एतत् ज्ञातुम् अस्माभिः एतेषु नगरेषु प्रत्येकं नगरस्य सम्पूर्णवर्षस्य अधिकतमैः तापमानैः सम्बन्धिताः दत्तांशाः संग्राह्याः भविष्यन्ति । अस्यां स्थितौ 3.1 इति तालिकायां प्रदत्तवर्षस्य एक-विशिष्ट-दिनस्य तापमान-तालिका पर्याप्ता नास्ति।

अनेन एतत् प्रदर्शितं भवति यत् प्रायशः दत्तांशानां प्रदत्तसंग्रहः अस्मान् तत्सम्बन्धिनीम् एकां विशिष्टां सूचनां न दद्यात्। एतदर्थम् अस्माकं कृते एतद् आवश्यकम् अस्ति यद् वयं तां विशिष्टसूचनां मनसि निधाय अङ्कानां संग्रहणं कुर्याम। उपर्युक्तस्थितौ वयं याम् अभीष्ट-सूचनां प्राप्तुम् इच्छामः स्म सा एषा आसीत् यत् अखिलवर्षावधौ एतेषां नगराणाम् अधिकतमानि तापमानानि कानि आसन् यानि वयम् 3.1 इति तालिकातः न प्राप्तुं शक्तवन्तः । अनेन प्रकारेण **अङ्कानाम् एकत्रीकरणात् पूर्वम् अस्माभिः एतत् अवश्यमेव ज्ञातव्यं यत् वयम् एतेषाम् उपयोगं किमर्थं करिष्यामः।**

अधः काश्चन स्थितयः दत्ताः सन्ति।

भवन्तः अध्ययनं कर्तुम् इच्छन्ति -

- गणिते निजकक्ष्यायाः प्रदर्शनस्य
- पादकन्दुके अथवा क्रिकेटमध्ये भारतस्य प्रदर्शनस्य
- कस्मिंश्चित् क्षेत्रे महिलासाक्षरता-मानस्य अथवा
- भवतां निकटस्थेषु परिवारेषु पञ्च-वर्षेभ्यः न्यूनवयसां शिशूनां संख्यायाः।

उपर्युक्त-स्थितिषु भवतां कृते कीदृशां दत्तांशानाम् आवश्यकता अस्ति ? यावद् भवन्तः उपयुक्तान् दत्तांशान् न संग्रहिष्यन्ति तावत् पर्यन्तं भवन्तः अभीष्टज्ञानं प्राप्तुं न शक्नुवन्ति। एकैकस्य कृते उपयुक्ताः दत्तांशाः के सन्ति ? निजमित्रैः चर्चयन्तु अवचिन्वन्तु च यत् प्रत्येकं स्थित्यां केषां दत्तांशानाम् आवश्यकता भविष्यति ? केषाम् अङ्कानां संग्रहः सरलः भवति केषां च संग्रहः कठिनः भवति।

3.3 दत्तांशानां संघटनम्

यदा वयम् अङ्कानां सङ्ग्रहणं कुर्मः तदा अस्माभिः ते दत्तांशाः अभिलिख्य संघटनीयाः भवन्ति । अस्माकं कृते अस्य का

आवश्यकता अस्ति ? अधोदत्तम् उदाहरणं विचारयन्तु -

कक्ष्या-अध्यापिका सुश्रीनीलमः एतत् ज्ञातुम् इच्छति स्म यत् आङ्ग्ले छात्राणां प्रदर्शनं कीदृशम् आसीत्? सा विद्यार्थिभिः लब्धान् अङ्कान् निम्नलिखितप्रकारेण लिखति -

23, 35, 48, 30, 25, 46, 13, 27, 32, 38

एतस्मिन् रूपे दत्तांशाः सरलतया अधिगन्तुं योग्याः न आसन् । सा एतदपि न ज्ञातवती यत् विद्यार्थिनां विषये तस्याः अवधारणाः तेषां प्रदर्शनेन सह साम्यं भजते अथवा न । नीलमस्य एकः सहकर्मी तेषाम् निम्नलिखितरूपेण एकत्रीकरणे तस्याः साहाय्यं करोति । (तालिका 3.4)

तालिका 3.4

अनु-क्रमाङ्कः	नाम	पञ्चाशत्-पूर्णाङ्केषु प्राप्ताङ्काः	अनु-क्रमाङ्कः	नाम	पञ्चाशत्-पूर्णाङ्केषु प्राप्ताङ्काः
1	अजयः	23	6	गोविन्दः	46
2	अरमानः	35	7	जयः	13
3	आशीषः	48	8	कविता	27
4	दीप्तिः	30	9	मनीषा	32
5	फैजानः	25	10	नीरजः	38

अनेन प्रकारेण नीलमः एतत् अवगतवती यत् कः छात्रः कति अङ्कान् प्राप्तवान् ? किन्तु सा किमपि इतोऽपि अधिकं ज्ञातुम् इच्छति स्म । दीपिका तान् दत्तांशान् द्वितीयप्रकारेण प्रदर्शितवती ।

तालिका 3.5

अनुक्रमाङ्कः	नाम	पञ्चाशत्-पूर्णाङ्केषु प्राप्ताङ्काः	अनुक्रमाङ्कः	नाम	पञ्चाशत्-पूर्णाङ्केषु प्राप्ताङ्काः
3	आशीषः	48	4	दीप्तिः	30
6	गोविन्दः	46	8	कविता	27
10	नीरजः	38	5	फैजानः	25
2	अरमानः	35	1	अजयः	23
9	मनीषा	32	7	जयः	13

अधुना नीलमः एतदवगमने समर्था अभवत् यत् कः सर्वेभ्यः श्रेष्ठप्रदर्शनं कृतवान् कस्य च कृते सहायतायाः आवश्यकता अस्ति ।

अस्माकं पुरतः आगम्यमाणाः दत्तांशाः तालिकाबद्धरूपेण भवन्ति । अस्माकं विद्यालये पञ्जिकाः, प्रगति - प्रतिवेदनम्, अभ्यास–पुस्तिकासु क्रमानुसारणीसूची, तापमान-अभिलेखाः तथा च अन्ये अनेकदत्तांशाः

प्रयासं कुर्वन्तु

स्वकक्ष्यायाः न्यूनातिन्यूनं विंशतिं छात्रान् (बालकान् बालिकाः च) पृथक्-पृथक् तोलयन्तु (किलोग्राममात्रायाम्) । प्राप्तान् दत्तांशान् संगृह्य निम्नलिखितप्रश्नानाम् उत्तराणि दातुं प्रयत्नं कुर्वन्तु:

(i) सर्वाधिकः भारः कस्य अस्ति ? (ii) कतमः भारः अधिकांशतः छात्राणाम् अस्ति ?

(iii) भवतः भवतः च सर्वप्रियमित्रस्य भारयोः किम् अन्तरं वर्तते ?

सारणीबद्धरूपेण भवन्ति । किं भवन्तः केषाञ्चित् अङ्कानां विषये विचारयितुं शक्नुवन्ति ये सारणीबद्धरूपेण सन्ति ।

यदा वयं दत्तांशान् एकस्याम् उपयुक्त-तालिकायां स्थापयामः तदा तेषाम् अवगनं व्याख्या च सरलीभवति ।

3.4 प्रतिनिधिमानम्

भवताम् 'औसत' इति शब्देन अवश्यमेव परिचयः स्यात् तथा च दैनिकजीवने औसतशब्देन संबन्धितानि निम्नलिखितप्रकारकाणि कथनानि भवद्भिः अवश्यमेव श्रूतानि पठितानि च स्युः

- ईशा स्वीये अध्ययने प्रतिदिनं मध्यमानेन (औसतन) प्रायशः पञ्चघण्टात्मकं कालं व्ययीकरोति ।
- अस्मिन् समये वर्षस्य मध्यमानं तापमानं चत्वारिंशद्-डिग्रीसेल्सियसपरिमितं वर्तते ।
- मम कक्ष्यायाः विद्यार्थिनां मध्यमानम् आयुः द्वादशवर्षात्मकम् अस्ति ।
- एकस्य विद्यालयस्य वार्षिक-परीक्षायाः समये विद्यार्थिनां मध्यमाना उपस्थितिः नवति-प्रतिशतम् आसीत् ।

एवं प्रकारकाणि बहूनि कथनानि भवितुम् अर्हन्ति । उपरि दत्तानां कथनानां विषये विचारयन्तु ।

किं भवन्तः विचारयन्ति यत् प्रथमे कथने उक्तः बालः प्रतिदिनं निश्चयेन पञ्च-होराः यावत् पठति ? अथवा किं तस्मिन् विशेषसमये प्रदत्तस्थानस्य तापमानं सदैव चत्वारिंशद्-डिग्रीसेल्सियसपरिमितम् एव तिष्ठति ? अथवा किं तस्यां कक्षायां प्रत्येकं विद्यार्थिनः आयुः द्वादशवर्षात्मकम् अस्ति ? स्पष्टतः एतेषां प्रश्ननाम् उत्तरं नकारात्मकम् अस्ति ।

तदानीम् इमानि कथनानि अस्मान् किं बोधयन्ति ?

मध्यमानेन वयम् अधिगच्छामः यत् ईशा प्रायः एकस्मिन् दिने पञ्चहोराः यावत् पठति । कतिचित् दिनानि सा आभ्यः होराभ्यः न्यूनं पठति कतिचित् च दिनानि सा आभ्यः होराभ्यः अधिकं पठति ।

तद्वदेव चत्वारिंशद्-डिग्रीसेल्सियस्-परिमितमस्य मध्यमान-तापमानस्य अर्थः अस्ति यत् वर्षस्य अस्मिन् समये तापमानं प्रायः 40°C इति भवति । कदाचित् तत् 40°C इत्यस्मात् न्यूनं कदाचित् च 40°C अस्मात् अधिकं भवति ।

इत्थं वयम् एतद् अनुभवामः यद् मध्यमानम् एका एतादृशी संख्या विद्यते या प्रेक्षणानाम् अथवा दत्तांशानाम् एकस्य समूहस्य केन्द्रीयप्रवृत्तिं निरूपयति (अथवा दर्शयति) । यतोहि मध्यमानं सर्वेभ्यः न्यूनाधिकमूल्यस्य दत्तांशेषु भवति । अतः वयं कथयामः यत् मध्यमानं दत्तांशानाम् एकसमूहस्य केन्द्रीयप्रवृत्तेः मापकम् अस्ति । विभिन्नप्रकारकाणां दत्तांशानां व्याख्यां कर्तुं विभिन्नप्रकारकाणां प्रतिनिधिमानानाम् अथवा केन्द्रीयमानानाम् आवश्यकता भवति । एतेषु एकं प्रतिनिधिमानम् अङ्कगणितीयमाध्यम् अथवा समान्तरमाध्यम् अस्ति ।

3.5 अंकगणितीयमाध्यः

दत्तांशानाम् एकसमूहार्थम् अधिकांशतः प्रयुञ्जमानं प्रतिनिधिमानम् अङ्कगणितीयमाध्यः अस्ति, संक्षेपेण एषः माध्यः mean इति कथ्यते । एतं सम्यक्तया अवगन्तुम् आगच्छन्तु निम्नलिखितम् उदाहरणं पश्यामः

द्वयोः पात्रयोः क्रमशः विंशति-लीटरमितं षष्टि-लीटरमितं च दुग्धं विद्यते । यदि उभयोः पात्रयोः समानमात्रायां दुग्धं स्थापयामः तर्हि प्रत्येकं पात्रे कियत् दुग्धं भविष्यति ? यदा वयम् एतादृशं प्रश्नं पृच्छामः तदा वयम् अङ्कगणितीयं मध्यमाङ्कं ज्ञातुं कथयामः ।

उपर्युक्त-स्थितौ मध्यमानम् अथवा अङ्कगणितीयमध्यमाङ्कः भविष्यति :

$$\frac{\text{दुग्धस्यनिखिलमात्रा}}{\text{पात्राणांसङ्ख्या}} = \frac{20+60}{2} \text{ लीटर्} = 40 \text{ लीटर्}$$

अनेन प्रकारेण प्रत्येकं पात्रे चत्वारिंशल्लीटरमितं दुग्धं भविष्यति।

मध्यमानम् अथवा अङ्कगणितीयमाध्यः अथवा केवलमात्रं माध्यः निम्नलिखितरूपेण परिभाषितः क्रियते

$$\text{माध्यः} = \frac{\text{समेषां प्रेक्षणानां योगः}}{\text{प्रेक्षणानां सङ्ख्या}}$$

निम्नलिखितेषु उदाहरणेषु विचारं कुर्वन्तु :

उदाहरणम् 1 आशीषः क्रमागतेषु त्रिषु दिवसेषु क्रमशः 4 घण्टाः, 5 घण्टाः तथा च 3 घण्टाः यावत् पठति। तस्य प्रतिदिनम् अध्ययनस्य मध्यमानः समयः कः अस्ति ?

समाधानम् आशीषस्य अध्ययनस्य मध्यमानम् (औसत) समयः कः भविष्यति ?

$$\frac{\text{अध्ययने नियोजितः समयः}}{\text{दिनानां सङ्ख्यायेषु अध्ययनम् अभवत्}} = \frac{4+5+3}{3} \text{ घण्टाः} = 4 \text{ घण्टाः प्रतिदिनम्}$$

अनेन प्रकारेण वयं वक्तुं शक्नुमः यत् आशीषः प्रतिदिनं मध्यमानेन प्रतिदिनं 4 घण्टाः यावत् पठति।

उदाहरणम् 2 एकः क्रीडकः 6 पर्यायेषु (innings) निम्नलिखितान् धावनाङ्कान् अर्जितवान्

36, 35, 50, 46, 60, 55

एकस्मिन् क्रमे तेन अर्जितानां धावनाङ्कानां माध्यः ज्ञायताम्

समाधानम् आहत्य धावनाङ्काः $36+35+50+46+60+55 = 282$

माध्यं ज्ञातुं वयं सर्वेषां प्रेक्षणानां योगं कृत्वा तं योगं प्रेक्षणानां सकल-संख्यया विभक्तीकुर्मः। अतः अस्यां स्थितौ

$$\text{माध्यः} = \frac{282}{6} = 47$$

अनेन प्रकारेण एकस्मिन्क्रमे तेन अर्जितानां धावनाङ्कानां माध्यः सप्तचत्वारिंशद् (47) इति अस्ति।

अंकगणितीय-माध्यः कुत्र स्थितः वर्तते ?

प्रयासं कुर्वन्तु

भवन्तः अध्ययने व्यतीत-निजसमयस्य (होरासु) सम्पूर्णसप्ताहस्य मध्यमानं कथं ज्ञास्यन्ति ?

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

उपर्युक्तोदाहरणेषु प्रदत्तदत्तांशेषु विचारं कुर्वन्तु तथा च निम्नलिखितविषये चिन्तयन्तु :

- किं माध्यः प्रत्येकं प्रेक्षणात् दीर्घः अस्ति ?
- किं माध्यः प्रत्येकं प्रेक्षणात् ह्रस्वः अस्ति ?

निजमित्रैः सह चर्चां कुर्वन्तु। एतादृशम् एकम् अन्यत् उदाहरणं चिन्तयन्तु एतेषां च प्रश्नानाम् उत्तराणि ददतु।

भवन्तः प्राप्स्यन्ति यत् माध्यं दीर्घतम-ह्रस्वतम-प्रेक्षणानां मध्ये स्थितं भवति। विशिष्टरूपेण द्वयोः संख्ययोः माध्यं सदैव तयोः मध्ये स्थितं भवति।

उदाहरणार्थं पञ्चैकादशयोः (5, 11) माध्यम् = अष्टौ (8) इति अस्ति यत् पञ्चैकादशयोः मध्ये स्थितम् अस्ति।

किं भवन्तः अस्याः अवधारणायाः प्रयोगं कृत्वा एतत् दर्शयितुं शक्नुवन्ति यत् द्वयोः भिन्नात्मक-संख्ययोः यावतीः भिन्नात्मकसंख्याः इच्छामः तावत्यः ज्ञातुं शक्यन्ते ? उदाहरणार्थम् $\frac{1}{2}$ तथा च $\frac{1}{4}$ मध्ये भवतां कृते एतासां भिन्नात्मकसंख्यानाम् इति $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2}=\frac{3}{8}$ मध्यमानं मेलिष्यति = पुनश्च $\frac{1}{2}$ तथा च $\frac{3}{8}$ एतन्मध्ये आसां मध्यमानम् $\frac{7}{16}$ इति भविष्यति।

प्रयासं कुर्वन्तु

1.एकस्य सप्ताहस्य निजनिद्रायां व्यतीतसमयस्य (होरासु) माध्यं ज्ञायताम्

2. $\frac{1}{2}$ तथा च $\frac{1}{3}$ एतन्मध्ये न्यूनातिन्यूनं पञ्च संख्याः ज्ञायन्ताम्।

3.5.1 प्रसारः अथवा परिसरः

दीर्घतम-ह्रस्वतमयोः प्रेक्षणयोः भेदेन वयं प्रेक्षणानां प्रसारस्य विषये एकाम् ऊहां कर्तुं शक्नुमः। अयं दीर्घतमप्रेक्षणात् ह्रस्वतमप्रेक्षणं व्याकल्य ज्ञातुं शक्यते। वयम् एतं परिणामम् अङ्कानां प्रसारः अथवा परिसरः इति कथयामः।

अधोलिखितम् उदाहरणं पश्यन्तु :

उदाहरणम् 3 एकस्य विद्यालयस्य दशानाम् अध्यापकानाम् आयुः वर्षेषु एवम् अस्ति :
32, 41, 28, 54, 35, 26, 23, 33, 38, 40

(i) सर्वाधिकवयोमितस्य अध्यापकस्य आयुः किम् अस्ति ? तथा च सर्वन्यूनवयोमितस्य किम् अस्ति ?

(ii) अध्यापकानां वयसः परिसरः कः अस्ति ?

(iii) एतेषाम् अध्यापकानां माध्यायुः किम् अस्ति ?

समाधानम्

(i) आयुः आरोहिक्रमे व्यवस्थाप्य वयं प्राप्नुमः
23, 26, 28, 32, 33, 35, 38, 40, 41, 54
अस्माभिः ज्ञायते यत् सर्वाधिकवयोमितस्य अध्यापकस्य आयुः पञ्चचत्वारिंशद् वर्षात्मकम् अस्ति तथा च सर्वन्यूनवयोमितस्य अध्यापकस्य आयुः त्रयोविंशतिः वर्षात्मकम् अस्ति।

(ii) अध्यापकानाम् आयुषः परिसरः = (54-23) वर्षाणि = एकत्रिंशद् (31) वर्षात्मकः अस्ति।

(iii) अध्यापकानाम् माध्यायुः
$\frac{23+26+28+32+33+35+38+40+41+54}{10}$ = वर्षाणि

$= \frac{350}{10}$ वर्षाणि = 35 इति वर्षाणि।

प्रश्नावली 3.1

1. निजकक्ष्यायाः केषाञ्चिद् दश-विद्यार्थिनाम् औन्नतस्य परिसरः ज्ञायताम्।
2. कक्ष्यायाः एकस्मिन् मूल्याङ्कने लब्धान् निम्नलिखित-अङ्कान् एकस्मिन् सारणीबद्धरूपेण एकत्रीकुर्वन्तु

   4, 6, 7, 5, 3, 5, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 1, 9, 6, 5, 8, 4, 6, 7

   (i) दीर्घतमः अङ्कः कः अस्ति ? (ii) लघुतमः अंकः कः अस्ति ?

   (iii) एतेषाम् अङ्कानां परिसरः कः ? (iv) अङ्कगणितीयं माध्यं ज्ञायताम् ?
3. पञ्चनां प्रथम-पूर्णसंख्यानां माध्यं ज्ञायताम्।
4. एकः क्रिकेटक्रीडकः अष्टसु पर्यायेषु (क्रमेषु) निम्नलिखितान् धावनाङ्कान् अर्जितवान्

   58, 76, 40, 35, 46, 50, 0, 100.

   तस्य माध्यप्राप्ताङ्काः (score) ज्ञायन्ताम्।
5. निम्नलिखिता तालिका प्रत्येकं क्रीडकद्वारा चतसृसु क्रीडाप्रतियोगितासु अर्जितान् अङ्कान् दर्शयति।

क्रीडकः	क्रीडा 1	क्रीडा 2	क्रीडा 3	क्रीडा 4
A	14	16	10	10
B	0	8	6	4
C	8	11	न अक्रीडत्	13

अधुना प्रश्नानाम् उत्तराणि ददतु :

(i) प्रत्येकं क्रीडायां A द्वारा मध्यमानेन अर्जितान् अङ्कान् ज्ञातुं माध्यं ज्ञायताम्।

(ii) प्रत्येकं क्रीडायां C द्वारा अर्जितं माध्याङ्कं ज्ञातुं भवन्तः निखिलाङ्कान् त्रयेन (3) अथवा चतुर्भिः (4) भागं दास्यन्ति ? किमर्थम् ?

(iii) B सर्वासु क्रीडास्पर्धासु भागं गृह्णाति। भवन्तः तस्य अङ्कानां माध्यं कथं ज्ञास्यन्ति ?

(iv) कस्य क्रीडकस्य प्रदर्शनं सर्वश्रेष्ठम् अस्ति ?

6. विज्ञानस्य एकस्यां परीक्षायां विद्यार्थिनाम् एकसमूहद्वारा शतात् प्राप्ताङ्काः 85, 76, 90, 85, 39, 48, 56, 95, 81 तथा च 75 सन्ति। ज्ञायताम् -

(i) विद्यार्थिभिः प्राप्तः अधिकतमः अङ्कः न्यूनतमः च अङ्कः

(ii) प्राप्तानाम् अङ्कानां परिसरः

(iii) समूहेन प्राप्तः माध्याङ्कः

7. षट्सु क्रमागतवर्षेषु एकस्मिन् विद्यालये विद्यार्थिनां संख्या निम्नलिखिता आसीत् :

1555, 1670, 1750, 2013, 2540, 2820

अस्मिन् समयावधौ विद्यालयस्य विद्यार्थिनां माध्यसङ्ख्या ज्ञायताम् ।

8. कस्मिंश्चित् नगरे कस्मिंश्चित् विशेषसप्ताहे सप्तदिनेषु जातवृष्टिः (mm मध्ये) निम्नलिखितरूपेण अभिलिखिता

दिनम्	सोमवासरः	मङ्गलवासरः	बुधवासरः	बृहस्पतिवासरः	शुक्रवासरः	शनिवासरः	रविवासरः
वृष्टिः (mm)	0.0	12.2	2.1	0.0	20.5	5.5	1.0

(i) उपर्युक्तेभ्यः अङ्केभ्यः वृष्टेः परिसरः ज्ञायताम् ।

(ii) अस्य सप्ताहस्य माध्यवृष्टिः ज्ञायताम् ।

(iii) कतिषु दिनेषु वृष्टिः माध्यवर्षातः न्यूना आसीत् ?

9. 10 बालिकानाम् औन्नत्यानि से.मी. (cm) मध्ये मापितानि, निम्नलिखिताः च परिणामाः प्राप्ताः

135,150,139,128,151,132,146,149,143,141.

(i) दीर्घतमायाः बालिकायाः औन्नत्यं किम् अस्ति ?

(ii) ह्रस्वातमायाः बालिकायाः औन्नत्यं किम् अस्ति ?

(iii) एतेषाम् अङ्कानां परिसरः कः अस्ति ?

(iv) बालिकानां माध्य-औन्नत्यम् (दीर्घता) किम् अस्ति ?

(v) कतीनां बालिकानां दीर्घता माध्यदीर्घतातः अधिका अस्ति ?

3.6 बहुलकः

यथा अस्माभिः पूर्वं सूचितं यत् केवलं माध्यः एव केन्द्रीयप्रवृत्तेः मापः अथवा प्रतिनिधि-मानं नास्ति । विभिन्नाः आवश्यकताः अनुसृत्य अन्यविध-केन्द्रीयप्रवृतेः मापकानां प्रयोगः क्रियते ।

निम्नलिखितानि उदाहरणानि पश्यन्तु

युतकानां विभिन्नमापनानां साप्ताहिकीं याचनां परिज्ञातुम् एकः आपणिकः नवति-पञ्चनवति-शत-पञ्चाधिकशत-दशाधिकशत-सेण्टीमीटर्-मितमापयुतानां (90 सेण्टीमीटर्,95 से.मी., 100 से.मी., 105से. मी. 110 से.मी.) युतकानां विक्रयणस्य अभिलेखं स्थापयति । एकस्य सप्ताहस्य अभिलेखः एवम् अस्ति -

परिमापः (से.मी.मध्ये)	90	95	100	105	110	योगः
विक्रीतानां युतकानां संख्या	8	22	32	37	6	105

यदि सः विक्रीतानां युतकानां संख्यायाः माध्यं ज्ञातुं प्रयतते तर्हि किं भवन्तः विचारयन्ति यत् सः एतं निर्णयं स्वीकर्तुं शक्ष्यति यत् कस्य मापस्य युतकाः सञ्चये (stock) स्थापनीयाः ?

$$\text{विक्रीतानां युतकानां माध्यः} = \frac{\text{विक्रीतानां युतकानाम् अखिलसङ्ख्या}}{\text{विभिन्नपरिमाणानांयुतकानांसङ्ख्या}} = \frac{105}{5} = 21$$

किं सः प्रत्येकं परिमाणस्य एकविंशतिं युतकानि सञ्चये (stock) स्थापयेत् ? यदि सः एवं करोति तर्हि किं सः स्वकीयग्रहाकणाम् आवश्यकतां पूरयिष्यति ?

उपर्युक्तम् अभिलेखं दृष्ट्वा आपणिकः पञ्चनवति-शत-पञ्चाधिकशतसेण्टीमीटर्-मितमापयुतानि

युतकानि याचयितुं निर्णयति। सः अन्य-परिमाण-युतकानां याचनानिर्णयं तेषां ग्राहकाणां न्यूनसंख्यां दृष्ट्वा किञ्चित्-कालाय स्थगयति।

एकम् अन्यत् उदाहरणं पश्यन्तु

निर्मित-वस्त्राणाम् एकः आपणिकः वदति यत् ''मया सर्वाधिकमापयुक्तानां विक्रीतानां युतकानां परिमापः नवति-सेण्टीमीटर्-परिमितम् अस्ति। अवधानं यच्छन्तु अत्रापि आपणिकस्य रूचिः विभिन्नपरिमाणानां विक्रीत-युतक-संख्यासु एव अस्ति। सः युतककस्य तं मापं पश्यन् अस्ति यस्य सर्वाधिकं विक्रयणं भवति। एतद्दत्तांशानाम् एकम् अन्यं प्रतिनिधिमानम् अस्ति। सर्वाधिक-विक्रयणं पञ्चाधिकैकशतसेण्टीमीटर्-परिमितमापस्य युतकानां वर्तते। एतत्पञ्चोत्तर-एकशतम् (105) प्रतिनिधिमानं दत्तांशानां **बहुलकः** इति कथ्यते।

दत्तानां प्रेक्षणानाम् एकस्मिन् समूहे सर्वाधिकवारम् आगम्यमानं प्रेक्षणम् अस्य समूहस्य बहुलकः कथ्यते।

उदाहरणम् 4 निम्नलिखितानां संख्यानां बहुलकः ज्ञायताम् ....
1, 1, 2, 4, 3, 2, 1, 2, 2, 4

समाधानम् समानमानयुताः संख्याः युगपद् व्यवस्थाप्य वयं प्राप्नुमः
1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4

एतेषां दत्तांशानां बहुलकः द्वे (2) अस्ति यतः एतद् अन्य-प्रेक्षणानाम् अपेक्षया अधिकवारम् आगच्छति।

प्रयासं कुर्वन्तु

निम्नलिखितानां बहुलकः ज्ञायताम्

(i) 2,6,5,3,0,3,4,3,2,4,5,2,4

(ii)2,14,16,12,14,14,16,14,10,14,18,14

3.6.1 दीर्घाङ्कानां बहुलकः

यदि प्रेक्षणानां संख्या दीर्घा भवेत् तर्हि तासां समानमानीयप्रेक्षणानां रूपेण व्यवस्थीकरणं पुनश्च तासां गणनं सरलं न भवति। एतादृशीसु स्थितिसु वयम् अङ्कान् सूचीबद्धान् कुर्मः यथा भवन्तः गतकक्ष्यायां कृतवन्तः सन्ति। अङ्कानां सूचीनिर्माणस्य कार्यं मेलनचिह्नेभ्यः आरम्भं कुर्वन्तः प्रेक्षणानाम् आवृत्तिम् निर्माय पूर्णं कर्तुं शक्नुमः।

इमानि उदाहरणानि पश्यन्तु -

उदाहरणम् 5 दलानाम् एकस्मिन् समूहे क्रीडितेषु पादकन्दुकप्रतियोगिताद्वन्द्वेषु विजयान्तराणि पर्यायेषु निम्नलिखितानि सन्ति -
1,3,2,5,1,4,6,2,5,2,2,2,4,1,2,3,1,1,2,3,2,6,4,3,2,1,
1,4,2,1,5,3,3,2,3,2,4,2,1,2
एतेषाम् अङ्कानां बहुलकः ज्ञायताम्।

समाधानम् आगच्छन्तु एतान् अङ्कान् सूचीबद्धरूपेण स्थापयामः

विजयात् परम्	मेलनचिह्नम्	प्रतियोगितानां संख्या
1	𝍸 ||||	9
2	𝍸 𝍸 ||||	14
3	𝍸 ||	7
4	𝍸	5

5	III	3
6	II	2
	योगः	40

एतां तालिकां दृष्ट्वा वयं सद्यः एव एतद् वक्तुं शक्नुमः यद्द्वौ (2) इति बहुलकःअस्ति यतोहि द्वि बहु वारं आगतम् अस्ति। अनेन प्रकारेण अधिकांशातः प्रतियोगिताः **2 (गोलों) अन्तरेण द्वयेन जीताः** सन्ति।

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

किं संख्यानाम् एकस्मिन् समूहे द्वौ बहुलकौ भवितुम् अर्हतः।

उदाहरणम् 6 निम्नलिखितानां सङ्ख्यानां बहुलकः ज्ञायताम् :
2,2,2,3,3,4,5,5,5,6,6,8

समाधानम् अत्र द्वे (2) तथा च पञ्च (5) उभे एव त्रिवारम् आगते स्तः। अतः उभे एव अङ्कानां बहुलके स्तः

कुर्वन्तु

1. स्वीय-कक्ष्यायाः सहपाठिनाम् आयुः वर्षेषु अभिलिखतु पुनः च तेषां बहुलकः ज्ञायताम्।
2. स्वीय-कक्ष्यायाः सहपाठिनां दीर्घतां सेण्टीमीटर्-परिमाणे अभिलिखतु तेषां च बहुलकं ज्ञायताम्।

प्रयासं कुर्वन्तु

1. निम्नलिखितानाम् अङ्कानां बहुलकः ज्ञायताम् -
   12,14,12,16,15,13,14,18,19,12,14,15,16,15,16,16,15,17,13,16,16,15,
   15,13,15,17,15,14, 15,13,15,14
2. 25 बालानाम् औन्नत्यं सेण्टीमीटर्-परिमाणे अधः प्रदत्तम् अस्ति -
   168,165,163,160,163,161,162,164,163,162,164,163,160,163,160,165,163,162,163,164,163,160,
   165,163,162
   तेषां दीर्घतायाः बहुलकः कः अस्ति ? अत्र वयं बहुलकेन किम् अवगच्छामः?

यत्र माध्यः अस्माकं कृते अङ्कानां सर्वप्रेक्षणानां मध्यमानं प्रददाति तत्र बहुलकः दत्तांशेषु सर्वाधिकवारं आगम्यमानं प्रेक्षणं दर्शयति।

आयान्तु निम्नलिखितेषु उदाहरणेषु विचारं कुर्म -

(a) भवद्भिः एकस्मिन् प्रीतिभोज-कार्यक्रमे आहूतेभ्यः पञ्चविंशत्यै व्यक्तिभ्यः आवश्यकरोटिकानां संख्यायाः विषये निर्णयः स्वीकर्त्तव्यः अस्ति।

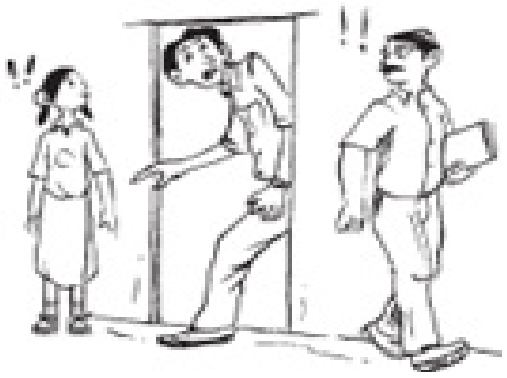
(b) एकेन युतक-विक्रेत्रा आपणिकेन स्वीय-संग्रहस्य आपूर्तिः करणीया अस्ति ।

(c) अस्माभिः स्वगृहस्य कृते आवश्यक-द्वारस्य औन्नत्यं ज्ञातव्यम्।

(d) यदि एकस्यां भ्रमणयात्रायां गमनकाले प्रत्येकं व्यक्त्यै केवलम् एकमेव फलं क्रेतव्यं भवेत्तदा अस्मभ्यं कतमत् फलं प्राप्स्यते ?

एतादृशीषु स्थितिषु वयं कस्मिन् बहुलकस्य एकोत्तमेन आकलनरूपेण प्रयोगं कर्तुं शक्नुमः ?

प्रथमे कथने विचारं कुर्वन्तु । कल्पनां कुर्वन्तु यत् प्रत्येकं जनाय आवश्यक-रोटिकानां सङ्ख्या एवम् अस्ति - 2,3,2,3,2,1,2,3,2,2,4,2,2, 3,2,4,4,2,3,2,4,2,4,3,5



एतेषां दत्तांशानां बहुलकः द्वे रोटिके स्तः । यदि वयं बहुलकस्य प्रयोगं अङ्कानां प्रतिनिधिमानरूपेण कुर्म तर्हि अस्मभ्यं प्रत्येकं व्यक्त्यै रोटिकाद्वयमानेन पञ्चविंशत्यै व्यक्तिभ्यः केवलं पञ्चाशद्-रोटिकानाम् आवश्यकता भविष्यति । परन्तु निश्चयेन एताः रोटिकाः सर्वाभ्यः व्यक्तिभ्यः अपर्याप्ताः भविष्यन्ति । अस्यां स्थितौ किं माध्यः एकम् उपयुक्तं प्रतिनिधिमानं भविष्यति ?

तृतीय-कथनाय द्वारस्य औन्नत्यं तासां व्यक्तीनाम् औन्नत्येन सम्बन्धितं वर्तते याः तस्य उपयोगं करिष्यन्ति । चिन्तयन्तु यत् गृहे पञ्च बालकाः चत्वारः च वयस्काः सन्ति, ये तस्य द्वारस्य प्रयोगं कुर्वन्ति पञ्चसु बालकेषु प्रत्येकं बालकस्य औन्नत्यं प्रायशः पञ्चत्रिंशदधिकैकशतसेण्टीमीटर्-परिमितम् अस्ति । औन्नत्यानां बहुलकः पञ्चत्रिंशदधिकैकशतम् (135) अस्ति । किम् अस्माभिः एतादृशं द्वारं क्रेतव्यं यस्य औन्नत्यं 144 सेण्टीमीटरपरिमितम् अस्ति ? किं सर्वेऽपि वयस्काः अस्मात् द्वारात् निर्गन्तुं शक्ष्यन्ति ? एतत् स्पष्टम् अस्ति यद् एतेभ्यः दत्तांशेभ्यः अपि बहुलकः एकम् उपयुक्तं प्रतिनिधिमानं नास्ति । किम् अत्र माध्यम् एकम् उपयुक्तं प्रतिनिधिमानं भविष्यति ?

किमर्थं न ? द्वारस्य औन्नत्य-विषये निर्णयं स्वीकर्तुम् औन्नत्यस्य कस्य प्रतिनिधिमानस्य प्रयोगः क्रियताम् ?

इत्थमेव अवशिष्टकथनानां विषये अपि विश्लेषणं कुर्वन्तु अथ च एतासां स्थितीनां कृते उपयुक्तं प्रतिनिधिमानं ज्ञायताम् ।

प्रयासं कुर्वन्तु

स्वीयैः मित्रैः सह चर्चां कुर्वन्तु

द्वे स्थिती ददतु यत्र प्रतिनिधिमानरूपेण माध्यस्य प्रयोगः उपयुक्तः भविष्यति ।

द्वे स्थिती ददतु यत्र प्रतिनिधिमानरूपेण बहुलकस्य प्रयोगः उपयुक्तः भविष्यति ।

3.7 माध्यकः

वयं दृष्टवन्तः स्मः यत् कासुचित् स्थितिषु अङ्कगणितीय-माध्यः केन्द्रीयप्रवृत्तेः एकम् उपयुक्तं मापकम् अस्ति कासुचित् च स्थितिषु बहुलकः केन्द्रीयप्रवृत्तेः एकम् उपयुक्तं मापकम् अस्ति । आयान्तु अधुना एकम् अन्यद् उदाहरणं पश्याम । सप्तदशविद्यार्थिनाम् एकस्य समूहस्य विषये विचारं कुर्वन्तु येषाम् औन्नत्यम् सेण्टीमीटर्-परिमाणे निम्नलिखितम् अस्ति :

106,110,123,125,117,120,112,115,110,120,115,102,115,115,109,115,101

क्रीडा-अध्यापिका कक्ष्याम् एतादृशयोः द्वयोः समूहयोः विभाजयितुम् इच्छति यत् प्रत्येकं समूहे विद्यार्थिनां संख्या समाना स्यात्तथा च एकस्मिन् समूहे विद्यार्थिनाम् औन्नत्यानि एकस्मात् विशिष्टाद् औन्नत्यात् न्यूनानि स्युः तथा च अपरस्मिन् समूहे विद्यार्थिनाम् औन्नत्यानि तस्माद् विशिष्टाद् औन्नत्याद् अधिकानि स्युः । सा एतत् करिष्यति ?

आयान्तु तस्याः पार्श्वे ये विभिन्नाः विकल्पाः सन्ति तान् पश्यामः -

(i) सा माध्यं ज्ञातुं शक्नोति। माध्यम् एतद् अस्ति :

$$\frac{106+110+123+125+117+120+112+115+110+120+115+102+115+115+109+115+101}{17}$$

$$= \frac{1930}{17} = 113.5$$

अतः अध्यापिका कक्ष्यायाः विद्यार्थिनः यदि एतादृशयोः द्वयोः समूहयोः विभक्तीकरोति ययोः एकस्मिन् समूहे माध्य-औन्नत्याद् अल्पोन्नताः विद्यार्थिनः सन्ति अथ च द्वितीयसमूहे माध्य-औन्नत्याद् अधिकोन्नताः विद्यार्थिनः सन्ति। तदानीम् एतयोः समूहयोः विद्यार्थिनां संख्या समाना न तिष्ठति यतोहि एकस्मिन् समूहे सप्त सदस्याः भविष्यन्ति द्वितीयसमूहे च दश सदस्याः भविष्यन्ति।

(ii) तस्याः पार्श्वे द्वितीयः विकल्पः अस्ति यत् सा बहुलकं जानीयात्। सर्वाधिकानाम् आवृत्तीनां प्रेक्षणम् 115 से.मी. इति अस्ति अयं च बहुलकः भविष्यति।

बहुलकाद् अधः सप्त विद्यार्थिनः सन्ति तथा च दश विद्यार्थिनः बहुलकस्य समानाः अथवा ततः उपरि सन्ति। अतः वयं कक्ष्यायाः विद्यार्थिनः द्वयोः समानसमूहयोः विभाजयितुं न शक्नुमः।

अतः आगच्छन्तु अधुना वयम् एकस्य अन्य-वैकल्पिक-प्रतिनिधिमानस्य अथवा केन्द्रीयप्रवृत्तेः मापकस्य विषये चिन्तयिष्यामः। एतत् कर्तुं वयं पुनः प्रदत्तानि औन्नत्यानि (से.मी.मध्ये) पश्यामः तथा च एतानि औन्नत्यानि आरोहिक्रमे व्यवस्थापयामः। वयं निम्नलिखितं प्रेक्षणं प्राप्नुमः

101,102,106,109,110,110,112,115,115,115,115,115,117,120,120,123,125

एतेषु अङ्केषु मध्यमानम् (middle-value) पञ्चदशाधिकैकशतम् (115) अस्ति,यतोहि एतद् विद्यार्थिनः द्वयोः समानयोः समूहयोः विभाजयति यस्मिन् प्रत्येकं समूहे अष्टौ विद्यार्थिनः सन्ति। एतत् मानम् अङ्कानां माध्यकः (median) इति कथ्यते। माध्यकः तन्मानं बोधयति यद् अङ्कानां मध्ये स्थितं भवति (तान् आरोहिक्रमे अथवा अवरोहिक्रमे व्यवस्थाप्य) तथा च अर्ध-प्रेक्षणानि अस्माद् अधिकमानयुतानि भवन्ति अर्ध-प्रेक्षणानि च अस्मात् न्यूनमानयुतानि भवन्ति। क्रीडाध्यापिका एतं मध्यस्थं विद्यार्थिनम् अस्याः क्रीडायाः निर्णायकं घोषयितुं शक्नोति। अत्र वयं केवलं ताः एव स्थितीः स्वीकरिष्यामः यत्र प्रेक्षणानां संख्या विषमा अस्ति।

प्रयासं कुर्वन्तु

भवताम् एकेन मित्रेण प्रदत्तानाम् अङ्कानां माध्यकं बहुलकं च ज्ञातम्। मित्रेण कृता त्रूटिः यदि काचित् भवेत् तदा वदन्तु शुद्धं च कुर्वन्तु -

35,32,35,42,38,32,34

माध्यकः = 42, बहुलकः = 32

इत्थं प्रदत्तान् दत्तांशान् आरोहिक्रमे अथवा अवरोहिक्रमे व्यवस्थीकृत्य तेषां मध्यस्थं मानं माध्यकः इति भवति।

अवधानं यच्छन्तु यत् सामान्यतः वयं माध्यकार्थं बहुलकार्थं च एकमेव मानं नैव प्राप्स्यामः। आयान्तु कानिचिद् उदाहरणानि पश्यामः

उदाहरणम् 7 निम्नलिखितानां दत्तांशानां माध्यकः ज्ञायताम् -

24,36,46,17,18,25,35

समाधानम् दत्तांशान् आरोहिक्रमे व्यवस्थीकृत्य वयं प्राप्नुमः

17,18,24,25,35,36,46

मध्यस्थं प्रेक्षणं माध्यकः इति भवति। अतः माध्यकः पञ्चविंशतिः (25) अस्ति।

प्रश्नावली 3.2

1. गणितस्य एकस्यां परीक्षायां पञ्चदशभिः विद्यार्थिभिः पञ्चविंशति-पूर्णाङ्केषु प्राप्ताः अङ्काः निम्नलिखिताः सन्ति :

   19,25,23,20,9,20,15,10,5,16,25,20,24,12,20

   एतेषाम् दत्तांशानां बहुलकः माध्यकः च ज्ञायेताम्। किम् एतौ समानौ स्तः ?
2. एकस्यां क्रिकेटस्पर्धायां क्रीडकैः अर्जिताः धावनाङ्काः एवं सन्ति -

   6,15,120,50,100,80,10,15,8,10,15

   एतेषां माध्यः, बहुलकः माध्यकः च ज्ञायताम्। किम् एतत्त्रयं समानम् अस्ति ?
3. एकस्याः कक्ष्यायाः पञ्चदश-विद्यार्थिनां भारः (कि.ग्रा. मध्ये) एवम् अस्ति -

   38,42,35,37,45,50,32,43,43,40,36,38,43,38,47

   (i) एतेषाम् दत्तांशानां बहुलकः माध्यकः च ज्ञायताम्।

   (ii) किम् एतेषाम् एकाधिकाः बहुलकाः सन्ति ?
4. निम्नलिखितानां दत्तांशानां बहुलकः माध्यकः च ज्ञायताम् ---

   13,16,12,14,19,12,14,13,14
5. उच्यतां यत् निम्नलिखितानि कथनानि सत्यानि असत्यानि वा ----

   (i) बहुलकः दत्तांशेषु सदैव एका संख्या भवति।

   (ii) माध्यः प्रदत्त-दत्तांशेषु एका संख्या भवितुं शक्नोति।

   (iii) माध्यकः दत्तांशेषु सदैव एका संख्या भवति।

   (iv) 6,4,3,8,9,12,13,9 दत्तांशानां माध्यः नव (9) अस्ति।

3.8 भिन्नोद्देश्येन सह दण्डालेखानां प्रयोगः

गतवर्षे वयं दृष्टवन्तः स्मः यत् कथम् एकत्रीकृताः (संगृहीताः) सूचनाः एकस्याम् आवृति-विभाजन-तालिकायाः रूपेण आदौ व्यवस्थीकृत्य पुनश्च एताः सूचनाः चित्रीयरूपेण चित्रालेखानां दण्डालेखानाम् (bar graphs) च रूपेण निरूप्यन्ते। भवन्तः एतान् दण्डालेखान् द्रष्टुं शक्नुवन्ति तथा च एतेषां विषये निष्कर्षम् अपि निष्कासयितुं शक्नुवन्ति । भवन्तः एतान् दण्डालेखान् आधारीकृत्य सूचनाः अपि प्राप्तुं शक्नुवन्ति। उदाहरणार्थं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् उन्नततमः दण्डः (bar) एव बहुलकः अस्ति, यदि दण्डावृत्तिं (निरन्तरतां) निरूपयति।

3.8.1 एकस्याः मापिकायाः (अथवा मापदण्डस्य) चयनम्

वयं जानीमः यत् दण्डालेखः समानविस्तृतियुक्तैः दण्डैः संख्यानां (अङ्कानाम्) निरूपणम् अस्ति तथा च दण्डानां दीर्घताः आवृत्ति-चितमापिकायोः उपरि आश्रयन्ति। उदाहरणार्थम् एकस्मिन् दण्डालेखे यत्र संख्याः घटकेषु प्रकटनीयाः सन्ति, आलेखः एकस्मै प्रेक्षणाय एकाङ्कदीर्घतां निरूपयति तथा च यदि तेन संख्याः दशकेन अथवा शतकेन दर्शनीयाः सन्ति, तदा एकाङ्कदीर्घता दश अथवा शतं प्रेक्षणानि निरूपयितुं शक्नोति। निम्नलिखितेषु उदाहरणेषु विचारं कुर्वन्तु -

उदाहरणम् 8 षष्ठ-सप्तम्योः कक्ष्ययोः द्विशतं (200) विद्यार्थिनः तेषां मनोऽभिलषितवर्णानां नामानि वक्तुम् उक्ताः येन हि अयं निर्णयः स्वीकर्तुं शक्येत यत् तेषां विद्यालयीय-भवनस्य कः वर्णः भवेत्। अस्य परिणामाः निम्नलिखितायां तालिकायां दर्शिताः सन्ति। एतानि तथ्यानि एकेन दण्डालेखेन निरूपयन्तु।

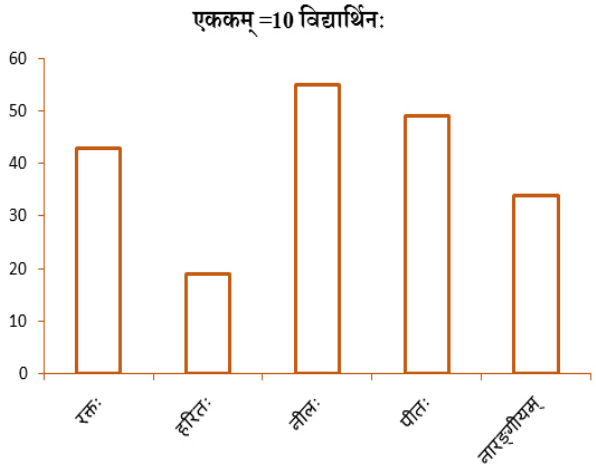
मनोभिलषितवर्णः	रक्तः	हरितः	नीलः	पीतः	नारङ्गः
विद्यार्थिनां संख्या	43	19	55	49	34

अस्य दण्डालेखस्य साहाय्येन निम्नलिखितानां प्रश्नानाम् उत्तराणि यच्छन्तु -

(i) कतमः वर्णः सर्वाधिकम् प्रियः कतमश्च वर्णः सर्वाधिकः अप्रियः अस्ति ?

(ii) आहत्य कति वर्णाः सन्ति ? ते के सन्ति ?

समाधानम् एकाम् उपयुक्तां मापिकाम् अधोदर्शितानुसारेण चिन्वन्तु -



मापकस्य आरम्भं शून्यात् कुर्वन्तु। दत्तांशेषु महत्तमं मानं पञ्चपञ्चाशत् (55) अस्ति । अतः मापिकां पञ्चपञ्चाशत्तः (55 तः) किञ्चिद् अधिकं मत्वा षष्टिपर्यन्तं समापयामः । अक्षोपरि समानविभाजनानां प्रयोगं कुर्वन्तु, यथा दशानां वृद्धयः । भवन्तः जानन्ति यत् सर्वे दण्डाः शून्यषष्ट्योः (0 तथा च 60) मध्ये स्थिताः भविष्यन्ति। वयं मापिकायाः चयनम् एवं करिष्यामः येन शून्यषष्ट्योः (0 तथा 60) मध्यगत-दीर्घता नैव तु अधिक-लघ्वी भवेत् नैव च अधिक-बृहती भवेत् । अत्र वयं एककम् (एकाङ्कम्) = दश (10) विद्यार्थिनः इति स्वीकुर्मः ।

पुनः वयम् आकृत्यां दर्शितानुसारेण दण्डालेखम् अलिखाम नामाङ्कितं च कुर्मः ।

दण्डालेखेन वयं निष्कर्षं निष्कास्यामः यत्

(i) नीलवर्णः सर्वाधिकः प्रियः वर्णः अस्ति (यतोहि नीलवर्णस्य प्रदर्शकः दण्डः उन्नततमः अस्ति)

(ii) हरितवर्णः सर्वाधिकः अप्रियः वर्णः अस्ति। (यतोहि हरितवर्णस्य प्रदर्शकः दण्डः लघुतमः अस्ति)

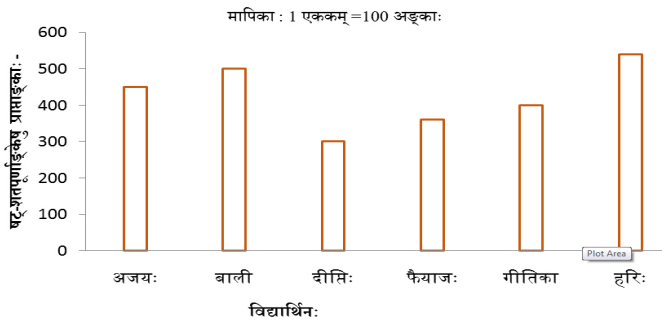
(iii) अत्र पञ्च वर्णाः सन्ति। रक्तः, हरितः, नीलः, पीतः नारङ्गः च (एते क्षैतिजाक्षे द्रष्टुं शक्यन्ते)।

उदाहरणम् 9 अधोलिखित-दत्तांशाः कस्याश्चित् कक्ष्यायाः षड्-विद्यार्थिभिः षट्-शतपूर्णाङ्केषु सम्पूर्णप्राप्ताङ्कान् दर्शयन्ति। एतान् दत्तांशान् एकेन दण्डालेखेन निरूपयन्तु।

विद्यार्थिनः	अजयः	बाली	दीप्तिः	फ़ैयाजः	गीतिका	हरिः
प्राप्ताङ्काः	450	500	300	360	400	540

समाधानम्

1. एकाम् उपयुक्तां मापिकाम् अवचेतुं वयं शतस्य (100) वृद्धीः स्वीकुर्वन्तः समानविभाजनाक्षस्य उपरि अङ्कितं कुर्मः । अनेन प्रकारेण एककम् (1) शतम् अङ्कान् निरूपयिष्यति । (यदि वयम् एकेन एककेन दश अङ्कान् निरूपयामः तर्हि किं काठिन्यं भविष्यति ?
2. अधुना दत्तांशान् दण्डालेखेन निरूपयन्तु।



दण्डद्वयालेखस्य कर्षणम् (निरूपणम्)

दत्तांशानाम् अधोलिखितयोः द्वयोः समूहयोः विषये विचारं कुर्वन्तु यौ आबेरदीनं तथा च मारगेटः इति द्वयोः नगरयोः मध्ये वर्षस्य सर्वेभ्यः द्वादशमासेभ्यः आतपस्य मध्यमानेन दैनिकहोराः दर्शयतः। एते नगरे दक्षिणीध्रूवस्य निकटे स्थिते स्तः । अतः एव अत्र प्रतिदिनम् आतपः अत्यधिकं न्यून-होराः यावद् दृश्यते।

मापगेट्मध्ये												
	जन	फर.	मार्च्	अप्रैल्	मई	जून:	जुलाई	अग.	सितं.	अक्तू.	नव.	दिस.
आतपस्य माध्याः होराः	2	$3\frac{1}{4}$	4	4	$7\frac{3}{4}$	8	$7\frac{1}{2}$	7	$6\frac{1}{4}$	6	4	2

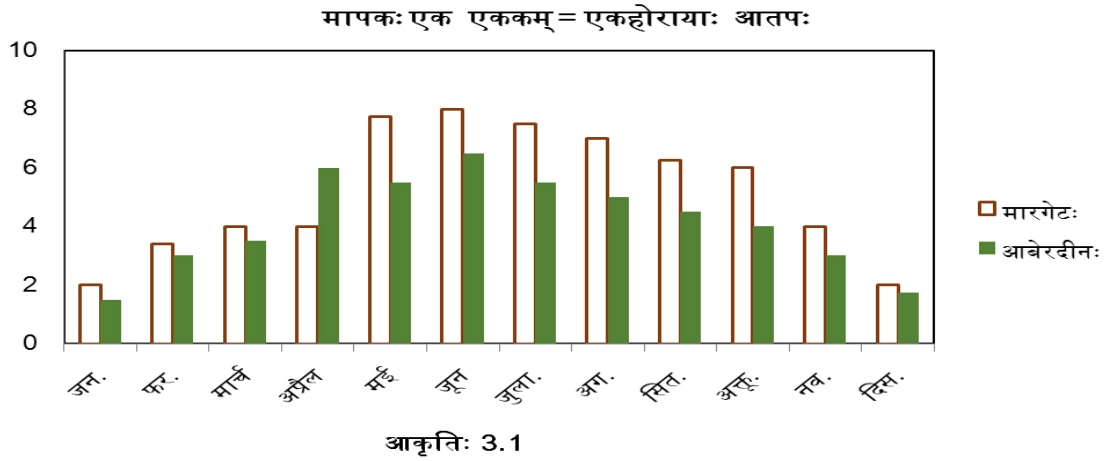
आबेरदीन्-मध्ये												
आतपस्य माध्याः होराः	$1\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	6	$5\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	5	$4\frac{1}{2}$	4	3	$1\frac{3}{4}$

अस्य पृथक्–पृथक् दण्डालेखम् आलिख्य भवन्तः निम्नलिखितप्रकारकाणां प्रश्नानाम् उत्तराणि दातुं शक्नुवन्ति

(i) प्रत्येकं नगरे कस्मिन् मासे अधिकतमः आतपः भवति ? अथवा

(ii) प्रत्येकं नगरे कस्मिन् मासे न्यूनतमः आतपः भवति ?

परन्तु 'एकस्मिन् विशिष्टे मासे कस्मिन् नगरे आतपः अधिकं कालं यावत् वर्तते ?' इत्येतादृशानां प्रश्नानाम् उत्तराणि दातुम् अस्माकं कृते उभयोः नगरयोः मध्यमान-आतपस्य होराणां तुलनायाः आवश्यकता भविष्यति। एतदर्थं वयं तान् आलेखान् आलेखितुम् अधिगमिष्यामः यान् 'द्विदण्डालेखः' (double bar graphs) इति कथयामः। एषु उभयोः नगरयोः सूचना दण्डालेखैः युगपद् एव दीयते।

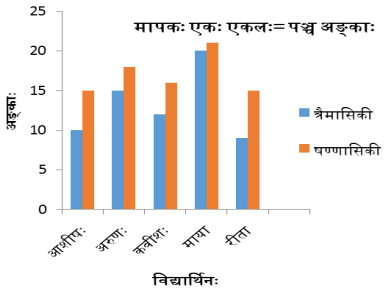


आकृतिः 3.1

उपरि प्रदत्तः दण्डालेखः (आकृति 3.1) उभयोः नगरयोः मध्यमान-आतपस्य समयं दर्शयति। अस्मिन् प्रत्येकं मासस्य कृते अस्माकं पार्श्वे द्वौ दण्डौ स्तः ययोः औन्नत्यानि प्रत्येकं नगरस्य मध्यमान-आतपस्य होराः दर्शयन्ति। अनेन वयम् एतं निष्कर्षं प्राप्तुं शक्नुमः यत् अप्रैलमासं विहाय अन्येषु सर्वेषु मासेषु मारगेटे आबेरदीनस्य अपेक्षया सदैव आतपः अधिकः भवति। भवन्तः एतादृशं दण्डालेखं स्वनगरस्य क्षेत्रस्य वा कृते निर्मान्तुं शक्नुवन्ति।

आगच्छन्तु एकम् अन्यद् उदाहरणं स्वीकुर्मः, यत् अस्माभिः सह अधिकं सम्बन्धितम् अस्ति।

उदाहरणम् 10 गणितस्य अध्यापिका एतत् ज्ञातुम् इच्छति यत् त्रैमासिक्याः परीक्षायाः परं तया शिक्षणे अङ्गीकृतस्य नूतनप्रविधेः कश्चन प्रभावः सञ्जातः अथवा न। सा पञ्चभिः अतीव मन्दबुद्धिविद्यार्थिभिः त्रैमासिकपरीक्षायां पञ्चविंशतिपूर्णाङ्केषु अथ च षण्मासिकपरीक्षायां पञ्चविंशतिपूर्णाङ्केषु प्राप्तान् अङ्कान् स्वीकरोति ये एवं सन्ति -



विद्यार्थिनः	आशीषः	अरूणः	कवीशः	माया	रीता
त्रैमासिकी	10	15	12	20	9
षाण्मासिकी	15	18	16	21	15

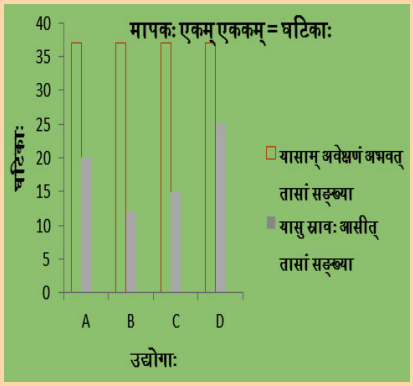
समाधानम् प्रथमं सा संलग्नायाम् आकृत्यां निर्दिष्टानुसारम् एकं द्विदण्डालेखम् आलिखति। दण्डान् दृष्ट्वा अनुमीयते यत् विद्यार्थिनां प्रदर्शने बहु संशोधनं जातम् अस्ति। अतः सा निर्णयति यत् तया स्वकीयः नूतनः प्रविधिः अग्रे अपि ग्राह्यः। किं भवन्तः कतिपयानाम् अन्यस्थितीनां विषये विचारयन्ति यासु भवन्तः द्विदण्डालेखानां प्रयोगं कर्तुं शक्नुवन्ति।

प्रयासं कुर

1. प्रदत्तः दण्डालेखः(आकृतिः3.2), विभिन्नैः उद्योगैः निर्मितानां जलप्रतिरोधिघटिकानां निरीक्षणाय कृतम् एकं सर्वेक्षणं दर्शयति। एतेषु प्रत्येकम् उद्योगः एतद् घोषयति यत् तेषां घटिकाः जलप्रतिरोधिन्यः सन्ति। एकस्य सर्वेक्षणस्य अन्तरम् उपर्युक्ताः परिणामाः समक्षम् आगताः।

   (a) किं भवन्तः प्रत्येकम् उद्योगार्थं स्यन्दमानघटिकानां सङ्ख्यायाः परीक्षितानां सम्पूर्णघट्टीकानां संख्यया भिन्नं निर्मातुं शक्नुन्ति ?

   (b) अनेन आधारेण किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् कस्य उद्योगस्य घटिकाः सर्वोत्तमाः सन्ति ?



2. 1995, 1996, 1997 तथा च 1998 तमवर्षेषु आङ्ग्लस्य हिन्द्याः च पुस्तकानां विक्रयणम् अधोदत्तम् अस्ति

	1995	1996	1997	1998
आङ्ग्लम्	350	400	450	620
हिन्दी	500	525	600	650

एकं द्विदण्डात्मकम् आलेखम् आलिखन्तु निम्नलिखितानां च प्रश्नानाम् उत्तराणि यच्छन्तु **आकृतिः 3.2**

(a) कस्मिन् वर्षे उभयोः भाषयोः पुस्तकानां विक्रयणस्य अन्तरं न्यूनतमम् आसीत् ?

(b) किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् आङ्ग्लपुस्तकानां याच्ञायां त्वरया वृद्धिः अभवत् ? अस्य औचित्यम् अपि बोधयन्तु।

प्रश्नावली 3.3

1. निम्नलिखितप्रश्नानाम् उत्तराणि दातुं, 3.3 आकृतौ प्रदत्तस्य दण्डालेखस्य प्रयोगं कुर्वन्तु :

   (a) कतमः ग्राम्यपशुः सर्वाधिकः लोकप्रियः अस्ति ?

   (b) कतीनां विद्यार्थिनां पालितपशुः कुक्करः (शुनकः) अस्ति ?

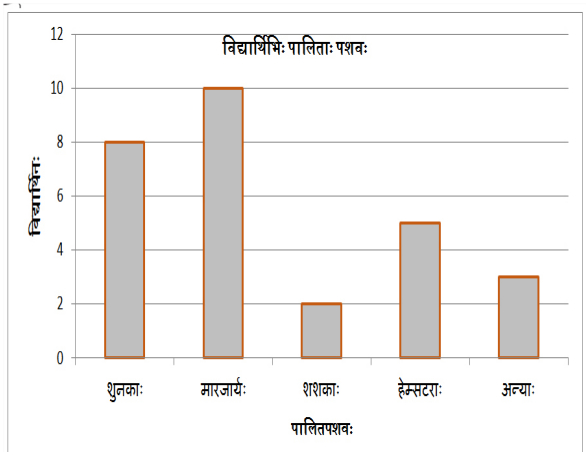
2. निम्नलिखितं दण्डालेखं पठन्तु यः केनचित् पुस्तकभण्डारेण पञ्चसु क्रमागतवर्षेषु विक्रीतानां पुस्तकानां संख्यां दर्शयति तथा च अग्रे आगमिष्यमाणानां प्रश्नानाम् उत्तराणि ददतु।

(i)1989,1990 तथा च 1992 तमवर्षेषु प्रत्येकस्मिन् वर्षे प्रायशः कति पुस्तकानि विक्रीतानि ?

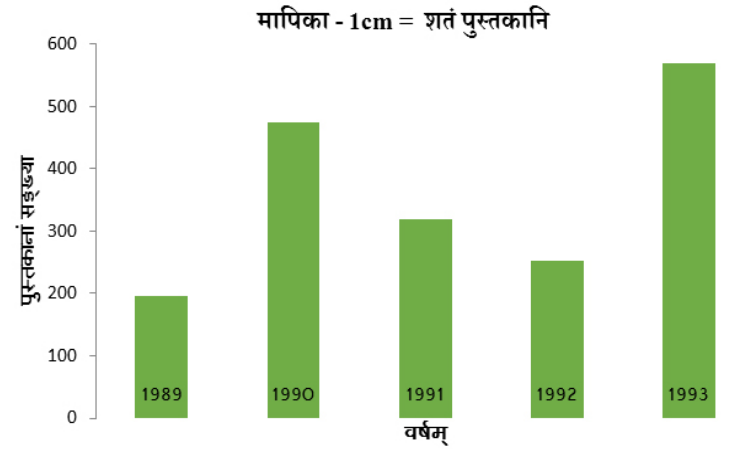
(ii) कस्मिन् वर्षे प्रायशः पञ्चसप्तत्युत्तरचतुःशतम् (475) पुस्तकानि विक्रीतानि ? कस्मिन् वर्षे प्रायेण पञ्चविंशत्युत्तरद्विशतम् (225) पुस्तकानि विक्रीतानि ?

(iii) केषु वर्षेषु पञ्चाशदधिकद्विशतात् (250) न्यूनानि पुस्तकानि विक्रीतानि ?

(iv) किं भवन्तः स्पष्टं कर्तुं शक्नुवन्ति यत् भवन्तः एकोननवत्यधिकनवदशशततमे (1989)वर्षे विक्रीतानां पुस्तकानाम् आकलनं कथं करिष्यन्ति ?



आकृतिः 3.3



आकृतिः 3.4

3. षण्णां विभिन्नकक्ष्याणां विद्यार्थिनां संख्याः अधः प्रदत्ताः सन्ति। एतान् दत्तांशान् एकेन दण्डालेखेन निरूपयन्तु -

कक्षाः	पञ्चमी	षष्ठी	सप्तमी	अष्टमी	नवमी	दशमी
विद्यार्थिनां संख्याः	135	120	95	100	90	80

(a) भवन्तः मापिकां केन प्रकारेण चेष्यन्ति ?

(b) निम्नलिखितप्रश्नानाम् उत्तरं यच्छन्तु :

(i) कस्याः कक्ष्यायाः विद्यार्थिनां संख्या अधिकतमा अस्ति ? कस्यां कक्ष्यायां विद्यार्थिनां संख्या न्यूनतमा अस्ति ?

(ii) षष्ठ्याः कक्ष्यायाः विद्यार्थिनां संख्यायाः अष्टम्याः कक्ष्यायाः विद्यार्थिनां संख्याभिः अनुपातः ज्ञायताम्।

4. कस्यचिद् विद्यार्थिनः प्रथमसत्रस्य द्वितीयसत्रस्य च प्रदर्शनं दत्तम् अस्ति। एकाम् उपयुक्तां मापिकां चित्वा एकं द्विदण्डालेखम् आलिखन्तु अधः प्रदत्तप्रश्नानां च उत्तराणि यच्छन्तु :

विषयः	आङ्ग्लम्	हिन्दी	गणितम्	विज्ञानम्	सामाजिकविज्ञानम्
प्रथमसत्रम् (पूर्णाङ्काः शतम्)	67	72	88	81	73
द्वितीयसत्रम् (पूर्णाङ्काः शतम्)	70	65	95	85	75

(i) कस्मिन् विषये विद्यार्थिना स्वीये प्रदर्शने सर्वाधिका उन्नतिः कृता ?

(ii) कस्मिन् विषये न्यूनतमं संस्करणं वर्तते ?

(iii) किं कस्मिंश्चिद् विषये प्रदर्शनम् अधः पतितम् अस्ति ?

5. कस्मिंश्चिद् उपनिवेशे कृतसर्वेक्षणात् प्राप्तेषु निम्नलिखितेषु दत्तांशेषु विचारं कुर्वन्तु -

प्रियक्रीडा	क्रिकेट्क्रीडा	बॉस्केट्बॉल्-क्रीडा	तरणम्	यष्टिक्रीडा	कूर्दनम्
अवलोकनम्	1240	470	510	423	250
भागग्रहणम्	620	320	320	250	105

(i) एकाम् उपयुक्तां मापिकां चित्वा एकं द्विदण्डालेखम् आलिखन्तु । अस्माद् द्विदण्डालेखाद् भवन्तः कं निष्कर्षं प्राप्स्यन्ति ?

(ii) का क्रीडा अधिका लोकप्रिया वर्तते ?

(iii) क्रीडानाम् अवलोकनम् अधिकं रोचते उत वा तासु भागग्रहणम् ?

6. अस्य अध्यायस्य प्रारम्भे प्रदत्तानां विभिन्ननगरणां न्यूनतमानाम् अधिकतमानां च तापमानानां दत्तांशान् (तालिका 3.1) स्वीकुर्वन्तु । एतेषां दत्तांशानाम् एकं द्विदण्डालेखम् आलिख्य निम्नलिखितप्रश्नानाम् उत्तराणि यच्छन्तु :

(i) प्रदत्तायां तिथौ कस्य नगरस्य न्यूनतमस्य अधिकतमस्य च तापमानस्य अन्तरं सर्वाधिकम् अस्ति ?

(ii) कतमत् नगरं सर्वाधिकम् उष्णम् अस्ति कतमत् च नगरं सर्वाधिकं शीतम् अस्ति ?

(iii) एतादृशयोः नगरयोः नामनी लिखन्तु ययोः एकस्य नगरस्य अधिकतमं तापमानम् अपरस्य नगरस्य न्यूनतमात् तापमानात् न्यूनम् आसीत् ।

(iv) तस्य नगरस्य नाम लिखन्तु यस्य न्यूनतमानाम् अधिकतमानां च तापमानानाम् अन्तरं न्यूनतमम् अस्ति ।

प्रयासं कुर्वन्तु

कतिपयानां स्थितीनां विषये चिन्तयन्तु यासु न्यूनातिन्यूनाः तिस्रः एतादृश्यः भवेयुः यासां घटना निश्चिता स्यात् कतिपयाः एतादृश्यः भवेयुः यासां घटना अनिश्चिता स्यात् तथा च कतिपयाः एतादृश्यः भवेयुः यासां घटना सम्भवा एवं च असम्भवा अपि स्यात् अर्थाद् यासां घटनायाः कश्चन संयोगः अथवा काचित् सम्भावना स्याद् ।

3. 9 संयोगः प्रायिकता च

एतौ शब्दौ प्रायः अस्माकं जीवने दृष्टिपथम् आयातः । वयं प्रायः कथयामः यत् 'अद्य वृष्टेः सम्भावना (संयोगः) नास्ति'तथा एतदपि वदामः यत् 'अस्य बहुसम्भावना अस्ति यद् भारतं विश्वचषकं जेष्यति' । आगच्छन्तु एतौ शब्दौ किञ्चिद् विस्तरेण अधिगन्तुं प्रयासं कुर्मः । निम्नलिखितेषु कथनेषु विचारं कुर्वन्तु -

(i) सूर्यः पश्चिमदिशि उदेति ।

(ii) एकस्याः पिपीलिकायाः औन्नत्यं त्रिमीटरपरिमिं भवति ।

(iii) यदि भवन्तः एकम् आयतनमानं घनं स्वीकरिष्यन्ति तर्हि तस्य भुजा अपि दीर्घा भविष्यति ।

(iv) यदि भवन्तः दीर्घक्षेत्रफलस्य एकं वृत्तं स्वीकरिष्यन्ति तर्हि तस्य वृत्तस्य त्रिज्या अपि दीर्घा भविष्यति ।

(v) भारतम् अगामिनिकष-क्रिकेट्-शृङ्खलां जेष्यति ।

यदि भवन्तः उपर्युक्तानि कथनानि द्रक्ष्यन्ति तर्हि भवन्तः कथयिष्यन्ति यत् सूर्यस्य पश्चिमदिशि उदयः असम्भवः अस्ति, कस्याश्चित् पिपीलिकायाः औन्नत्यं त्रिमीटरपर्यन्तम् अपि सम्भवं नास्ति एतद्-विपरीतं यदि वृत्तस्य क्षेत्रफलम् अधिकम् अस्ति तर्हि तस्य एकस्य वृत्तस्य त्रिज्यायाः दीर्घता निश्चिता अस्ति । एताम् एव वार्तां भवन्तः घनस्य दीर्घायतनस्य तस्य च भुजायाः विषये अपि वक्तुं शक्नुवन्ति । पक्षान्तरे, भारतम् आगामिनिकष-क्रिकेट शृङ्खलां जेतुम् अपि शक्नोति अथ च पराजितम् अपि भवितुं शक्नोति । जयपराजयौ उभौ सम्भवौ स्तः ।

3.9.1 संयोगः

यदि भवन्तः एकं नाणकम् उत्क्षिपन्ति तर्हि किं भवन्तः सदैव अस्य विषये यथार्थ-प्रागुक्तिं कर्तुं शक्नुवन्ति यत् किं प्राप्तं भविष्यति ? प्रतिवारं नाणकम् उत्क्षिप्य तस्मात् प्राप्यमाणस्य परिणामस्य प्रागुक्तिं कुर्वन्तु । निजप्रेक्षणं निम्नलिखितसारणीरूपेण लिखन्तु -

उत्क्षेपण-संख्या	प्रागुक्तिः	परिणामः

एवं दशवारं कुर्वन्तु । प्राप्तान् परिणामान् पश्यन्तु । किं भवन्तः अस्मिन् कमपि क्रमं पश्यन्ति ? एकैकस्य उत्क्षेपणस्य अनन्तरं भवन्तः किम् प्राप्नुवन्ति ? किं भवद्भिः सदैव शिरः (शीर्षम्) (head) एव प्राप्यते ? एतेषां प्रेक्षणानाम् इतोऽपि दशभ्यः उत्क्षेपणेभ्यः आवृत्तिं प्रेक्षणानि च सारणीबद्धानि कुर्वन्तु ।

भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यद् एतानि प्रेक्षणानि किमपि स्पष्टं प्रतिरूपं नैव दर्शयन्ति । अधोदत्तायां सारण्यां, वयं सुशीला-सलमाभ्यां पञ्चविंशत्याः उत्क्षेपणेभ्यः प्राप्तानि प्रेक्षणानि अत्र यच्छन्तः स्मः । अत्र 'H' इति शिरः निरूपयति तथा च 'T' इति पादं (पट) निरूपयति ।

उत्क्षेपणसंख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
परिणामः	H	T	T	H	T	T	T	H	T	T	H	H	H	H	H
उत्क्षेपणसंख्या	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25					
परिणामः	T	T	H	T	T	T	T	T	T	T					

एते दत्तांशाः भवन्तं किं सूचयन्ति ? किं भवन्तः शिरसे पादाय च किमपि प्रागुक्तीयं प्रतिरूपं ज्ञातुं शक्नुवन्ति? स्पष्टम् अस्ति अत्र शिरसः पादस्य च आगमनस्य किमपि निश्चित-प्रतिरूपं नास्ति । यदा भवन्तः मुद्राम् उत्क्षिपन्ति तदा प्रत्येकम् उत्क्षेपणस्य परिणामः शिरस्पादयोः मध्ये कश्चन एकः भवितुं शक्नोति । अयं संयोगस्य विषयः अस्ति यद् एकस्मिन् विशेषोत्क्षेपणे भवतः एतयोः शिरस्पादयोः कोऽपि एकः प्राप्तः भवेत् ।

उपर्युक्तेषु दत्तांशेषु प्राप्तानां शिरस्परिणामानां पादपरिणामानां च संख्यायाः गणनां कुर्वन्तु । मुद्रां वारंवारम् उत्क्षिपन्तु एवं च भवन्तः किं प्राप्नुवन्ति इति अभिलिखन्तु । एतत् ज्ञायतां यद् भवन्तः कतिवारं शिरः कतिवारं च पादं प्राप्तवन्तः ।

भवन्तः केनचित् पाशेन अवश्यमेव क्रीडितवन्तः स्युः । एकस्मिन् पाशे षट् मुखानि भवन्ति । यदा भवन्तः एकं पाशं क्षिपन्ति तर्हि किं भवन्तः प्राप्स्यमानायाः संख्यायाः प्रागुक्तिं कर्तुं शक्नुवन्ति ?

लूडो अथवा 'सर्पः एवं सोपानम्' इत्यस्य क्रीडायाः क्रीडनसमये भवद्भिः एषा कामना अवश्यमेव कृता स्याद् यद् एकस्मिन् विशिष्टक्षेपणे एका विशेषसंख्या परिणामरूपेण प्राप्ता भवेत् ।

किं पाशः सर्वदैव भवताम् इच्छानुसारं कार्यं करोति ? एकं पाशं स्वीकुर्वन्तु तं पञ्चाशदधिकैकशतवारं (150) क्षिपन्तु तथा च प्राप्तान् परिणामान् निम्निलिखिततालिकायां पूरयन्तु -

पाशस्य लिखित संख्या	मेलनचिह्नम्	कतिवारं संख्या प्राप्ता ?
1		
2		

प्रत्येकवारं परिणामे प्राप्ते सति उपयुक्तसंख्यायाः पुरतः एकं मेलनचिह्नं योजयन्तु। उदाहरणार्थं प्रथमे क्षेपणे पञ्च इति आगते सति पञ्च इत्यस्य पुरतः एकं मेलनचिह्नं योजयन्तु। अग्रिमे चक्रे भवन्तः एकं (1) प्राप्नुवन्ति तदा 1 इत्यस्य पुरतः एकं मेलनचिह्नं योजयन्तु। एवमेव उपयुक्तसङ्ख्यानां कृते मेलनचिह्नानि योजयन्तु। एतां प्रक्रियां पञ्चाशदधिकैकशतवारं (150) कुर्वन्तु तथा च पञ्चाशदधिकैकशताय क्षेपणेभ्यः एकैकस्य परिणामस्य आहत्य संख्या ज्ञायताम्।

उपर्युक्तैः दत्तांशैः एकं दण्डालेखं रचयन्तु यस्मिन् एतद् दर्शितं स्याद् यत् एकः, द्वौ, त्रयः, चत्वारः, पञ्च षड् चेति परिणामाः 1,2,3,4,5 तथा च 6 कतिवारम् आगताः।

प्रयासं कुर्वन्तु

(एतत् सामूहिकरूपेण कुर्वन्तु)

1. एकां मुद्रां शतवारम्(100) उत्क्षिपन्तु ज्ञायतां च कतिवारं शिरः (चित)आगतं कतिवारं च पादः आगतः।
2. आफताबः एकं पाशं पञ्चाशदधिकद्विशतवारम् (250) अक्षिपत् अथ च निम्नलिखितां तालिकां प्राप्तवान्

पाशस्य उपरि संख्याः	मेलनचिह्नानि
1	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 III
2	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸
3	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 II
4	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 II
5	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 III
6	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸

एतेषां दत्तांशानां कृते एकं दण्डालेखम् आलिखन्तु।

3. एकं पाशं शतवारं(100) क्षिपन्तु परिणामान् च अभिलिख्य ज्ञायताम् यत् एकः,द्वौ,त्रयः,चत्वारः,पञ्च षड् चेति (1,2,3,4,5,तथा च 6) कतिवारम् आगताः।

प्रायकिता किम् अस्ति ?

यदा वयं कामपि मुद्राम् उत्क्षिपामः तदा वयं जानीमः यद् अस्याः शिरः अथवा पादः इति द्वौ सम्भवौ परिणामौ स्तः। सममेव, एकस्मिन् पाशे क्षिप्ते सति अस्य षड् (6) सम्भवाः परिणामाः सन्ति। निजानुभवेन वयम् एतदपि जानीमः यद् एकस्यै मुद्रायै शिरसः अथवा पादस्य प्राप्तिः एका समप्रायिकी घटना (Probabil_ity) अस्ति। वयं वदामः यत् एकस्य शिरोभागस्य आगमनस्य प्रायिकता (1/2) इति अस्ति अथ च एकस्य पादभागस्य आगमनस्य प्रायिकता अपि (1/2) इति अस्ति। पाशे क्षिप्ते सति एकः, द्वौ, त्रयः, चत्वारः, पञ्च षड् (1,2,3,4,5, तथा च 6) इत्येतेषाम् आगमनस्य सम्भावनाः समानाः सन्ति। अर्थात् पाशस्य कृते षड् समप्रायिकाः (6) सम्भव-परिणामाः सन्ति। वयं वदामः यत् एकः, द्वौ, त्रयः, चत्वारः, पञ्च षड् च इत्येतेषु प्रत्येकम् आगमनस्य प्रायिकता (1/6) इति अस्ति।

अस्मिन् विषये वयं अग्रिमासु कक्ष्यासु अध्ययनं करिष्यामः। परन्तु एतावत्पर्यन्तं यद् अस्माभिः कृतं तेन स्पष्टम् अस्ति यत् बहु सम्भाव्यमानानां घटनानां प्रायिकता शून्यैकयोः (0 तथा 1) अन्तः भवति। यासां

प्रयासं कुर्वन्तु

एतादृशीः पञ्च स्थितीः निर्मान्तु अथवा विचारयन्तु यासां परिणामानां संयोगः समानः न भवेत्,अर्थात् ताः समप्रायिकाः न स्युः।

घटनस्य कश्चन संयोगः अथवा सम्भावना नास्ति तासांप्रायिकता शून्यम्(0) इति भवति। तथा च याः निश्चयेन घटितव्याः भवन्ति तासां प्रायिकता एकम् (1) इति भवति।

यदि अस्माकं पुरतः एका स्थितिः प्रदत्ता स्यात् तर्हि अस्माकं कृते विभिन्नान् सम्भवपरिणामान् अवगन्तुं प्रत्येकं च परिणामस्य सम्भावितसंयोगस्य अध्ययनस्य आवश्यकता भवति। एतत् सम्भवम् अस्ति यत् मुद्रायाः पाशस्य च स्थितेः विपरीतं एतादृशाः अपि परिणामाः स्युः येषां घटनस्य संयोगः समानः न भवेत् अर्थात् ते सम्प्रायिकाः न भवेयुः। उदाहरणार्थं यदि एकस्मिन् पात्रे पञ्चदश (15) रक्तकन्दुकानि स्युः अथ च नव(9) श्वेतकन्दुकानि भवेयुः अस्मात् च पात्राद् एकं कन्दुकम् अदृष्ट्वा निष्कास्यते तदा रक्तकन्दुकस्य प्राप्तेः संयोगः बहु अधिकम् अस्ति। किं भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति किमर्थम् ? रक्तकन्दुक-प्राप्तेः संयोगः श्वेतकन्दुक-प्राप्तेः संयोगात् कियत् गुणितम् अस्ति ? ध्यानं यच्छन्तु एतयोः द्वयोः प्रायिकताः शून्यैकयोः (0 तथा 1) अन्तः अस्ति।

प्रश्नावली 3.4

1. वदन्तु यत् निम्नलिखितेषु कस्य सम्भाव्यता निश्चिता अस्ति कस्य च सम्भाव्यता अनिश्चिता अस्ति अथ च कः भवितुम् अपि शक्नोति परन्तु निश्चितरूपेण न -
   (i) अद्य भवन्तः गतदिनात् अधिकवयोमितः सन्ति।
   (ii) एकां मुद्राम् उत्क्षिपामः चेत् शिरोभागः आगमिष्यति।
   (iii) एकस्मिन् पाशे क्षिप्ते सति अष्टौ(8) आगमिष्यति।
   (iv) अग्रिमः यातायातदीपः हरितः भविष्यति।
   (v) श्वः मेघाः वेष्टिष्यन्ते।
2. एकस्मिन् पात्रे षड् (6) काचगुलिकाः सन्ति यासु एकतः षड् पर्यन्तं संख्याः अङ्किताः सन्ति।
   (i) द्विसंख्यकायाः काचगुलिकायाः अस्मात् निस्सारणस्य प्रायिकता का अस्ति ?
   (ii) पञ्चसंख्यकायाः काचगुलिकायाः अस्मात् निस्सारणस्य प्रायिकता का अस्ति ?
3. कतमः दलः क्रीडाम् आरप्स्यते इति एतं निर्णयं स्वीकर्तुम् एका मुद्रा उत्क्षेप्यते। अस्य का प्रायिकता वर्तते यत् भवतां दलम् एव क्रीडाम् आरप्स्यते ?

अस्माभिः का चर्चा कृता ?

1. वयं दत्तांशानां संग्रहेण, अभिलेखनेन, प्रस्तुतीकरणेन च स्वीयान् अनुभवान् संघटयितुं दत्तांशेभ्यः च निष्कर्ष-निस्कासने साहाय्यं प्राप्नुमः।
2. दत्तांशानाम् एकत्रीकरणात् पूर्वम् अस्माभिः एतद् ज्ञातव्यं यद् वयम् अस्य प्रयोगं कस्मिन् कार्ये करिष्यामः।
3. एकत्रितानां दत्तांशानाम् एकेन उपयुक्ततालिकारूपेण सङ्घटनस्य आवश्यकता भवति यतः एते सरलतया अवगन्तुं योग्याः स्युः एतेषां च व्याख्या कर्तुं शक्येत ।
4. मध्यमानम् एतादृशी संख्या अस्ति या प्रदत्त-प्रेक्षणानां समूहस्य(अथवा अङ्कानां) प्रतिनिधित्वं करोति तस्य च केन्द्रीयप्रवृत्तिं दर्शयति।

5. अङ्कगणितीयमाध्यं दत्तांशानाम् एकं प्रतिनिधिमानम् अस्ति।
6. बहुलकः केन्द्रीयप्रवृत्तेः अथवा प्रतिनिधिमानस्य एकम् अन्यरूपम् अस्ति। प्रेक्षणसमूहस्य बहुलकः तत् प्रेक्षणं अस्ति यत् सर्वाधिकवारम् आगच्छति।
7. माध्यकः अपि एकप्रकारकं प्रतिनिधिमानम् अस्ति। एतत् तद् मानं दर्शयति यत् प्रेक्षणस्य मध्ये भवति (तान् आरोहिक्रमे अथवा अवरोहिक्रमे व्यवस्थीकृत्य) तथा च अर्धं प्रेक्षणम् अस्मात् उपरि भवति अर्धं च प्रेक्षण्म अस्माद् अधः भवन्ति।
8. एकत्रिताः दत्तांशाः आवृति-विभाजन-तालिकायाः साहाय्येन चित्रीयरूपेण दण्डालेखानां रूपेण दर्शयितुं शक्यन्ते। दण्डालेखः संख्यानाम् अथवा दत्तांशानां समानविस्तृतदण्डैः एकं चित्रीयं निरूपणम् अस्ति।
9. अस्माभिः एतद् अपि अधिगतं यत् द्विदण्डात्मकः आलेखः कथम् आलिख्यते। एषः एकस्यां दृष्टौ प्रेक्षणानां द्वयोः समूहयोः मध्ये तुलनां कर्तुं सहायकः भवति।
10. अस्माकं दैनिके जीवने, एतादृश्यः स्थित्यः सन्ति याः निश्चितरूपेण भवन्ति, कतिपयाः एतादृश्यः सन्ति याः सम्भाव्याः न सन्ति तथा च कतिपयाः एतादृश्यः सन्ति याः भवितुम् अपि शक्नुवन्ति नापि भवितुं शक्नुवन्ति। एतादृशी स्थितिः सदैव घटनयोग्या भवति या घटितुम् अपि शक्नोति अथवा नापि घटितुं शक्नोति।

अध्यायः 4

सरलं समीकरणम्

4.1 बौद्धिकी क्रीडा

अध्यापिका अकथयत् यत् सा गणितस्य एकं नूतनम् अध्यायं पाठयितुम् आरम्भमाणा अस्ति सः च अस्ति सरलं समीकरणम्। अप्पू, सरिता अमीना च षष्ठ्यां कक्ष्यायां पठिताध्यायस्य बीजगणितस्य पुनरावलोकनम् अपि कृतम् अस्ति। किं भवद्भिः अपि पुनरावलोकनं कृतम् ? अप्पू, सरिता अमीना च उत्साहिताः सन्ति यतोहि ताभिः एका क्रीडा रचिता, यां ताः बौद्धिकक्रीडां (mind reader) कथयन्ति तथा च ताः तां सम्पूर्णकक्षायाः सम्मुखं प्रस्तोतुम् इच्छन्ति।

अध्यापिका तासाम् उत्साहं प्रशंसति ताः च निजक्रीडां प्रस्तोतुम् आमन्त्रयति। अमीना क्रीडाम् आरभते। सा सारां कामपि संख्यां विचारयितुं वदति तथा च तां चतुर्भिः गुणित्वा गुणनफले च 5 योजयितुं कथयति। तत्पश्चात् सा सारां अस्य परिणामं वक्तुमपि वदति। सारा वदति यत् परिणामः 65 अस्ति। अमीना अनुक्षणम् एव घोषयति यत् साराद्वारा विचारिता संख्या 15 अस्ति। सारा शिरस्संकेतेन 'आम्' इति वदति। सारा सहिता सम्पूर्णकक्षा आश्चर्यचकिता भवति।

अधुना अप्पवः (अप्पू) क्रमः अस्ति। सः बालुवं (बालू) कामपि संख्यां चिन्तयितुं कथयति, तां 10 द्वारा गुणित्वा गुणनफले च 20 ऋणं कर्तुं कथयति। तदन्तरं सः बालुवं(बालू) तस्य परिणामं वक्तुं कथयति। बालूः कथयति यत् एषः 50 अस्ति। अप्पूः सद्यः एव बालूद्वारा चिन्तितां संख्यां वदति कथयति च सा संख्या 7 अस्ति। बालूः अस्य पुष्टिं करोति।

प्रत्येकं व्यक्तिः एतत् जानाति यत् अप्पू, सरिता तथा अमीनाद्वारा प्रस्तुता बौद्धिकक्रीडा कथं कार्यं करोति। किं भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् एषा कथं कार्यं करोति ? एतम् अध्यायं 12 अध्यायं पठनान्तरं, भवन्तः सम्यक्प्रकारेण ज्ञास्यन्ति यत् एषा केन प्रकारेण कार्यं करोति ?

4.2 समीकरणस्य रचना

आयान्तु अमीनायाः उदाहरणं स्वीकुर्मः। अमीना सारां कामपि संख्यां विचारयितुं कथयति। अमीना संख्यायाः विषये किमपि न जानाति। एतदर्थम्, एषा संख्या 1, 2, 3,.....,11,.....,100, इत्यादिषु कापि

भवितुं शक्नोति। आगच्छन्तु एताम् अज्ञातसंख्याम् एकाक्षरेण 'x' इत्येन व्यक्तं कुर्मः। भवन्तः'x' इत्यस्य स्थाने अन्याक्षराणां यथा y, t इत्यादीनां प्रयोगं कर्तुं शक्नुमः। अनेन कश्चन प्रभावः न भवति यत् साराद्वारा अज्ञातसंख्यै वयं कतमत् अक्षरं प्रयुञ्जामहे। सारा यदा संख्यां चतुर्भिः गुणयति, तदा सा 4x इति प्राप्नोति। पुनः सा अस्मिन् गुणफले 5 योजयति 4x + 5 इति प्राप्नोति। (4x + 5) इत्यस्य मानं 'x' इत्यस्य मानस्य उपरि निर्भरं करोति। अनेन प्रकारेण, यदि 'x' = 1अस्ति ,तदा 4x + 5 = 4 × 1 + 5 = 9 अस्ति। अस्यार्थः अस्ति यत् यदि सारायाः मस्तिष्के 1 भवति, तदा तया प्राप्तः परिणामः 9 भवति। एवमेव, यदि तया संख्या 5 चिन्तिता स्यात्, तदा अस्य x = 5 इत्यर्थं 4x + 5 = 4 × 5 + 5 = 25। अर्थात्, सारा यदि संख्या 5 अविचारिष्यत् तु तस्य परिणामः 25 अभविष्यत्।

सारद्वारा विचारितां संख्यां ज्ञातुं, आयान्तु तया प्रदत्तात् उत्तरात् विपरीतदिशि कार्यं कुर्मः। अस्माभिः एतादृशः x ज्ञातव्यः यत्

$$4x + 5 = 65 \qquad (4.1)$$

अस्य समीकरणस्य समाधानम् एव अस्मान् सारायाः मनस्स्थां संख्यां प्रकटीकरिष्यति।

एवमेव, आगच्छन्तु अधुना अप्पवः उदाहरणं विचारयामः। आयान्तु बालूद्वारा चितां संख्यां y इति स्वीकुर्मः। अप्पूः बालुवं (बालू) एतां संख्यां 10 द्वारा गुणित्वा पुनः गुणनफले च 20 ऋणं कर्तुं अकथयत्। अर्थात् बालूः y इत्यस्मात् पूर्वं 10y इति प्राप्नोति तस्याः (संख्यातः) च 20 ऋणं कृत्वा (10y-20) प्राप्नोति। अस्य परिणामः 50 अस्ति।

अतः $$10y-20 = 50 \qquad (4.2)$$

अस्य समीकरणस्य (equation) समाधानमेव बालूद्वारा विचारितां संख्यां वदिष्यति।

4.3 यत् अस्माभिः ज्ञातः तस्य समीक्षा

ध्यानं यच्छतु यत् (4.1) तथा च (4.2) समीकरणे स्तः। आयान्तु स्मरामः यत् षष्ठ्यां कक्ष्यायाम् अस्माभिः समीकरणानां विषये पठितम्। समीकरणं चरस्य उपरि एकः प्रतिबन्धः भवति। समीकरणे (4.1) मध्ये, चरः 'x' इति अस्ति तथा च समीकरणे (4.2) मध्ये, चरः 'y' इति अस्ति।

चर (variable) शब्दस्य अर्थः अस्ति, यत् एतादृशं वस्तु यत् विचरणम् अर्थात् परिवर्तितुं शक्यं स्यात्। एकः चरः विभिन्नानि संख्यात्मकमानि ग्रहीतुं शक्नोति, अर्थात् अस्य मानं निश्चितम् अथवा स्थिरं नैव भवति। चरान् प्रायः आङ्ग्लभाषायाः वर्णमालायाः अक्षरैः x,y,z,l,m,n.p इत्यादिभिः व्यक्तं क्रियते। चरैः वयं व्यञ्जकान् (expressions) रचयामः। एते व्यञ्जकाः चरेषु योगः,व्यवकलनं,गुणनं विभाजनं सदृशाः संक्रियाः कृत्वा प्राप्यते। x इत्यस्मात् अस्माभिः व्यञ्जकः (4x+5) इति निर्मितः। एतदर्थं, वयम् आदौ x इत्येतत् चतुर्भिः गुणितं पुनश्च अस्य गुणनफले 5 योजितः आसीत्। एवमेव, अस्माभिः y इति व्यञ्जकात्(10 y - 20) इति निर्मितम्। एतदर्थं, वयम् आदौ y इत्येतत् दशद्वारा गुणितं पुनश्च अस्य गुणनफले 10 योजितः आसीत्। एतानि सर्वाणि व्यञ्जकानाम् उदाहरणानि सन्ति।

उपरोक्तप्रकारकस्य निर्मितस्य एकव्यञ्जकस्य मानं, चरस्य चिते माने निर्भरं करोति। यथा वयं पूर्वम् अपि अपश्याम यत् यदा x = 1 अस्ति, तदा 4x+5 = 9 अस्ति, यदा x = 5 अस्ति, तदा 4x+5 = 25 अस्ति अनेन प्रकारेण,

यदा x = 15,तदा 4x+5 = 4×15+5 =65 अस्ति,

यदा x = 0,तदा 4x+5 = 4×0+5 =5 अस्ति, इत्यादिः।

समीकरणं (4.1) चर x इत्यस्य उपरि एकः प्रतिबन्धः अस्ति। एतत् समीकरणं निर्दिशति यत् व्यञ्जकः 4x+5 इत्यस्य मानं 65 अस्ति। एषः प्रतिबन्धः x = 15 सति पुष्टं भवति। संख्या 15 समीकरणं 4x+5 =65

अस्य समाधानम्(solution)अस्तियदा x = 15 अस्ति,तदा 4x+5 = 25 अस्ति यत् 65 अस्य समानं नास्ति । अनेन प्रकारेण x = 5 अस्य समीकरणस्य समाधानं नास्तिइत्थमेव x = 0 अपि समीकरणस्य समाधानं नास्ति । 15 एतद् अतिरिक्तं, x इत्यस्य किञ्चित् अपि मानं प्रतिबन्धं 4x+5 =65 एतं न पोषयति ।

प्रयासं कुर्वन्तु

(10 y - 20) व्यञ्जकः इत्यस्य मानं y अस्य मानस्य उपरि निर्भरं करोति । y इत्येतं पञ्च भिन्नं-भिन्नं मानं दत्त्वा तथा y इत्यस्य प्रत्येकं मानाय (10 y - 20) इत्यस्य मानं ज्ञात्वा अस्य पुष्टिं कुर्वन्तु। (10 y - 20) अस्य प्राप्तेभ्यः विभिन्नमानेभ्यः, किं भवन्तः 10 y – 20 = 50 अस्य किञ्चित् समाधानं पश्यन्तः सन्ति ? यदि किमपि समाधानं नैव प्राप्तम् अस्ति, तदा y इत्येतं किमपि अन्यं मानं दत्त्वा ज्ञायतां यत् प्रतिबन्धः 10 y – 20 = 50 इति पुष्टं भवति अथवा पुष्टं न भवति ।

4.4 समीकरणं किम् अस्ति?

एकस्मिन् समीकरणे, समतायाः अथवा समिकायाः (equality) चिह्नं सदैव भवति। समतायाः चिह्नं एतत् दर्शयति यत् चिह्नस्य वामस्थ व्यञ्जकस्य (LHS) मानं चिह्नस्य दक्षिणस्थ व्यञ्जकस्य (RHS) मानस्य तुल्यम् अस्ति । समीकरण (4.1) मध्ये, वामपक्षः (4x+5)अस्ति तथा दक्षिणपक्षः 65 अस्ति । समीकरण(4.2) मध्ये, वामपक्षः(10 y – 20) तथा दक्षिणपक्षः 50 अस्ति ।

यदि वामपक्षस्य तथा दक्षिणपक्षस्य मध्ये समताचिह्नं विहाय किञ्चित् अन्यं चिह्नं स्यात्, तदा तत् एकं समीकरणं नैव भवितुं शक्नोति । अतः 4 x +5>65 एकं समीकरणं नास्ति । एतत् कथनम् अस्मान् वदति यत् (4 x +5) इत्यस्य मानं 65 अस्माद् अधिकम् अस्ति ।
अनेन प्रकारेण, 4 x +5 < 65 अपि एकं समीकरणं नास्ति । एतत् कथनम् अस्मान् कथयति यत् (4 x +5) इत्यस्य मानं 65 अस्मात् न्यूनम् अस्ति ।

समीकरणेषु वयं प्रायः पश्यामः यत् दक्षिणपक्षः (RHS) केवलम् एका संख्या अस्ति । (4.1) समीकरणे एषा 65 अस्ति तथा च (4.2) समीकरणे एषा 50 अस्ति । परन्तु एतत् सदैव आवश्यकं नास्ति । एकस्य समीकरणस्य दक्षिणपक्षः (RHS) चरसम्बन्धितः व्यञ्जकः अपि भवितुम् अर्हति । उदाहरणार्थं, समीकरणम्

$$4x + 5 = 6x – 25$$

अस्मिन् समीकरणे समताचिह्नात् वामदिशि एकः व्यञ्जकः 4x + 5 तथा च तस्य दक्षिणदिशि एकः व्यञ्जकः 6x – 25 विद्यते ।

संक्षिप्तरूपेण, एकं समीकरणं चरस्य उपरि एकः प्रतिबन्धः भवति । प्रतिबन्धः एषः यत् द्वयोः व्यञ्जकयोः मानानि समानानि (तुल्यानि) स्युः । ध्यानं यच्छन्तु यत् द्वयोः व्यञ्जकयोः न्यूनातिन्यूनम् एकस्मिन् चरः अवश्यमेव भवेत् ।

वयं समीकरणानाम् एकं सरलम् उपयोगिनं च गुणं पश्यामः। समीकरणं 4x+5 =65 तदेव अस्ति यत् समीकरणं 65 = 4x+5 अस्तिअनेन प्रकारेण,समीकरणं 6x – 25 = 4x + 5 तदेव अस्ति यत् समीकरणं 4x + 5 = 6x– 25 अस्ति । कस्यचित् समीकरणस्य वामस्थस्य दक्षिणस्थस्य च पक्षयोः व्यञ्जकौ अन्योऽन्यं परिवर्तिते सति, समीकरणं तत् एव तिष्ठति । अयं गुणः बहुधा समीकरणानि साधयितुम् उपयोगी भवति ।

उदाहरणम् 1 निम्नलिखितानि कथनानि समीकरणरूपेण लिखन्तु :

(i) x इत्यस्य त्रिगुणितस्य 11 च योगः 32 अस्ति ।

(ii) यदि कस्याश्चित् संख्यायाः षड्गुणात् भवन्तः 5 ऋणं कुर्युः, तदा 7 प्राप्यते ।

(iii) m इत्यस्य चतुर्थं 7 इत्यस्मात् 3 अधिकम् अस्ति ।

(iv) कस्याश्चित् संख्यायाः त्र्यंशे 5 योजिते सति 8 इति प्राप्यते ।

समाधानम्

(i) x इत्यस्य त्रिगुणितं 3 x अस्ति ।

x तथा च 11 अस्य योगः 3 x + 11 अस्ति। एषः योगः 32 अस्ति ।

अतः, वाञ्छितं समीकरण 3 x + 11 = 32 अस्ति ।

(ii) आयान्तु कल्पन्तां यत् एषा संख्या z अस्ति । z इत्येतं षड्भिः गुणिते सति 6z इति प्राप्यते ।

6z इत्यस्मात् 5 ऋणं कृते सति 6z – 5 इति प्राप्तं भविष्यति । एषः परिणामः 7 अस्ति ।

अतः, वाञ्छितं समीकरणं 6z – 5 = 7 अस्ति ।

(iii) m इत्यस्य चतुर्थं $\frac{m}{4}$ अस्ति ।

एतत् सप्तभ्यः त्रयः अधिकम् अस्ति । अस्यार्थम् अस्ति यत् अन्तरं ($\frac{m}{4}$ -7) तुल्यं 3 अस्ति ।

अतः, वाञ्छितं समीकरणं ($\frac{m}{4}$ - 7) = 3 अस्ति ।

(iv) वाञ्छितसंख्यां n इति स्वीकुर्वन्तु । n इत्यस्य त्र्यंशः n/3 अस्ति ।

उपरोक्तं त्र्यंशः + 5, $\frac{n}{3}$ + 5 अस्ति । एतत् अष्टानां तुल्यम् अस्ति ।

अतः, वाञ्छितं समीकरणं $\frac{n}{3}$ + 5 = 8 अस्ति ।

उदाहरणम् 2 निम्नलिखितानि समीकरणानि सामान्यकथनेषु परिवर्तन्ताम् :

(i) x -5 = 9 (ii) 5p = 20 (iii) 3n + 7 = 1 (iv) $\frac{m}{5}$ – 2 = 6

समाधानम्

(i) x इत्यस्मात् 5 निष्कासिते सति 9 प्राप्यते ।

(ii) एकस्याः संख्यायाः 'p' पञ्चगुणितं 20 अस्ति ।

(iii) एकं प्राप्तुं n इत्यस्य त्रिगुणे 7 योजयन्तु ।

(iv) कस्याश्चित् m संख्यायाः $\frac{1}{5}$ तमे भागे द्वौ ऋणे सति 6 प्राप्यते ।

प्रयासं कुर्वन्तु

उपरोक्तेभ्यः (ii) (iii) तथा च (iv) समीकरणेभ्यः प्रत्येकार्थं. न्यूनातिन्यूनम् एकस्मिन् अन्यकथनरूपं लिखन्तु ।

अत्र ध्यानार्हः बिन्दुः एषः वर्तते यत् एकस्मै दत्तसमीकरणाय, न केवलम् एकमेव,अपितु अनेकानि सामान्यानि कथनरूपाणि दातुं शक्यते । उदाहरणार्थम्, उपरोक्ताय (i) समीकरणाय भवन्तः वक्तुम् अर्हन्ति :

x इत्यस्मात् 5 ऋणं कुर्वन्तु। भवन्तः नव प्राप्स्यन्ति।

अथवा संख्या x, नवभ्यः 5 अधिकं वर्तते।

अथवा संख्या 9 x इत्यस्मात् 5 न्यूनम् अस्ति।

अथवा x तथा च 5 इत्यस्य अन्तरं 9 अस्ति इत्यादिः।

उदाहरणम् 3 निम्नलिखितायां स्थितौ विचारः क्रियन्ताम् :

राजूवर्यस्य जनकस्य वयः राजूवर्यस्य वयसः त्रिगुणात् पञ्च वर्षाणि अधिकानि सन्ति। राजूवर्यस्य जनकस्य वयः 44 वर्षाणि सन्ति। राजूवर्यस्य वयः ज्ञातुम् एकं समीकरणं रचयन्तु। (स्थाप्यन्ताम्)

समाधानम् अस्माभिः राजूवर्यस्य वयः ज्ञातं नास्ति। आयान्तु एतत् (वयः) y वर्षाणि स्वीकुर्मः। राजूवर्यस्य वयसः त्रिगुणितं 3y वर्षाणि सन्ति। राजूवर्यस्य जनकस्य वयः 3y वर्षात् 5 वर्षाणि अधिकम् अस्ति। अर्थात् राजूवर्यस्य जनकस्य वयः (3y + 5) वर्षाणि सन्ति। एतत् अपि दत्तम् अस्ति यत् राजूवर्यस्य जनकस्य वयः 44 वर्षाणि सन्ति।

अतः, $3y+5=44$ (4.3)

समीकरणे एषः चरः y अस्ति। अस्य समाधानेन राजूवर्यस्य वयः ज्ञातं भविष्यति।

उदाहरणम् 4 एकः आपणिकः द्विविधयोः पेटिकयोः आम्राणि विक्रीणाति।एते पेटिके लघ्वी गुर्वी च स्तः। एकस्यां गुर्व्यां पेटिकायां 8 लघ्वीनां पेटिकानां तुल्यानि आम्राणि तथा च 4 अतिरिक्तानि आम्राणि आगच्छन्ति। प्रत्येकं लघुपेटिकायाम् आम्राणां संख्याबोधकं समीकरणं रचयन्तु (निर्मान्तु)। दत्तम् अस्ति यत् एकस्यां गुर्व्यां पेटिकायां 100 आम्राणि आगच्छन्ति।

समाधानम् कल्पनां कुर्वन्तु यत् एकस्यां लघ्व्यां पेटिकायां m आम्राणि सन्ति। एकस्यां गुर्व्यां पेटिकायां m इत्यस्मात् 8 गुणितात् चत्वारि आम्राणि आगच्छन्ति। अर्थात् एकस्यां गुर्व्यां पेटिकायां 8 m + 4 आम्राणि सन्ति। परन्तु अत्र संख्या 100 दत्ता वर्तते। अनेन प्रकारेण

$$8m+4=100 \quad (4.4)$$

एतत् समीकरणं साधयित्वा, भवन्तः एकस्याः लघ्व्याः पेटिकायाः आम्राणि ज्ञातुं शक्नुवन्ति।

प्रश्नावली 4.1

1. निम्नलिखितायाः सारण्याः अन्तिमं स्तम्भं पूरयन्तु :

क्रमसंख्या	समीकरणं	चरस्य मानं	निर्दिशन्तु यत् समीकरणं पुष्टं भवति अथवा न भवति (आम् / न)
(i)	$x + 3 = 0$	$x = 3$	-
(ii)	$x + 3 = 0$	$x = 0$	-
(iii)	$x + 3 = 0$	$x = -3$	-
(iv)	$x - 7 = 1$	$x = 7$	-
(v)	$x - 7 = 1$	$x = 8$	-
(vi)	$5x = 25$	$x = 0$	-
(vii)	$5x = 25$	$x = 5$	-

(viii)	5x = 25	x = - 5	-
(ix)	m/3 = 2	m = - 6	-
(x)	m/3 = 2	m = 0	-
(xi)	m/3 = 2	m = 6	-

2. निरीक्षणं कुर्वन्तु यत् कोष्ठकेषु दत्तानि मानानि, दत्तानि मानानि सङ्गतानां समीकरणां समाधानम् अस्ति अथवा न :

(a) n +5 = 19 (n = 1) (b) 7n + 5 = 19 (n = - 2)

(c) 7n + 5 = 19 (n = 2) (d) 4p – 3 = 13 (p = 1)

(e) 4p – 3 = 13 (p = - 4) (f) 4p – 3 = 13 (p = 0)

3. 'प्रयत्नः एवं विस्मरणम्' विधिना निम्नलिखितानि समीकरणानि समाधयन्ताम् :

(i) 5p + 2 = 17 (ii) 3m – 14 = 4

4. निम्नलिखितेभ्यः कथनेभ्यः समीकरणानि यच्छन्तु :

(i) x तथा 4 संख्यानां योगः 9 अस्ति।

(ii) y अस्मात् 2 व्यवकलिते सति 8 प्राप्यते।

(iii) a अस्य दशगुणितं 70 अस्ति।

(iv) b संख्यां पञ्चभिः भागे सति 6 प्राप्यते।

(v) t अस्य त्रि-चतुर्थांशः (तीन- चौथाई) 15 अस्ति।

(vi) m इत्यस्य 7 गुणितं तथा च सप्तानां योगफलं भवन्तं 77 ददाति।

(vii) एकस्याः x संख्यायाः चतुर्थांशः, चत्वारः ऋणं, भवन्तं 4 ददाति।

(viii) यदि भवन्तः y इत्यस्य षड्गुणात् 6 ऋणं कुर्वन्ति, तर्हि भवद्भिः 60 प्राप्यते।

(ix) यदि भवन्तः z इत्यस्य त्र्यंशे 3 योजयन्ति, तदा भवन्तः 30 आप्नुवन्ति।

5. निम्नलिखितानि समीकरणानि सामान्यकथनेषु परिवर्तन्ताम् :

(i) p + 14 = 15 (ii) m -7 (iii) 2m = 7

(iv) $\frac{m}{5} = 3$ (v) 3m/5 = 6 (vi) 3p + 4 = 25

(vii) 4p – 2 = 18 (viii) $\frac{p}{2} + 2 = 8$

6. निम्नलिखितासु स्थितिसु समीकरणानि निर्मान्तु :

(i) इरफानः वदति यत् तस्य पार्श्वे, परमीतस्य पार्श्वे यावत्यः काचगुलिकाः सन्ति तस्य पार्श्वे ततः सप्ताधिकाः पञ्चगुणिताः काचगुलिकाः सन्ति। इरफ़ानस्य पार्श्वे 37 काचगुलिकाः सन्ति। (परमीतस्य काचगुलिकानां संख्यां m इति स्वीकुर्वन्तु।)

(i) लक्ष्म्याः पितुः आयुः 49 वर्षाणि सन्ति। तेषाम् आयुः,बालिकायाः आयुषः चतुर्वर्षाणि अधिकं त्रिगुणितम् अस्ति। (लक्ष्म्याः आयुः y इति वर्षाणि स्वीकुर्वन्तु)

(ii) अध्यापिका वदति यत् तस्याः कक्षायां एकेन विद्यार्थिना प्राप्ताः अधिकतमाः अङ्काः, प्राप्ताङ्कानां सप्ताधिकं (7 धनम्) द्विगुणितम् अस्ति। प्राप्ताः अधिकतमाः अङ्काः 87 सन्ति। (प्राप्तान् न्यूनतमान् l अङ्कान् स्वीकुर्वन्तु)

(iii) एकस्मिन् समद्विबाहुत्रिभुजे शीर्षकोणः प्रत्येकम् आधारकोणस्य द्विगुणितम् अस्ति।

(कल्पनां कुर्वन्तु यत् प्रत्येकम् आधारकोणः b° अस्ति) स्मरन्तु यत् त्रिभुजस्य त्रयाणां कोणानां योगः 180° भवति।

4.4.1 एकस्य समीकरणस्य समाधानम्

एतां समिकां विचारयन्तु

$$8 - 3 = 4 + 1 \qquad (4.5)$$

समिका (4.5) सत्यं वर्तते, यतोहि अस्य उभौ पक्षौ समानौ स्तः। (प्रत्येकं पञ्च समानौ स्तः)।

- आयान्तु उभयस्मिन् पक्षयोः द्वौ योजयामः। अस्य परिणामस्वरूपं, वयं प्राप्नुमः
  द.ह.प. (LHS) = 8-3+2 = 5+2 = 7, वा.ह.प.(RHS) = 4+1+2 = 5+2 = 7
  पुनः, समिका (4.5) सत्यम् अस्ति (अर्थात् द.ह.प. (LHS) वा.ह.प. (RHS) च समानौ स्तः) अनेन प्रकारेण, यदि वयम् एकस्याः समिकायाः उभयस्मिन् पक्षयोः एकामेव संख्यां योजयामः, तदापि सा समिका सत्यं भवति।

- आयान्तु अधुना उभयस्मिन् पक्षयोः द्वौ व्यवकलयामः। अस्य परिणामस्वरूपम्, वयं प्राप्नुमः
  द.ह.प. (LHS) = 8 - 3 - 2 = 5 – 2 = 3,
  वा.ह.प. (RHS) = 4 + 1 - 2 = 5 - 2 = 3,
  पुनः सा समिका सत्यम् अस्ति।
  अनेन प्रकारेण, यदि वयम् एकस्याः समिकायाः उभयस्मिन् पक्षयोः एकामेव संख्यां व्यवकलयामः (ऋणं कुर्मः), तदापि सा समिका सत्यं भवति।
- अनेन प्रकारेण, यदि वयम् एकस्याः समिकायाः उभयस्मिन् पक्षयोः एकामेव शून्येतरसंख्यया गुणयामः अथवा भागं कुर्मः, तदापि सा समिका सत्यं भवति।
  उदाहरणार्थम्, आयान्तु उपरोक्तायाः समिकायाः उभय-पक्षयोः त्रिभिः गुणयामः। वयं प्राप्नुमः
  द.ह.प. (LHS) = 3×(8 – 3) = 3 × 5 = 15,
  वा.ह.प. (RHS) = 3×(4 + 1)=3×5 = 15,
  समिका सत्यम् अस्ति।
  आयान्तु अधुना उपरोक्तायाः समिकायाः उभयः पक्षयोः द्वाभ्यां भागं कुर्मः।
  द.ह.प. (LHS) = (8 – 3) ÷ 2 = 5 ÷ 2 $= \frac{5}{2}$

  वा.ह.प. (RHS) = (4 + 1) ÷ 2 = 5 ÷ 2 = $\frac{5}{2}$ पुनः समिका सत्यम् अस्ति।

यदि वयं कामपि अन्यां समिकां स्वीकुर्मः, तदापि वयम् एतमेव निष्कर्षं प्राप्नुमः।
मन्यन्तां यत् वयम् एतं नियमं न पालयामः। विशेषरूपेण, मन्यन्तां यत् वयम् एकस्याः समिकायाः उभययोः पक्षयोः भिन्नां भिन्नां संख्यां योजयामः। अस्यां स्थित्यां, वयं पश्यामः यत् समिका सत्या न भविष्यति (अर्थात् उभौ पक्षौ समानौ न भविष्यतः) उदाहराणार्थम्, आगच्छन्तु (4.5) समिकां पुनः स्वीकुर्मः

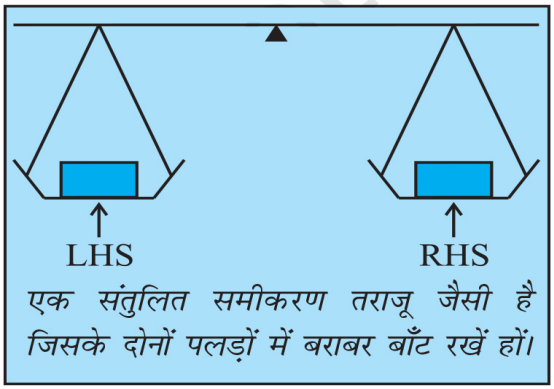
$$8 - 3 = 4 + 1$$

इदानीम्, अस्य वामपक्षे द्वौ योजयामः तथा च दक्षिणपक्षे त्रीन् योजयामः।
अधुना नवीनः द.ह.प. (LHS) = (8 – 3+2 = 5+2 = 7 अस्ति तथा च नवीनः वा.ह.प. (RHS) = 4 + 1 + 3 = 5 + 3 = 8 अस्ति। अधुना, समिका सत्या नास्ति, यतोहि नवीनः द.ह.प. (LHS) नवीनः वा.ह.प. (RHS) च समानौ न स्तः।

अनेन प्रकारेण, यदि वयम् एकस्याः समिकायाः उभयस्मिन् पक्षयोः, कापि गणितीयां संक्रियाम् एकया संख्यया सह न कुर्मः, तदा समिका सत्या न भवति।

उपरोक्ताः निष्कर्षाः समीकरणेभ्यः अपि मान्याः भवन्ति, यतोहि प्रत्येकं समीकरणे चरः केवलं संख्याम् एव निरूपयति।

प्रायः एकं समीकरणम् एका तोलनकर्त्री तुला (balance) मन्यते। एकस्मिन् समीकरणे एका गणितीया संक्रिया तथा अवगम्यते यथा तुलाया उभयस्मिन् फलकयोः समानस्य तुलामानस्य निक्षेपः तथा ताभ्यां समानस्य तुलामानस्य निस्कासनम्।



एक संतुलित समीकरण तराजू जैसी है जिसके दोनों पलड़ों में बराबर बाँट रखें हों।

[एकं समीकरणं एकाम् एतादृशीं तोलनकर्त्रीं तुलाम् अवगन्तुं शक्यते,यस्याः द्वयोः फलकयोः समानं तुलामानं धरेत्(स्थापितं स्यात्)।]

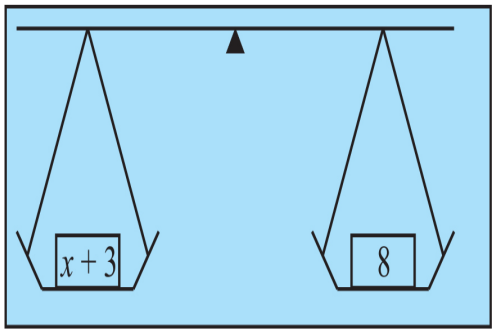
अस्यां स्थितौ,तुलायाः दण्डं क्षैतिजं तिष्ठति। यदि वयं फलकयोः समानं तुलामानं निक्षिपामः, तदा दण्डं तदापि क्षैतिजं तिष्ठति। इत्थमेव यदि वयं फलकद्वयात् समानं तुलामानं निष्कासयामः, तदापि दण्डं क्षैतिजं तिष्ठति। अस्मात् विपरीतं, यदि वयं फलकयोः भिन्नं तुलामानं निक्षिपामः अथवा ताभ्यां भिन्नं तुलामानं निष्कासयामः (ऋणं कुर्मः), तदापि तुलायाः सन्तुलनं भ्रष्टं भवति अर्थात् दण्डं क्षैतिजे न तिष्ठति।

वयम् एतं सिद्धान्तं समीकरण-समाधाने प्रयोक्तुं शक्नुमः। निस्सन्देहः अत्र तुला काल्पनिका वर्तते तथा च सङ्ख्याः तुलामानमिव भौतिकरूपेण सन्तोलितुं प्रयोक्तुं शक्याः भवन्ति। अस्य सिद्धान्तस्य प्रस्तुतेः एष एव मुख्योद्देशः अस्ति। आयान्तु कानिचित् उदाहरणानि स्वीकुर्मः।

निम्नलिखितं समीकरणं विचारयन्तु :

$$x + 3 = 8 \qquad (4.6)$$

अस्य समीकरणस्य उभयोः पक्षयोः त्रीन् ऋणं कुर्मः।



वयं त्रीन् किमर्थम् ऋणं कुर्मः कामपि अन्यां संख्यां किमर्थं न ऋणं कुर्मः ? त्रीन् योजयित्वा पश्यन्तु। किम् एतत् किमपि साहाय्यं करिष्यति ? किमर्थं न ? एतत् एतदर्थं कृतं, यतोहि त्रीन् इत्यस्य ऋणीकरणे सति द.ह.प. x अवशिष्यते।

नवीनः द.ह.प.(LHS) = x + 3 - 3 = x तथा नवीनः वा.ह.प.(RHS) = 8 - 3 = 5

यतोहि अनेन सन्तुलने किञ्चित् अपि परिवर्तनं न भवति, अतः वयं प्राप्नुमः नवीनः द.ह.प. (LHS) = नवीनः वा.ह.प. (RHS) अथवा x = 5 एतत् तदेव अस्ति यत् इच्छामः। अर्थात् (4.6) समीकरणस्य एकं समाधानम्। अस्य पुष्टिं कर्तुं यत् एतत् उचितम् अस्ति अथवा अनुचितम्, वयं प्रारम्भिके समीकरणे x = 5 स्थापयामः। अस्मान् द.ह.प. (LHS) = x + 3 = 5 + 3 = 8,यत् वा.ह.प.(RHS) तुल्यम् अस्ति। एतदेव उचितसमाधानाय आवश्यकं वर्तते।

समीकरणस्य द्वयोः पक्षयोः उचितया गणितीयसंक्रियया (अर्थात् 3 ऋणं करणेन), वयं समीकरणस्य समाधानं प्राप्तवन्तः।

आगच्छन्तु एकम् अन्यं समीकरणं स्वीकुर्मः

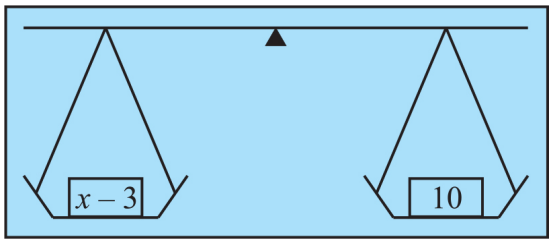
$$x - 3 = 10$$

अत्र अस्माभिः किं कर्तव्यम् ? अस्माभिः उभयत्र त्रयः योजयितव्याः।

अनेन समीकरणस्य सन्तुलनं तथैव स्थास्यति तथा च द.ह.प. (LHS) मध्ये x एव भविष्यति।

नवीनः द.ह.प. (LHS) = $x - 3 + 3 = x$, नवीनः वा.ह.प. (RHS) $10 + 3 = 13$

अतः $x = 13$ अस्ति, यत् इष्टं समाधानम् अस्ति। प्रारम्भिके (4.7) समीकरणे $x = 13$ स्थापिते सति, वयम् अस्य पुष्टिं कुर्मः यत् समाधानम् उचितम् अस्ति :



प्रारम्भिकस्य समीकरणस्य द.ह.प.(LHS) = $x - 3 = 13 - 3 = 10$ अस्ति। यत् वाञ्छनीयम् अस्ति यत्, वा.ह.प.(RHS) इत्यस्य तुल्यः अस्ति।

एवमेव, आयान्तु निम्नलिखितानि समीकरणानि पश्यन्तु :

$5y = 35$ (4.8)

$\frac{m}{2} = 5$ (4.9)

प्रथमायां स्थितौ, वयम् उभौ पक्षौ पञ्चभिः भागं दास्यामः। अनेन द.ह.प.(LHS) इत्यत्र y इति अवशिष्टं भविष्यति।

नवीनः द.ह.प.(LHS) = $\frac{5y}{5} = \frac{5 \times y}{5} = y$, नवीनः वा.ह.प.(RHS) = $\frac{35}{5} = \frac{5 \times 7}{5} = 7$

अतः, $y = 7$

एतदेव समीकरणस्य वाञ्छितं समाधानम् अस्ति। वयं (4.8) समीकरणे $y = 7$ इति प्रस्थापितं कृत्वा अस्य निरीक्षणं कर्तुम् अर्हामः यत् समीकरणं पुष्टं भवति।

द्वितीयां स्थितौ, वयम् उभौ पक्षौ द्वाभ्यां गुणयामः। अनेन द.ह.प.(LHS) इत्यत्र m इति अवशिष्टं भवति।

नवीनः द.ह.प.(LHS) = $\frac{m}{2} \times 2 = m$, तथा च नवीनः वा.ह.प. (RHS) = $5 \times 2 = 10$ अस्ति।

अतः, $m = 10$ (एतदेव वाञ्छितं समाधानम् अस्ति। भवन्तः अस्य निरीक्षणं कर्तुं शक्नुवन्ति यत् समाधानम् उचितम् अस्ति अथवा न)

उपरोक्तैः उदाहरणैः एतत् द्रष्टुं शक्यते यत् समीकरणस्य समाधानाय, अस्माकं कृते यस्याः संक्रियायाः आवश्यकता भविष्यति सा समीकरणे निर्भरं करोति। अस्माकं प्रयासं स्यात् यत् समीकरणे चरः पृथक् भवेत्। कदापि एवं कर्तुं, वयम् एकाधिकाः गणितीयाः संक्रियाः कर्तुं शक्नुमः। एतत् मस्तिष्के धारयन्, आयान्तु कानिचित् समीकरणानि साधयामः।

उदाहरणम् 5 समाधानम् क्रियन्ताम् :

(a) $3n + 7 = 25$ (4.10)

(b) $2p - 1 = 23$ (4.11)

समाधानम्

(a) वयं समीकरणस्य द.ह.प.(LHS) मध्ये n चरं पृथक् कर्तुम्, एकेन चरणबद्धविधिना कार्यं कुर्मः। अत्र (LHS) $3n + 7$ अस्ति। सर्वप्रथमं वयम् अस्मात् 7 ऋणं करिष्यामः, येन $3n$ इति प्राप्स्यामः।

अस्मात् अग्रिमे सोपाने, वयम् एतं त्रिभिः भागं दास्यामः, यस्मात् n इति प्राप्स्यामः । स्मरन्तु यत् समीकरणस्य उभयस्मिन् पक्षयोः एका एव क्रिया कर्तव्या । अतः, उभयस्मिन् पक्षयोः 7 ऋणं कृते सति,

$3n + 7 - 7 = 25 - 7$ (1 चरणम्)

अथवा $3n = 18$

इदानीम् उभौ पक्षौ त्रिभिः भागं ददतु :

$$\frac{3n}{3} = \frac{18}{3}$$ (2 चरणम्)

$n = 6$, यत् अस्य समाधानम् अस्ति ।

(b) अत्र अस्माभिः किं कर्तव्यम् ? सर्वप्रथमम् उभयस्मिन् पक्षे एकं योजयामः

$2p - 1+1 = 23+ 1$ (1 चरणम्)

अथवा $2p = 24$

इदानीम् उभौ पक्षौ द्वाभ्यां भागं यच्छामः

$$\frac{2p}{2} \times \frac{24}{2}$$ (2 चरणम्)

अथवा $p = 12$, यत् अस्य समाधानम् अस्ति ।

भवद्भिः एकम् उत्तमं व्यसनं विकसितव्यं, यत् एतत् अस्ति यत् प्राप्तसमाधानस्य निरीक्षणम् अवश्यमेव कुर्वन्तु । यद्यपि अस्माभिः एतत् (a) इत्यर्थं न कृतं ,परन्तु आयान्तु (b) निमित्तम् एतत् कुर्मः।

आगच्छन्तु एतत् समाधानं $p = 12$ समीकरणे स्थापयामः।

द.ह.प. (LHS) $= 2p - 1 = 2 \times 12 - 1 = 24 - 1$

$= 23$ = वा.ह.प. (RHS)

अनेन प्रकारेण, समाधानस्य सत्यायाः परीक्षणं भवति ।

उपरोक्तस्य (a) इत्यस्य समाधानस्य परीक्षणं भवन्तः स्वयमेव कुर्वन्तु ।

सम्प्रति वयम् अस्यां स्थितौ स्मः यत् अप्पूः, सरिता तथा च अमीना द्वारा प्रस्तुतां क्रीडां प्रति पुनः प्रतिगच्छामः अधिगच्छामः तैः केन प्रकारेण निज उत्तराणि अजानन् । एतदर्थम्, आयान्तु (4.1) (4.2) च समीकरणे पश्यामः, ये क्रमशः अमीनायाः अप्पूवर्यस्य च उदाहरणानां सङ्गते स्तः ।

निम्नलिखितं प्रथमसमीकरणं विचारयन्तु :

$4x+5 = 65$ (4.1)

उभययोः पक्षयोः पञ्च ऋणे कृते सति, $4x+5-5 = 65-5$

अर्थात्,

$4x = 60$

x पृथक् कर्तुम्,उभौ पक्षौ चतुर्भिः भागे सति, $\frac{4x}{4} = \frac{60}{4}$

अथवा $x=15$, यत् वाञ्छितं समाधानम् अस्ति । (परीक्षां कुर्वन्तु यत् एतत् उचितम् अस्ति)

सम्प्रति निम्नलिखितं समीकरणं विचारयन्तु :

$10y - 20 = 50$

उभयोः पक्षयोः 20 योजितयोः सत्योः, वयं प्राप्नुमः

$10y - 20 + 20 = 50 + 20$ अथवा $10y = 70$

उभौ पक्षौ दशभिः भागे सति, वयं प्राप्नुमः $\frac{10y}{10} = \frac{70}{10}$

अथवा $y = 7$, यत् वाञ्छितं समाधानम् अस्ति। (निरीक्षणं कुर्वन्तु यत् एतत् उचितम् अस्ति)

भवन्तः अनुभविष्यन्ति यत् एतानि एव उत्तराणि अप्पूः, सरिता अथवा अमीना दत्तवन्तः। तैः समीकरणरचना पुनश्च तेषां समाधानम् अधिगतम् आसीत्। अनेन कारेण ते निजक्रीडां रचयित्वा कक्ष्यायाः उपरि स्वकीयं प्रभावं स्थापितवन्तः। एतं विषयं समादाय 4.7 अनुच्छेदे प्रतिगमिष्यामः।

प्रश्नावली 4.2

1. आदौ चरं पृथक्-कतारं चरणं वदन्तु पुनश्च समीकराणि साधनुवन्तु :
   (a) $x-1=0$ (b) $x+1=0$ (c) $x-1=5$ (d) $x+6=2$
   (e) $y-4=-7$ (f) $y-4=4$ (g) $y+4=4$ (h) $y+4=-4$
2. पूर्वं चरं पृथक् कर्तुं प्रयुञ्जानं चरणं वदन्तु तत्पश्चाचत् समीकरणानां समाधानं कुर्वन्तु
   (a) $3l=42$ (b) $b/2=6$ (c) $p/7=4$ (d) $4x=25$
   (e) $8y=36$ (f) $z/3=5/4$ (g) $a/5=7/15$ (h) $20t=-10$
3. चरं पृथक् कर्तुं भवन्तः यत् चरणं प्रयोजयिष्यन्ति, तद् वदन्तु तदन्तरं समीकरणानि साध्यन्ताम्
   (a) $3n-2=46$ (b) $5m+7=17$ (c) $20p/3=40$ (d) $3p/10=6$
4. निम्नलिखितानि समीकरणानि साधनुवन्तु :
   (a) $10p=100$ (b) $10p+10=100$ (c) $p/4=5$ (d) $p/3=5$
   (e) $3p/4=6$ (f) $3s=-9$ (g) $3s+12=0$ (h) $3s=0$
   (i) $2q=6$ (j) $2q-6=0$ (k) $2q+6=0$ (l) $2q+6=12$

4.5 कानिचित् अन्यानि समीकरणानि

आयान्तु केषाञ्चित् अन्येषां समीकरणां समाधानस्य अभ्यासं कुर्मः। एतेषां समीकरणां समाधानसमये, वयम् एकां संख्यां कथं स्थानापन्नं (transpose) क्रियते (अर्थात् एकस्मात् पक्षात् द्वितीये पक्षे कथं नीयते) इत्यस्मिन् विषये पठिष्यामः (अधिगमिष्यामः)। वयं काञ्चित् संख्यां, समीकरणस्य उभयोः पक्षयोः योजनापेक्षया अथवा ऋणापेक्षया, स्थानापन्नं कर्तुं शक्नुमः।

उदाहरणम् 6 समाधानं कुर्वन्तु : $12p-5=25$ (4.12)

समाधानम्

- समीकरणस्य उभसम्मिन् पक्षयोः 5 ऋणे कृते सति,
  $12p-5+5=25+5$ अथवा $12p=30$
- समीकरणस्य उभसम्मिन् पक्षयोः 12 भागं कृते सति,
  $12p/12=30/12$ अथवा $p=5/2$

निरीक्षणम् : (4.12) समीकरणस्य द.ह.प. = $p=5/2$ इति स्थापिते सति

ध्यानं यच्छन्तु यत् उभयस्मिन् पक्षयोः 5 योजनस्य सः एव अर्थः अस्ति, यत् (-5) इत्यस्य पक्षपरिवर्तनस्य अस्ति।

$12p-5=25$

$12p=25+5$

पक्षपरिवर्तनम् 'स्थानापन्नम्' इति उच्यते। स्थानापन्नसमये संख्यायाः चिह्नं परिवर्तितं भवति।

द.ह.प. = 12 × 5/2-5

= 6 × 5 – 5

= 30 – 5 = 25 = वा.ह.प.

यथा अस्माभिः किञ्चित् समीकरणं साधयन् दृष्टं, समान्यतः वयं समीकरणस्य उभयस्मिन् पक्षयोः एकामेव सङ्ख्यां योजयामः अथवा उभयस्मिन् पक्षयोः एकामेव सङ्ख्यां व्यवकलयामः। काञ्चित् सङ्ख्यां स्थानापन्नं विधातुम् (अर्थात् संख्यायाः पक्षयोः परिवर्तनम्) संख्यायाः उभयोः पक्षयोः योजनम् अथवा संख्यायाः उभयस्मिन् पक्षयोः व्यवकलनम् इव अस्ति। एतत् कर्तुं, तस्याः संख्यायाः चिह्नं परिवर्तितव्यं भवति। यः नियमः संख्यानां प्रयुक्तः भवति, सः एव नियमः व्यञ्जकेभ्यः अपि भवति। आगच्छन्तु स्थानापन्नस्य उदाहरणद्वयं स्वीकुर्मः।

उभयस्मिन् पक्षयोः योजनम् अथवा व्यवकलनम् अस्ति	**स्थानापन्नं विधानम्**
(i) 3p – 10 = 5 उभयोः पक्षयोः 10 योजयन्तु 3p – 10 + 10 = 5 + 10 अथवा 3p = 15	(i) 3p – 10 = 5 द.ह.पक्षात्(-10)स्थानापन्नं क्रियन्ताम् (स्थानापन्ने कृते सति,-10 परिवर्त्य + 10 भवति।) 3p = 5 + 10 अथवा 3p = 15
(ii) 5x + 12 = 27 उभयोः पक्षयोः 12 ऋणं कुर्वन्तु 5x + 12 – 12 = 27 – 12 अथवा 5x = 15	(ii) 5x + 12 = 27 +12 इत्येतं स्थानापन्नं क्रियन्ताम् (स्थानापन्ने कृते सति,+12 परिवर्त्य - 12 भवति। 5x = 27 – 12 अथवा 5x = 15

इदानीं वयं समीकरणद्वयं साधयिष्यामः। यथा भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति, एतेषु समीकरणेषु कोष्ठकानि अपि सन्ति, यानि आदौ उद्घाटितव्यानि सन्ति।

उदाहरणम् 7 समाधानं कुर्वन्तु :

(a) 4(m+3)=18 (b) -2(x+3)=8

समाधानम्

(a) 4(m+3)=18

आयान्तु उभौ पक्षौ चतुर्भिः विभजयामः। अनेन दक्षिण –हस्त-पक्षात् कोष्ठकानि अपसरिष्यन्ति। वयं प्राप्नुमः

$m+3=\frac{18}{4}$ अथवा $m+3=\frac{9}{2}$

अथवा $m=\frac{9}{2}-3$ (त्रीन् वाम-हस्त-पक्षे स्थानापन्ने कृते सति)

अथवा $m=\frac{3}{2}$ (वाञ्छितं समाधानम्) $\left(\text{यतोहि } \frac{9}{2}-3=\frac{9}{2}-\frac{6}{2}=\frac{3}{2}\right)$

अवेक्षणम् द.ह.प.= $4\left[\frac{3}{2}+3\right]=4\times\frac{3}{2}+4\times3=2\times3+4\times3$ $\left(m=\frac{3}{2}\right)$

= 6+12 = 18 = द.ह.प.

(b) $-2(x+3) = 8$

दक्षिण–हस्त-पक्षात् कोष्ठकानि अपसारयितुं, वयम् उभौ पक्षौ -2 द्वारा भागं दद्मः। अस्मान् प्राप्तं भविष्यति:

$(x+3) = -\frac{8}{2}$ अधुना $x + 3 = -4$

(त्रीन् वा.ह.पक्षे स्थानापन्ने कृते सति)

अथवा, $x=(-5-6)/2$ अथवा

$x =(-11)/2$ (वाञ्छितं समाधानम्)

परीक्षणम् द-ह-प = $-2(-11/2+3)=2(-11/2+6/2)=2((-11+6)/2)$

$= -2\ (-5/2)=(2\times5)/2=5$ वा.ह.प यत् भवितव्यम् आसीत्

4.6 समाधानात् समीकरणं प्रति

अतुलः सदैव भिन्नप्रकारेण चिन्तयति । सः केनचित् विद्यार्थिना समीकरणस्य समाधानाय उत्तरोत्तरान् चरणान् पश्यति। सः विचारयति यत् किमर्थं न अस्मात् विपरीतमार्गम् अनुसरेम ।

समीकरणम् ⟶ समाधानम् (समान्यः मार्गः)

समाधानम् ⟶ समीकरणम् (विपरीतः मार्गः)

सः अधः प्रदत्तं मार्गम् अनुसरति :

प्रारम्भं कुर्वन्तु $x=5$

उभौ पक्षौ चतुर्भिः गुणयन्तु ↓ $4x-3=20$ ↑ उभौ पक्षौ चतुर्भिः भागं यच्छन्तु

उभाभ्यां पक्षाभ्यां त्रीन् व्यवकलन्तु ↓ $4x-3=17$ ↑ उभयस्मिन् पक्षयोः त्रीन् योजयन्तु

अनेन एकं समीकरणं प्राप्यते । यदि वयं प्रत्येकं चरणाय, तस्मात् विपरीतं पन्थानम् अनुसरेम । (यथा दक्षिणभागे दर्शितम् अस्ति ।), तदा अस्मान् समीकरणस्य समाधानं प्राप्तं भवति ।

हेतलवर्या अस्मिन् रूचिं वहति। सा तस्मात् प्रथमचरणात् आरम्भं करोति एकं च अन्यं समीकरणं रचयति।

$x=5$

उभौ पक्षौ त्रिभिः गुणिते सति, $3x=15$

उभयस्मिन् पक्षयोः चतुरः योजिते सति, $3x+4=19$

'y=4' अस्मात् आरम्भं कुर्वन्तु तथा च अस्मात् भिन्नं-भिन्नं समीकरणं रचयन्तु । स्वस्य त्रीणि मित्राणि अपि तथा कर्तुं वदन्तु । किं तेषां समीकरणानि भवतः भिन्नानि सन्ति ?

किम् एतद् उत्तमं नास्ति यद् भवन्तः न केवलं समीकरणानि साध्नुवन्ति अपितु तानि रचयन्ति अपि।किं भवद्भिः अवलोकितं यत् एकस्य प्रदत्तसमीकरणस्य भवन्तः केवलम् एकमेव समाधानं प्राप्नुवन्ति, किन्तु दत्तेन समाधानेन भवन्तः अनेकानि समीकरणानि रचयितुं शक्नुवन्ति ।

प्रयासं कुर्वन्तु

तस्मात् 'x=5'चरणात् आरम्भं कुर्वन्तु अस्मात् द्वे भिन्ने समीकरणे रचयन्तु। निजकक्षायाः द्वौ सहपाठिनौ एते समीकरणे साधयितुं कथयन्तु । निरीक्षणं कुर्वन्तु यत् किं तेषाम् उत्तरम् x=5 अस्ति ।

प्रयासं कुर्वन्तु

द्वयोः संख्याप्रहेलिकयोः निर्माणस्य प्रयासं कुर्वन्तु, एकं समाधानम् 11 द्वितीयं च समाधानम् 100 स्वीकृत्य।

अधुना सारा एतद् इच्छति यत् सम्पूर्णाकक्षा एतत् जानीयात् यत् सा किं चिन्तयन्ती अस्ति। सा वदति ''अहं हेतलमहोदयायाः समीकरणं स्वीकृत्य तत् कथने परिवर्तिष्ये, येन एका प्रहेलिका निर्मिता भविष्यति।उदाहरणार्थं

कामपि संख्यां चिन्तयन्तु,तां त्रिभिः गुणयन्तु गुणनफले च 4 योजयन्तु । इदानीं वदन्तु यत् भवद्भिः का संख्या प्राप्ता ।

यदि योगः 19 अस्ति, तर्हि हेतलद्वारा प्राप्तसमीकरणेन प्रहोलिका साधिता भविष्यति। वस्तुतः वयं जानीमः यत् एतत् 5 अस्ति, यतोहि हेतलमहोदया एतत् प्रारम्भे अकरोत्''

सा अप्पूं, सरिताम् अमीनां च प्रति मुखं कृत्वा पृच्छति यत् किं तैः एवमेव निज प्रहेलिका रचिता। त्रिभिः उच्यते ''आम्''

इदानीं वयं ज्ञातवन्तः यत् केन प्रकारेण अनेकाः प्रहेलिकाकाः अन्याः च समस्याः च रचयितुं शक्यन्ते।

प्रश्नावली 4.3

1. निम्नलिखितानां समीकरणानां समाधानं यच्छन्तु :

(a) $2y + \frac{5}{2} = \frac{37}{2}$ (b) $5t + 28 = 10$ (c) $\frac{a}{5} + 3 = 2$

(d) $\frac{q}{4} + 7 = 5$ (e) $\frac{5}{2}x = -10$ (f) $\frac{5}{2}x = \frac{25}{4}$

(g) $7m + \frac{19}{2} = 13$ (h) $6z + 10 = -2$ (i) $\frac{3l}{2} = \frac{2}{3}$

(j) $\frac{2b}{3} - 5 = 3$

2. निम्नलिखितानि समीकरणानि साध्यन्ताम् :

(a) $2(x+4)=12$ (b) $3(n-5)=21$ (c) $3(n-5)=21$

(d) $-4(2+x)=8$ (e) $4(2-x) = 8$

3. निम्नलिखितानां समीकरणानां समाधानं यच्छन्तु :

(a) $4 = 5(p-2)$ (b) $-4 = 5(p-2)$ (c) $16=4+3(t+2)$

(d) $4+5(p-1) = 34$ (e) $0 = 16 + 4(m-6)$

4. 'x = 2' इत्यस्मात् प्रारम्भं कुर्वन्तः, त्रीणि समीकरणानि रचयन्तु।

5. 'x = -2' अस्मात् प्रारम्भं कुर्वन्तः, त्रीणि समीकरणानि रचयन्तु।

4.7 व्यवहारिकासु स्थितिसु सरलसमीकरणानाम् अनुप्रयोगः

वयम् एतादृशानि बहूनि उदाहरणानि अपश्याम, येषु अस्माभिः दैनिकजीवनस्य भाषातः कथनानि स्वीकृत्य तानि सरलसमीकरणेषु परिवर्तितानि। अस्माभिः एतत् अपि अधिगतं यत् सरलसमीकरणानां समाधानं कथं क्रियते। इत्थम्, अधुना वयं प्रहेलिकाभ्यः व्यवहारिकस्थितिभ्यः च सम्बन्धितसमस्याः समासाधयितुं पूर्णतया समर्थाः स्मः। अस्य विधिः एषः अस्ति यत् आदौ वयम् एतासां स्थितीनां संगतसमीकरणानि रचयेम पुनश्च एतासां प्रहेलिकानां/समस्यानां समाधानं प्राप्तुं प्राप्तसमीकरणानि साधयेम। वयं ततः एव आरम्भं कुर्मः, यत् पूर्वमेव दृष्टम् [उदाहरणार्थं 1 (i)तथा च (ii),अनुच्छेदम् 4.2]

उदाहरणम् 8 कस्याश्चित् सङ्ख्यायाः एकादशाधिकस्य त्रिगुणितस्य च योगः 32 अस्ति। सा सङ्ख्या ज्ञातव्या।

समाधानम् यदि अज्ञातसङ्ख्यां 'x' इति मन्यामहे, तदा तस्याः त्रिगुणितं 3x भविष्यति, 3x तथा च एकादशानां योगः 32 अस्ति। अर्थात् $3x + 11 = 32$

अस्य समीकरणस्य समाधानाय वयम् एकादश दक्षिणहस्तपक्षे स्थानापन्नं कुर्मः, येन वयम् आप्नुमः

एतदेव समीकरणम् अस्मान् पूर्वम् 4.2 अनुच्छेदस्य 1 उदाहरणे प्राप्तम् अभवत्।

$3x = 32 - 11$ अथवा, $3x = 21$

अधुना उभौ पक्षौ त्रिभिः भागे सति, वयं प्राप्नुमः

$$x = \frac{21}{3} = 7$$

अतः वाञ्छनीया संख्या 7 अस्ति। (वयम् अस्य निरीक्षणाय सप्तनां त्रिगुणिते 11 योजयित्वा द्रष्टुं शक्नुमः यत् परिणामः 32 आगच्छति।)

उदाहरणम् 9 सा संख्या ज्ञायतां यस्याः एक –चतुर्थः, त्र्यधिकसप्तनाम् अस्ति।

समाधानम्

- आयान्तु अज्ञातसंख्यां 'y' इति स्वीकुर्मः। अस्याः एक –चतुर्थः $\frac{y}{4}$ अस्ति।

  संख्या ($\frac{y}{4}$) 7 संख्यातः 3 अधिकम् अस्ति।

  अतः,अस्मान् 'y' निम्नलिखितं समीकरणं प्राप्तं भवति :

  $$\frac{y}{4} - 7 = 3$$

- अस्य समीकरणस्य समाधानाय आदौ – 7 एतं द.ह.पक्षे स्थापनं कुर्वन्तु अनेन प्रकारेण,

  $$\frac{y}{4} = 3 + 7 = 10$$

  तत्पश्चात् उभौ पक्षौ चतुर्भिः गुणयित्वा, प्राप्नुमः

  $$\frac{y}{4} \times 4 = 10 \times 4$$ अथवा, $y = 40$ (वाञ्छितसंख्या)

  निरीक्षणम् 'y' इत्यस्य मानं स्थापिते सति,

  द.ह.प. = $\frac{40}{4} - 7 = 10 - 7 = 3$ = द.ह.प.,यत् स्यात्।

प्रयासं कुर्वन्तु

(i) यदा भवन्तः एकां संख्यां षड्भिः गुणयन्ति पुनश्च गुणफलात् पञ्च ऋणं कुर्वन्ति, तदा भवन्तः सप्त प्राप्नुवन्ति।किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् का सा संख्या ?

(ii) का सा संख्या अस्ति,यस्याः एक-त्र्यंशे पञ्च योजिते सति अष्ट प्राप्यते ?

उदाहरणम् 10 राजूवर्यस्य जनकस्य वयः राजूवर्यस्य वयसः पञ्चाधिकं त्रिगुणम् वर्षाणि सन्ति। राजूवर्यस्य वयः ज्ञायतां, यदि तस्य जनकस्य वयः 44 वर्षाणि सन्ति।

समाधानमम्

- तृतीयोदाहरणस्य अनुसारं राजूवर्यस्य आयुः (y) ज्ञातुं समीकरणम् $3y + 5 = 44$ अस्ति।
- एतत् साधयितुम्, पूर्वं वयं पञ्च स्थापन्नं कुर्मः। वयं प्राप्तं भवति :

  $3y = 44 - 5 = 39$

  उभौ पक्षौ त्रिभिः भागे सति,वयं प्राप्नुमः $y = 13$

  अर्थात् राजूवर्यस्य वयः 13 वर्षाणि सन्ति। (भवन्तः स्वकीयोत्तरस्य अवेक्षणं कर्तुं शक्नुवन्ति।)

प्रयासं कुर्वन्तु

मापानुसारं, द्विविधः पेटिकाः सन्ति, यासु आम्राणि सन्ति। प्रत्येकं गुर्व्यां पेटिकायां स्थापितानाम् आम्रसंख्या अष्टसु लघुपेटिकासु स्थापितानाम् आम्रसंख्यातः 4 अधिका अस्ति। प्रत्येकं गुर्व्यां पेटिकायां 100 आम्राणि सन्ति। प्रत्येकं लघ्वीषु पेटिकासु कियन्ति आम्राणि सन्ति।

प्रश्नावली 4.4

1. निम्नलिखितस्थितिभ्यः समीकरणानि रचयन्तु पुनः च तानि साधयित्वा अज्ञातसंख्याः ज्ञायताम्:
   (a) एकस्याः संख्यायाः अष्टगुणिते चतुरः योजयन्तु, भवन्तः 60 प्राप्स्यन्ति।
   (b) एकस्याः संख्यायाः ऋणं चत्वारः $\frac{1}{5}$ इति संख्या 3 ददाति।
   (c) यदि अहं कस्याश्चित् संख्यायाः त्रि-चतुर्थं स्वीकृत्य अस्मिन् त्रीन् योजयामि, तु तदा 21 प्राप्नोमि।
   (d) यदा अहं कस्याश्चित् संख्यायाः द्विगुणितात् एकादश ऋणं कृतवान्, तदा परिणामं 15 प्राप्तवान्।
   (e) मुन्नाद्वारा 50 मध्यात् स्वकीय-अभ्यास-पुस्तिकानां संख्यायाः त्रिगुणितम् ऋणं कृतं, तदा सः अष्ट प्राप्नोति।
   (f) इबेनहलमहोदया एकां संख्यां विचारयति। सा अस्यां 19 योजयित्वा योगं पञ्चद्वारा भागं ददाति, सा 8 प्राप्नोति।
   (g) अनवरः एकां संख्यां विचारयति। यदि सः अस्याः संख्यायाः $\frac{5}{2}$ मध्यात् 7 निष्कासयामः, तर्हि परिणामः 23 अस्ति।
2. निम्नलिखितानां समाधानं यच्छन्तु :
   (a) अध्यापिका वदति यत् तस्याः कक्ष्यायाम् एकेन विद्यार्थिना प्राप्ताः अधिकतमाः अङ्काः, प्राप्तनां न्यूनतमानाम् अङ्कानां सप्ताधिकं द्विगुणितम् अस्ति। प्राप्ताः अधिकतमाः अङ्काः 87 सन्ति। कति प्राप्ताः न्यूयनतमाः अङ्काः सन्ति ?
   (b) कस्यचित् समद्विबाहुत्रिभुजस्य आधारकोणौ समानौ स्तः। शीर्षकोणः 40° अस्ति। अस्य त्रिभुजस्य आधारकोणौ कौ स्तः। (स्मरन्तु यत् त्रिभुजस्य त्रयाणां कोणानां योगः 180° भवति।)
   (c) सचिनद्वारा निर्मितानां धावनाङ्कानां संख्या राहुलद्वारा निर्मितानां धावनाङ्कानां द्विगुणितम् अस्ति। तभ्यां मिलित्वा निर्मिताः आहत्य धावनाङ्काः 02 न्यूनं द्विशतम् अस्ति। प्रत्येकं कियतः धावानाङ्कान् निर्मितवान् ?
3. निम्नलिखितानां समाधानं यच्छन्तु :
   (i) इरफ़ानः वदति यत् तस्य पार्श्वे, परमीतस्य पार्श्वे यावत्यः काचगुलिकाः सन्ति तस्मात् सप्ताधिकम् पञ्चगुणितं काचगुलिकाः सन्ति। इरफानः पार्श्वे 37 काचगुलिकाः सन्ति। परमीतस्य पार्श्वे कियत्यः काचगुलिकाः सन्ति ?
   (ii) लक्ष्म्याः पितुः वयः 49 वर्षाणि सन्ति। तेषां वयः लक्ष्म्याः वयसः चतुरधिकं त्रिगुणितं वर्षाणि सन्ति। लक्ष्म्याः वयः कियत् अस्ति ?
   (iii) सुन्दरग्रामवासिभिःस्वग्रामस्यकस्मिंश्चित्उद्यानेकतिपयाःवृक्षाःआरोपिताःआसन्।एतेषुकतिचन वृक्षाः फलवन्तः आसन्। तेषां वृक्षाणां संख्या ये फलवन्तः न आसन्, फलवद्भ्यः वृक्षेभ्यः द्व्यधिकं त्रिगुणितम् आसीत्। यदि फलरहितवृक्षाणां सङ्ख्या 77 इति आसीत् तदा आरोपितवृक्षाणां संख्या का आसीत् ?
4. निम्नलिखितायाः प्रहेलिकायाः समाधानं यच्छन्तु :

   अहम् एका संख्या अस्मि,

   मम परिचयं वदतु।

मां सप्तवारं स्वीकुर्वन्तु,
तथा च पञ्चाशत् योजयन्तु।
एकं त्रिशतं प्राप्तुं
अधुनापि भवते चत्वारिंशत् आवश्यकम्।

अस्माभिः किं चर्चितम् ?

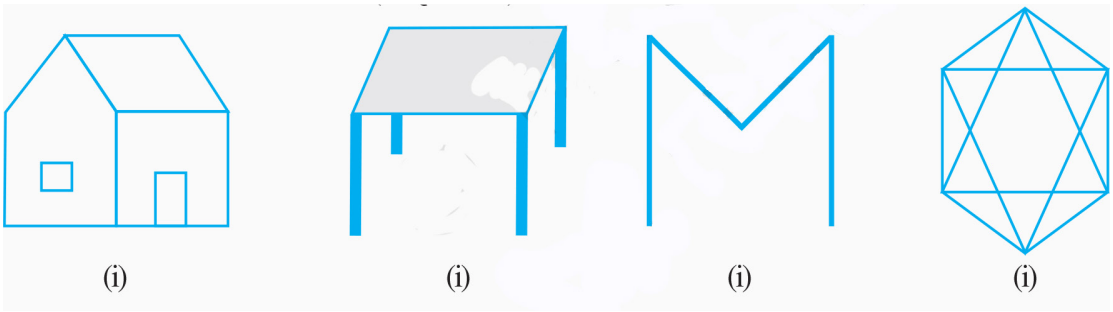
1. एकं समीकरणं चरस्य उपरि एकः एतादृशः प्रतिबन्धः अस्ति यस्मिन् उभयस्मिन् पक्षे व्यञ्जकानां मानं समानं भवेत्।
2. चरस्य तत् मानं यस्मै समीकरणं संतुष्टं भवति, समीकरणस्य समाधानम् इति कथ्यते।
3. कस्यचित् समीकरणस्य वामदक्षिणौ पक्षौ परस्परं परिवर्तिते सति, समीकरणं नैव परिवर्तते।
4. एकस्य सन्तुलितसमीकरणस्य स्थितौ यदि वयम्
(i) उभयस्मिन् पक्षे एकामेव संख्यां योजयामः अथवा (ii) उभयस्मिन् पक्षे एकामेव संख्याम् ऋणं कुर्मः अथवा (iii) उभयस्मिन् पक्षे एकया संख्यया एव गुणयामः अथवा (iv) उभयस्मिन् पक्षे एकया संख्यया एव भागं दद्मः तदा सन्तुलने किमपि परिवर्तनं न भवति अर्थात् दक्षिण-हस्त-पक्षस्य तथा च वाम-हस्त-पक्षस्य मानं समानम् एव तिष्ठति।
5. उपरोक्तैः गुणैः समीकरणं चरणबद्धविधिना साधयितुं शक्यते। अस्माभिः उभयस्मिन् पक्षे एकाधिकाः गणितीयाः संक्रियाः करणीयाः भवन्ति, येन द्वयोः पक्षयोः एकस्मिन् पक्षे केवलमात्रं चरः एव प्राप्तः भवेत्। अन्तिमं चरणं समीकरणस्य समाधानम् अस्ति।
6. स्थानापन्नस्य अर्थः अस्ति एकस्मात् पक्षात् द्वितीयपक्षं प्रति गमनम्। कस्याश्चित् संख्यायाः स्थानापन्नं, संख्यायाः उभयस्मिन् पक्षयोः योजनम् अथवा उभयस्मिन् पक्षे व्यवकलनम् इव भवति। यदा भवन्तः एकां संख्याम् एकस्मात् पक्षात् द्वितीयपक्षं प्रति स्थानापन्नं कुर्वन्ति तदा भवन्तः तस्य चिह्नस्य परिवर्तनम् अपि कुर्वन्ति। उदाहरणार्थं, समीकरणम् $x + 3 = 8$ मध्ये $+ 3$ इत्यस्य स्थानापन्नं दक्षिण-हस्त-पक्षात् वाम-हस्त-पक्षे कृते सति $x = 8 - 3 = 5$ इति प्राप्यते। वयं व्यञ्जकानां स्थानापन्नम् अपि तेन विधिना कुर्मः यथा एकस्याः संख्यायाः स्थानापन्नं भवति।
7. वयं व्यवहारिकाणां स्थितीनां लेखनं, संगत-सरलबीजीय-व्यञ्जकरूपे कथं भवति इति अपि अधिगतवन्तः।
8. अस्माभिः एतत् अपि अधिगतं यत् कस्यचित् समीकरणस्य समाधानात् आरभ्य उभयस्मिन् पक्षे समानस्य गणितीयसंक्रियाणां विधेः प्रयोगं कृत्वा (उदाहरणार्थम् उभयस्मिन् पक्षे समानसंख्यायाः योजनम् अथवा व्यवकलम्) एकं समीकरणं कथं निर्मातुं शक्यते। सार्धमेव अस्माभिः एतत् अपि अधिगतं वयं प्रदत्तस्य कस्यचित् समीकरणस्य व्यवहारिकस्थितितः सम्बन्धं निर्मातुं शक्नुमः तस्मै च समीकरणाय काञ्चित् व्यवहारिकीं समस्याम् अथवा प्रहेलिकाम् अपि रचयितुं शक्नुमः।

रेखाः एवञ्च कोणः

अध्यायः 5

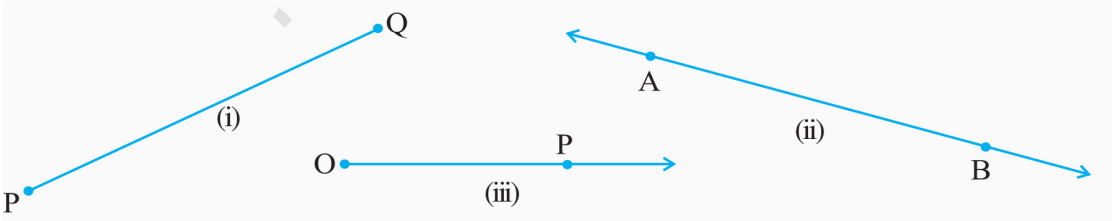
5.1 रेखा

भवन्तः पूर्वतः एव जानन्ति यत् कस्मिंश्चित् प्रदत्ते आकारे विभिन्न-रेखाणां, रेखाखण्डानाम् एवञ्च कोणानाम् अभिज्ञानं कथं क्रियते। किं भवन्तः निम्नलिखितासु आकृतिषु विभिन्न-रेखाखण्डानां तथा च कोणानां ज्ञानं कर्तुम् अर्हन्ति (आकृतिः 5.1)।



आकृतिः 5.1

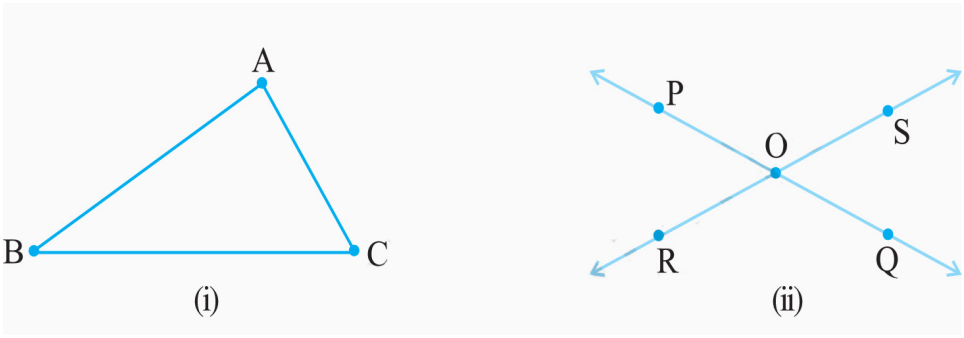
किं भवन्तः एतत् ज्ञातुं शक्नुवन्ति यत् निर्मितकोणः न्यूनकोणः अथवा अधिककोणः अथवा समकोणः अस्ति ? स्मरन्तु यद् एकस्य रेखाखण्डस्य द्वौ अन्तबिन्दू भवतः। यदि वयम् एतौ अन्तबिन्दू स्वदिशं प्रति अपरिमितरूपेण वर्धयामः तदा वयम् एकां रेखां प्राप्नुमः। अनेन प्रकारेण वयं वक्तुं शक्नुमः यद् कस्यापि रेखायाः कश्चन अपि अन्तिमः बिन्दुः न भवति। अपरस्मिन् पक्षे स्मरन्तु यत् किरणस्य एकः अन्तिमः बिन्दुः (नाम्ना प्रारम्भिक-बिन्दुः) भवति। उदाहरणार्थम् अधः प्रदत्ताः आकृतीः पश्यन्तु।



आकृति 5.2

अत्र आकृतिः 5.2 (i) रेखाखण्डम्, आकृतिः 5.2 (ii) रेखाम् एवञ्च आकृतिः 5.2 (iii) एकं किरणं, दर्शयति। सामान्यतः वयम् PQ इति एकं रेखाखण्डं ($\overline{PQ}$), इति सङ्केतेन, AB इति रेखाम् ($\overleftrightarrow{AB}$), इति सङ्केतेन एवञ्च OP इति किरणम् ($\overrightarrow{OP}$), इति सङ्केतेन निर्दिष्टीकुर्मः। स्वकीय-दैनिकजीवनात् रेखाखण्डानां तथा च किरणानां कानिचित् उदाहरणानि यच्छन्तु तेषां च विषये निजमित्रैः सह चर्चां कुर्वन्तु।

पुनः स्मरन्तु यत् रेखाणाम् एवञ्च रेखाखण्डानां मेलनेन कोणः निर्मीयते। उपर्युक्तासु आकृतिषु (आकृतिः 5.1) कोणानां (corners) प्रेक्षणं कुर्वन्तु। यदा द्वे रेखे अथवा द्वौ रेखाखण्डौ कस्मिंश्चिद् बिन्दौ प्रतिच्छेदं कुर्वतः तदा कोणानां निर्माणं जायते। उदाहरणार्थम् अधः प्रदत्ताः आकृतीः अवलोकयन्तु।



आकृतिः 5.3

प्रयासं कुर्वन्तु

स्वस्य निकटस्थानां दशानाम् आकृतीनां सूचीबन्धनं कुर्वन्तु तासु च विद्यमानानां न्यूनकोणानाम् अधिककोणानाम् एवञ्च समकोणानाम् अभिज्ञानं कुर्वन्तु।

5.3 (i) इति आकृत्याम् AB एवञ्च BC इति रेखाखण्डौ ABC इति कोणस्य निर्माणाय अन्योन्यम् B इत्यस्मिन् बिन्दौ प्रतिच्छेदं कुर्वतः तथा च BC एवञ्च AC इति रेखाखण्डौ ACB इति कोणस्य निर्माणाय अन्योन्यम् C इत्यस्मिन् बिन्दौ प्रतिछेदं कुर्वतः इत्यादिः। यद्यपि 5.3 (ii) इत्यस्याम् आकृत्याम् PQ एवञ्च RS इति रेखे परस्परम् O इत्यस्मिन् बिन्दौ प्रतिछेदं कुर्वतः यस्मिन् POS, SOQ, QOR तथा च ROP निर्मिताः भवन्ति।

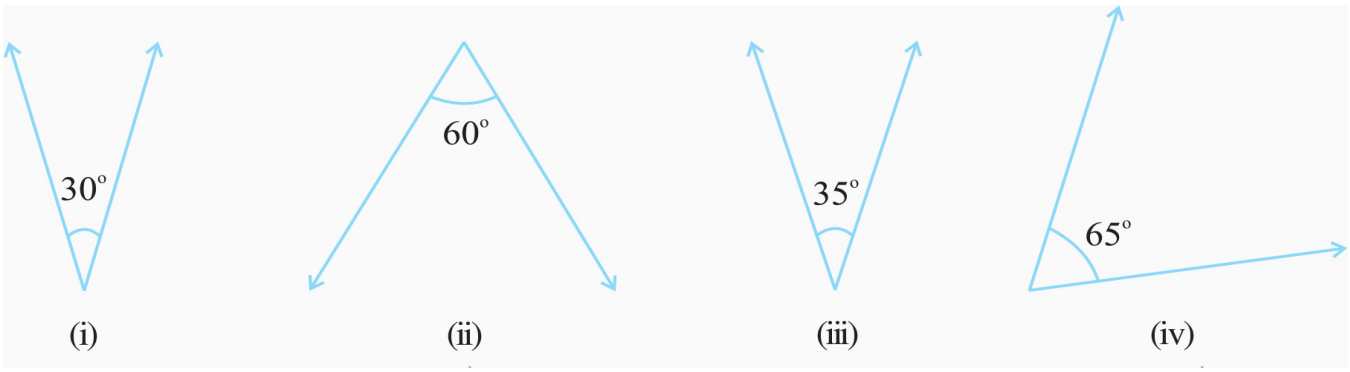
ABC इति कोणः ∠ABC इति सङ्केतेन निरूप्यते। अनेन प्रकारेण 5.3(i) इति आकृत्याम् ∠ABC, ∠BCA तथा च ∠BAC इति त्रयः कोणाःसन्ति तथा च 5.3 (ii) इति आकृत्याम् ∠POS, ∠SOQ, ∠QOR तथा च ∠POR इति चत्वारः कोणाः सन्ति। भवन्तः पूर्वम् एव पठितवन्तः यत् न्यूनकोणस्य, अधिककोणस्य समकोणस्य च रूपेषु कोणानां वर्गीकरणं कथं क्रियते।

टिप्पणी ABC इति कोणस्य माप-सन्दर्भे, m∠ABC इत्येतं साधारणतः ∠ABC इत्यनेन रूपेण लेखिष्यामः। प्रकरणेन एतत् स्पष्टं भविष्यति यद् वयं कोणस्य अथवा अस्य मापसन्दर्भे वार्तां कुर्वन्तः स्मः।

5.2 सम्बन्धिताः कोणाः

5.2.1 पूरकः कोणः

यदा द्वयोः कोणयोः मापस्य योगः 90°इति भवति तदा एतौ कोणौ पूरककोणौ (complementary angles) इति कथ्येते।



किम् एतौ कोणौ पूरककोणौ स्तः ? आम् आकृतिः 5.4 किम् एतौ कोणौ पूरककोणौ स्तः ? न

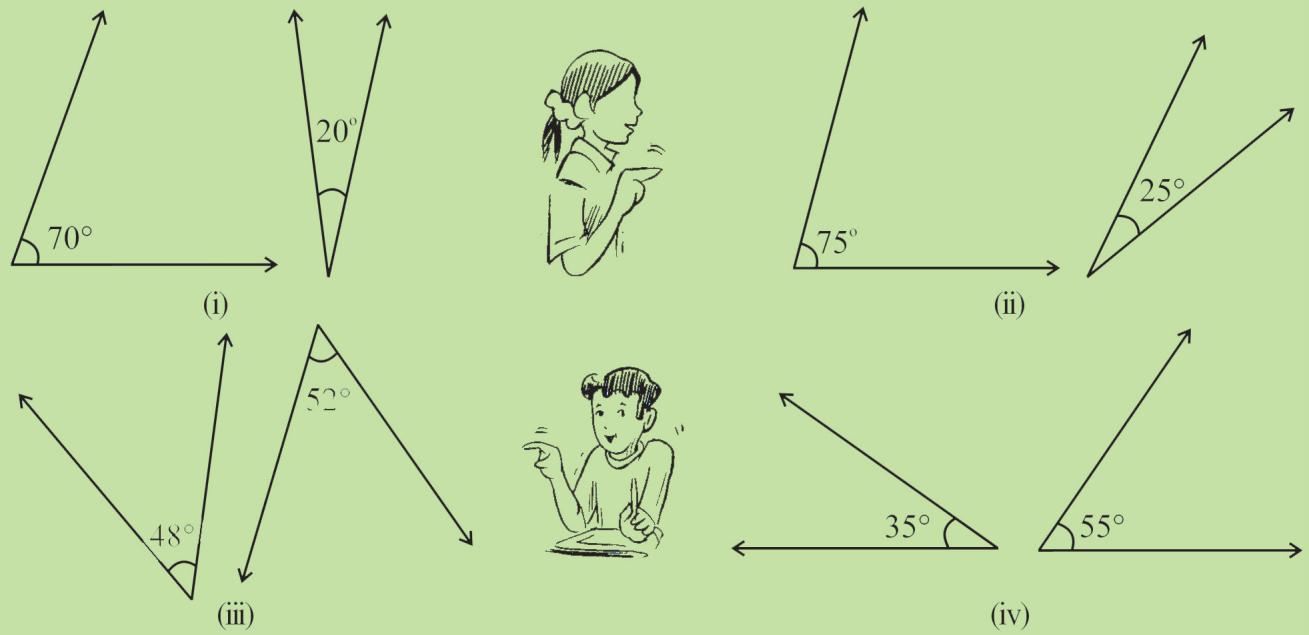
यदा द्वौ कोणौ पूरकः भवतः तदा एतयोः प्रत्येकं कोणः अपरकोणस्य पूरकः इति कथ्यते। उपर्युक्तारेखे (आकृतिः 5.4) ''30°इति कोणः'',''60°इत्यस्य कोणस्य'' पूरकः विलोमतः च अस्ति

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

1. किं द्वौ न्यूनकोणौ परस्परं पूरकौ भवितुम् अर्हतः ?
2. किं द्वौ अधिककोणौ परस्परं पूरकौ भवितुम् अर्हतः ?
3. किं द्वौ समकोणौ परस्परं पूरकौ भवितुम् अर्हतः?

प्रयासं कुर्वन्तु

1. निम्नलिखितेषु कोण-युग्मेषु कतमाः पूरकाः सन्ति ? (आकृतिः 5.5)



आकृतिः 5.5

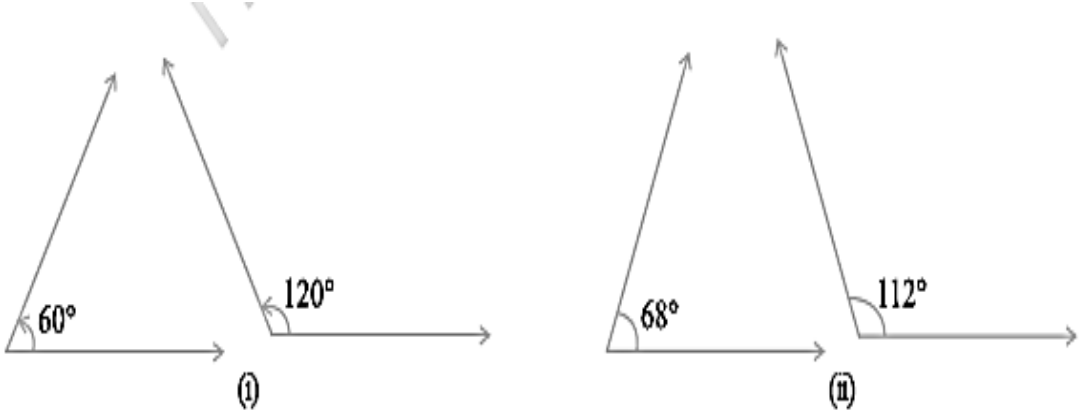
2. निम्नलिखितेषु कोणेषु प्रत्येकं पूरकस्य मापः कः अस्ति ?

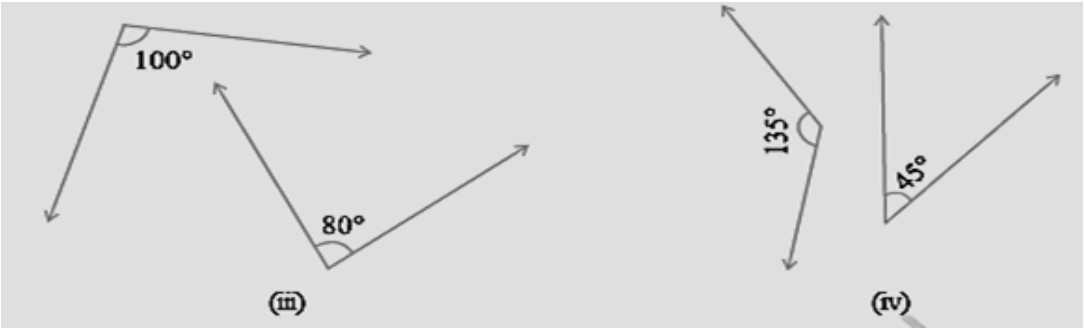
(i) 45° (ii) 65° (iii) 41° (iv) 54°

3. द्वयोः पूरककोणयोः मापस्य अन्तरम् 12°इति अस्ति। कोणयोः मापः ज्ञायताम्।

5.2.2 संपूरकः कोणः

आयान्तु कोणानां निम्नलिखितान् युग्मान् पश्यामः (आकृतिः 5.6):





आकृतिः 5.6

किं भवन्तः पश्यन्ति यत् प्रत्येकम् उपर्युक्त-युग्मे (5.6 इति आकृत्याम्) कोणमापानां योगः 180° इति प्राप्यते ? कोणानाम् एतादृशाः युग्माः सम्पूरककोणाः (supplementary angles) इति कथ्यन्ते। यदा द्वौ कोणौ संपूरकौ भवतः तदा तन्मध्यवर्ती प्रत्येकं कोणः अपरस्य कोणस्य सम्पूरकः इति कथ्यते।

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

1. किं द्वौ अधिककोणौ संपूरककोणौ भवितुम् अर्हतः?
2. किं द्वौ न्यूनकोणौ संपूरककोणौ भवितुम् अर्हतः?
3. किं द्वौ समकोणौ संपूरककोणौ भवितुम् अर्हतः?

प्रयासं कुर्वन्तु

5.7 इति आकृत्यां संपूरककोणानां युग्मान् ज्ञातुं प्रयासं कुर्वन्तु :

आकृति 5.7

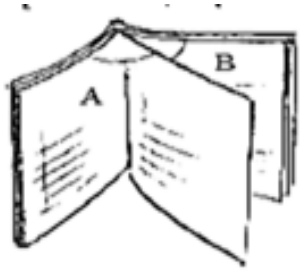
2. निम्नलिखितेषु कोणेषु प्रत्येकं सम्पूरकस्य मापः किं भविष्यति ?

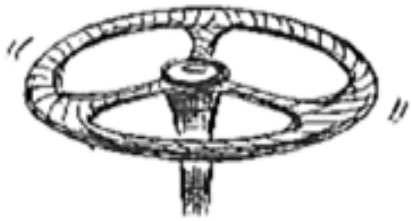
(i) 100° (ii) 90° (iii) 55° (iv) 125°

3. द्वयोः सम्पूरककोणयोः दीर्घकोणस्य मापः ह्रस्वकोणस्य मापात् 44° एतावद् अधिकम् अस्ति। कोणयोः मापः ज्ञायताम्।

5.2.3. आसन्नकोणः

निम्नलिखिताः आकृतीः पश्यन्तु





यदा भवन्तः एकं पुस्तकम् उद्घाटयन्ति तदा उपर्युक्ता आकृतिः दृश्यते। A तथा च B मध्ये वयं कोणानाम् एतादृशं युग्मं प्राप्नुमः यस्मिन् एकः कोणः अपरकोणेन सह संलग्नः अस्ति।

कस्यचित् कारयानस्य स्टीयरिंगचक्रं (अरित्रचक्रम्) पश्यन्तु। केन्द्रबिन्दौ त्रयः कोणाः विद्यन्ते येषु प्रत्येकम् अपरेण सह संलग्नम् अस्ति।

आकृतिः 5.8

A तथा च B इति द्वयोः शीर्षयोः उपरि वयं प्राप्नुमः यत् कोणानाम् एकः युग्मः अपरयुग्मेन सह संलग्नः वर्तते। एते कोणाः एवं सन्ति :

(i) तेषाम् एकम् उभयनिष्ठं शीर्षम् अस्ति

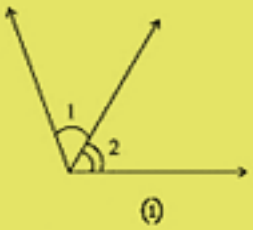
(ii) तेषु एका उभयनिष्ठा भुजा अस्ति तथा च

(iii) याः भुजाः उभयनिष्ठाः नास्ति, ताः भुजाः उभयनिष्ठाभुजायाः एकस्मिन् पक्षे सन्ति।

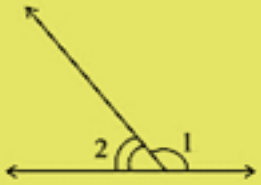
प्रयासं कुर्वन्तु

1.किम् 1 तथा च 2 इत्यनेन अङ्कितौ कोणौ आसन्नौ स्तः ?

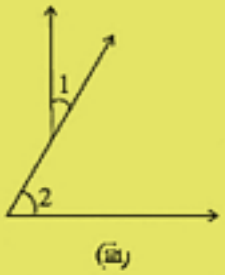
[आकृतिः5.9(i) -(v)] यदि एतौ आसन्नौ न स्तः तदा उच्यताम्, किमर्थम् ?



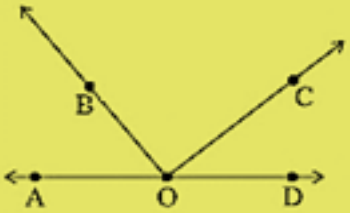
(i)



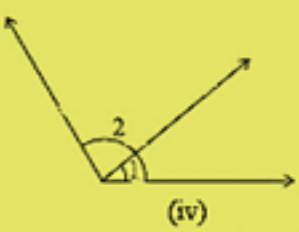
(ii)



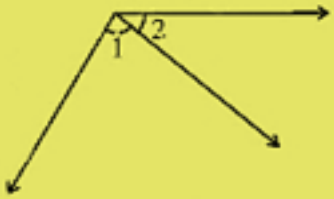
(iii)



आकृति 5.10



(iv)



आकृति 5.9

(v)

2. 5.10 आकृत्यां, किं निम्नलिखिताः कोणाः आसन्नाः सन्ति ?

(a) ∠AOB तथा च ∠BOC (b) ∠BOD तथा च ∠BOC स्वीयोत्तरस्य पुष्टिं कुर्वन्तु।

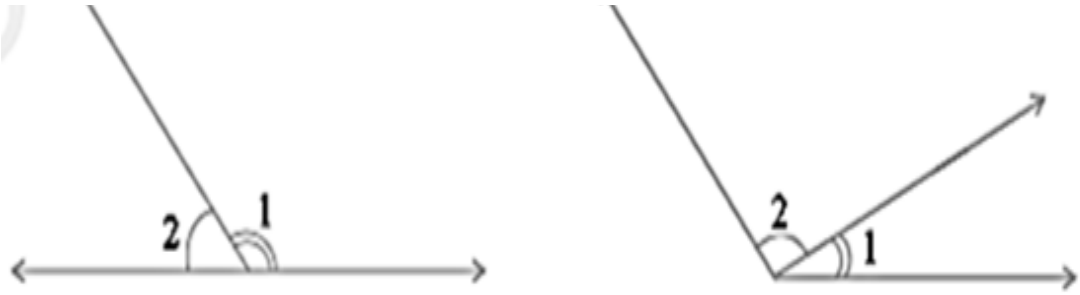
विचारयन्तु चर्चयन्तु लिखन्तु च

विचारयन्तु चर्चयन्तु एवञ्च लिखन्तु

1. किं द्वौ आसन्नकोणौ संपूरकौ भवितुम् अर्हतः ?
2. किं द्वौ आसन्नकोणौ पूरकौ भवितुम् अर्हतः ?
3. किं द्वौ अधिककोणौ आसन्नौ भवितुम् अर्हतः ?
4. किम् एकः न्यूनकोणः, अधिककोणस्य आसन्नः भवितुम् अर्हतः ?

5.2.4 रैखिकयुग्मः

एकः रैखिकयुग्मः (linear pair) एतादृशानाम् आसन्नकोणानां युग्मः भवति येषां ताः भुजाः याः उभयनिष्ठाः न सन्ति, विपरीतदिशि किरणाः भवन्ति।



(i) किम् ∠1, ∠2 इति एकः रैखिकः युग्मः अस्ति ? आम्

(ii) किम् ∠1, ∠2 इति एकः रैखिकः युग्मः अस्ति ? नास्ति (किमर्थम्)

आकृतिः 5.11

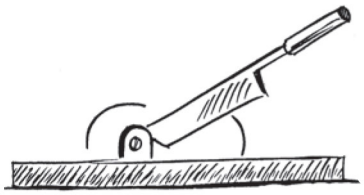
5.11 (i) इति उपर्युक्तायाम् आकृत्यां पश्यन्तु यत् सम्मुखाः किरणाः (याः ∠1 तथा च ∠2 इत्येतयोः उभयनिष्ठाः भुजाः न सन्ति) एकस्याः रेखायाः निर्माणं कुर्वन्ति। अनेन प्रकारेण ∠1 + ∠2 एतयोः मानं 180° इति जायते।

रैखिकयुग्मस्य कोणाः सम्पूरकाः भवन्ति।

किं भवद्भिः स्वपरिवेशे युग्मानां प्रतिरूपाणि दृष्टानि ?

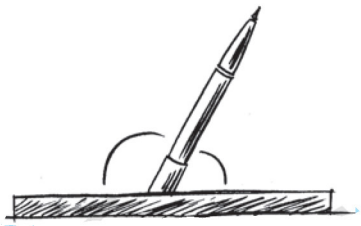
अवधानेन अङ्कयन्तु यत् सम्पूरक-कोणानां युग्मः रैखिक-युग्मः तदैव जायते यदा प्रत्येकम् अपरस्य निकटे स्थापयेत।

किं भवन्तः स्वकीये दैनिकजीवने रैखिकयुग्मस्य उदाहरणानि पश्यन्ति ? शाककर्तन-पट्टम् (आकृतिः 5.12) पश्यन्तु। किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् क्षुरपत्रम् आधारफलकेन सह रैखिकयुग्मं निर्माति ?



एकः शाककर्तनपट्टमः

क्षुरपत्रम् आधारेण सह कोणानां रैखिक-युग्मं निर्माति।



एकः लेखन्याः स्थापकः

लेखनीस्थापकेन सह कोणानां रैखिक-युग्मं निर्माति।

आकृतिः 5.12

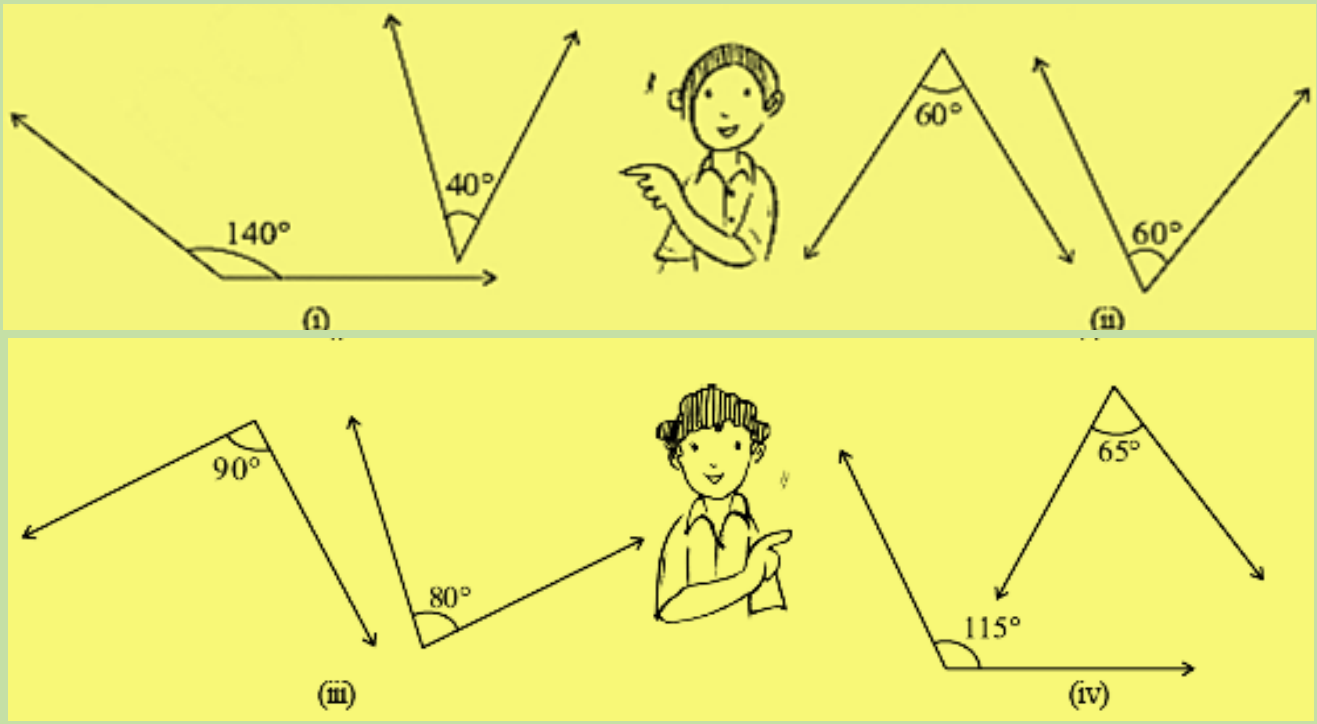
पुनः लेखन्याः आधारम् (आकृतिः 5.12) पश्यन्तु। किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् लेखनी आधारेण सह रैखिकयुग्मं निर्माति ?

विचारयन्तु चर्चयन्तु लिखन्तु च

1. किं द्वौ न्यूनकोणौ एकं रैखिक-युग्मं निर्मातुं शक्नुतः ?
2. किं द्वौ अधिककोणौ एकं रैखिक-युग्मं निर्मातुं शक्नुतः ?
3. किं द्वौ समकोणौ एकं रैखिक-युग्मस्य निर्माणं कर्तुं शक्नुतः ?

प्रयासं कुर्वन्तु

वदन्तु कोणानां निम्नलिखित-युग्मेषु कतमः रैखिक-युग्मस्य निर्माणं करोति ?(आकृतिः 5.13):



आकृतिः 5.13

5.2.5 उर्ध्वाधराः सम्मुखकोणाः

अङ्कनीद्वयं स्वीकुर्वन्तु तयोः च मध्यभागात् रबडद्वारा परस्परं बन्धनं कुर्वन्तु यथा 5.14 इति आकृत्यां दर्शितं वर्तते।

अनेन प्रकारेण निर्मितान् $\angle 1, \angle 2, \angle 3$, तथा च $\angle 4$ चतुरः कोणान् पश्यन्तु।

$\angle 1, \angle 3$ एतयोः उर्ध्वाधरौ सम्मुखौ स्तः तथा च $\angle 4, \angle 2$ एतयोः उर्ध्वाधरौ सम्मुखौ स्तः।

आकृति 5.15

$\angle 1$, तथा च $\angle 3$ इत्येतौ वयम् उर्ध्वाधरणां सम्मुखकोणानाम् (vertically opposite angles) एकं युग्मं कथयामः।

किं भवन्तः उर्ध्वाधरणां सम्मुखकोणानाम् अन्ययुग्मस्य नाम दातुम् अर्हन्ति ?

किं $\angle 1$ इति $\angle 3$ इत्यस्य समानं दृश्यते ?

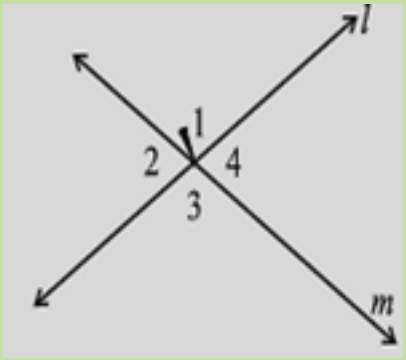
किं $\angle 2$ इति $\angle 4$ इत्यस्य समानं दृश्यते ?

एतत् प्रमाणीकर्तुम् आयान्तु सर्वप्रथमं वयम् उर्ध्वाधर-सम्मुखकोणानां कृते वास्तविकजीवनात् कानिचित् उदाहरणानि पश्यामः (आकृतिः 5.15)।

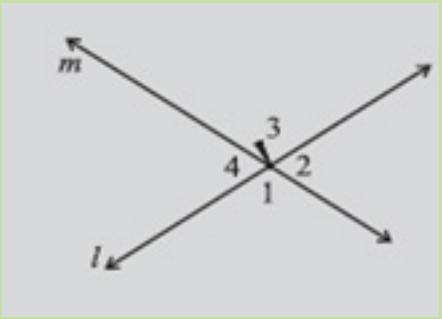
प्रयासं कुर्वन्तु

कस्मिंश्चित् बिन्दौ प्रतिच्छेदं कुर्वत्यौ द्वे l तथा च m इति रेखे आलिखन्तु। अधुना भवन्तः $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ एवञ्च $\angle 4$ इति अङ्कितं कर्तुं शक्नुवन्ति यथा 5.16 इति आकृत्यां दर्शितम् अस्ति। एकस्मिन् पारदर्शिकर्दगे अस्याः आकृतेः एकाम् अनुरेखप्रतिलिपिं स्वीकुर्वन्तु।

तां मूलप्रतेः उपरि तथा स्थापयन्तु येन $\angle 1$ इति निजप्रतिलिपिं आच्छादयेत्, $\angle 2$ इति निजप्रतिलिपिं आच्छादयेत् ,... इत्यादि। प्रतिच्छेदन-बिन्दोः उपरि एकाम् अणिं स्थापयन्तु। प्रतिलिपिम् 180° द्वारा भ्रामयन्तु ? किं रेखाः पुनः सम्पातिन्यः भवन्ति ?



इत्येतं भ्रामयित्वा



इत्येतं प्राप्तुं शक्यते

आकृतिः5.16

वयं प्राप्नुमः यत् $\angle 1$ एवञ्च $\angle 3$ इति कोणौ निज स्थितीः परस्परं परिवर्तयतः इत्थमेव $\angle 2$ तथा च $\angle 4$ अपि निज स्थितीः परस्परं परिवर्तयतः।

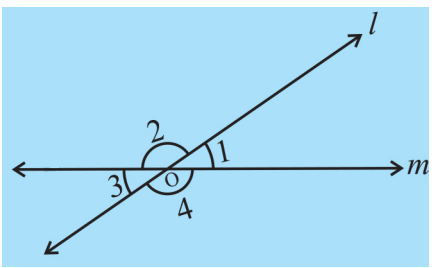
एतत् सर्वं रेखानां स्थितिपरिवर्तनेन विना कृतम्। अनेन प्रकारेण $\angle 1 = \angle 3$ एवञ्च $\angle 2 = \angle 4$ इति अस्ति।

वयम् एतं निष्कर्षं प्राप्नुमःयत् यदि द्वे रेखे अन्योन्यं प्रतिच्छेदं कुर्वतः तदा अनेन प्रकारेण निर्मिताः उर्ध्वाधराः सम्मुखाः कोणाः समानाः भवन्ति।

आयान्तु ज्यामितेः उपयोगं कुर्वन्तः वयं एतत् प्रमाणीकर्तुं प्रयतामहे। आगच्छन्तु l तथा च m इति रेखाद्वयं स्वीकुर्मः (आकृतिः 5.17)। वयं निम्नलिखित-प्रकारेण एतं परिणामं तर्कसंगतयुक्त्या प्राप्तुं शक्नुमः -

चिन्तयन्तु l तथा च m इति रेखाद्वयं वर्तते। ये परस्परम् o इति बिन्दोः उपरि प्रतिच्छेदं कुर्वतः तथा च अनेन प्रकारेण $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ तथा च $\angle 4$ निर्मान्ति।

वयं प्रमाणीकर्तुम् इच्छामः यत् $\angle 1 = \angle 3$ एवञ्च $\angle 2 = \angle 4$

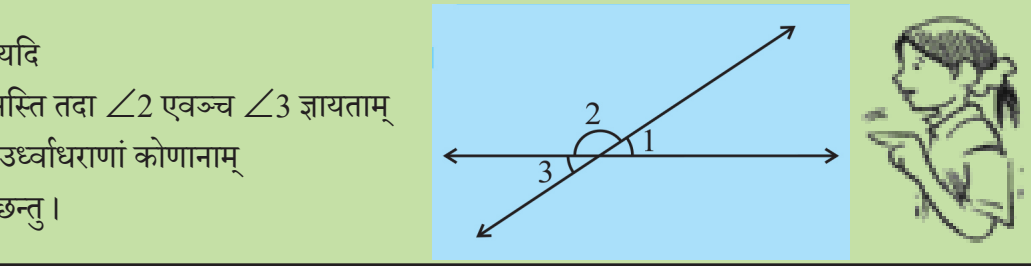


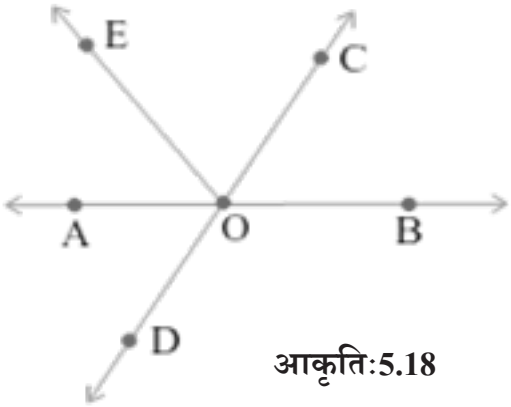
आकृतिः 5.17

इदानीम् $\angle 1 = 180^\circ - \angle 2$ ($\angle 1$ तथा च $\angle 2$ रैखिकयुग्मं निर्माति अतः $\angle 1 + \angle 2 = 180°$)
(i) अनेन प्रकारेण $\angle 3 = 180^\circ - \angle 2$ ($\angle 2$, $\angle 3$ रैखिकयुग्मं निर्माति,अतः $\angle 2 + \angle 3 = 180°$)
(ii) अतः $\angle 1 = \angle 3$ [(i) तथा च (ii) द्वारा] अनेन प्रकारेण वयं प्रमाणीकर्तुम् अर्हामः यत् $\angle 2 = \angle 4$ (प्रयतताम्)।

प्रयासं कुर्वन्तु

1. दत्तायाम् आकृत्यां यदि $\angle 1 = 30^\circ$ इति अस्ति तदा $\angle 2$ एवञ्च $\angle 3$ ज्ञायताम्
2. निजसमीपस्थानाम् उर्ध्वाधराणां कोणानाम् एकम् उदाहरणं यच्छन्तु।





आकृतिः5.18

उदाहरणम् 15.18 इति आकृत्यां निम्नलिखितानाम् अभिज्ञानं कुर्वन्तु :

(i) आसन्नकोणानां पञ्चयुग्माः

(ii) त्रयः रैखिक-युग्माः

(iii) उर्ध्वाधराणां सम्मुखकोणानां युग्मद्वयम्।

समाधानम्

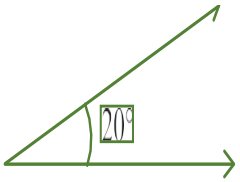
(i) आसन्नकोणानां पञ्चयुग्माः एते सन्ति ($\angle AOE$, $\angle EOC$), ($\angle EOC$, $\angle COB$), ($\angle AOC$, $\angle COB$), ($\angle COB$, $\angle BOD$), ($\angle EOB$, $\angle BOD$)

(ii) त्रयः रैखिकाः युग्माः सन्ति ($\angle AOE$, $\angle EOB$), ($\angle AOC$, $\angle COB$), ($\angle COB$, $\angle BOD$)

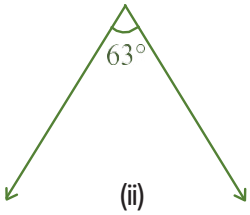
(iii) उर्ध्वाधराः सम्मुखकोणाः सन्ति ($\angle COB$, $\angle AOD$), ($\angle AOC$, $\angle BOD$)

प्रश्नावली 5.1

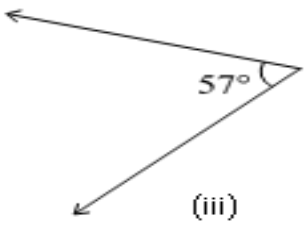
1. निम्नलिखितेषु कोणेषु एकैकस्य पूरकः ज्ञायताम् -



(i)

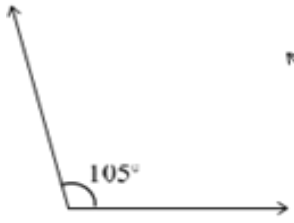


(ii)



(iii)

2 निम्नलिखितेषु कोणेषु एकैकस्य सम्पूरकः ज्ञायताम् :



(i)

(ii)

(iii)

3. कोणानां निम्नलिखित-युग्मेषु पूरकाणाम् एवञ्च संपूरकाणां पृथक् अभिज्ञानं कुर्वन्तु :

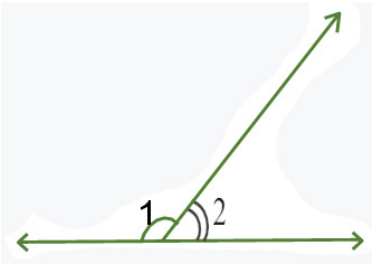
(i) 65°, 115° (ii) 63°, 27° (iii) 112°, 68°

(iv) 130°, 50° (v) 45°, 45° (vi) 80°, 10°

4. एतादृशः कोणः ज्ञातव्यः यः स्वस्य पूरकस्य समानः स्यात् ।

5. एतादृशः कोणः ज्ञातव्यः यः स्वस्य संपूरकस्य समानः भवेत् ।

6. दत्तायाम् आकृत्याम् ∠1 एवञ्च ∠2 संपूरकौ स्तः । यदि ∠1 इत्यस्मिन् न्यूनता क्रियते तदा ∠2 इत्यत्र किं परिवर्तनं भविष्यति येन द्वौ कोणौ पुनरपि समानौ एव भवेताम्



7. किम् एतादृशौ कोणौ सम्पूरकौ भवितुं शक्नुतः यदि तयोः द्वौ अपि

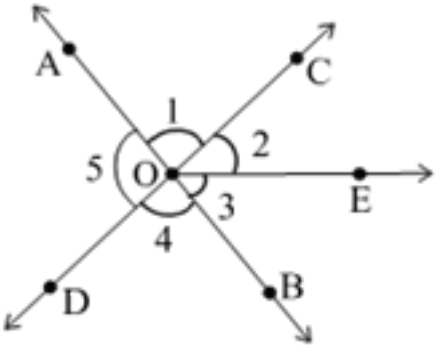
(i) न्यूनकोणौ स्तः

(ii) अधिककोणौ स्तः

(iii) समकोणौ स्तः

8. एकः कोणः 45° इत्यस्माद् अधिकः वर्तते । किम् अस्य पूरककोणः 45° इत्यस्माद् दीर्घः अस्ति अथवा 45° इत्यस्यसमानः अथवा 45° अस्मात् ह्रस्वः अस्ति ?

9. संलग्नायाम् आकृत्याम् -



(i) किम् ∠1 इति ∠2 इत्यस्य आसन्नः अस्ति ?

(ii) किम् ∠AOC ∠AOE इत्यस्य आसन्नः अस्ति ?

(iii) किम् ∠COE एवञ्च ∠EOD रैखिकयुग्मं निर्मातः ?

(iv) किम् ∠BOD तथा च ∠DOA सम्पूरकौ स्तः ?

(v) किम् ∠1 इत्यस्य उर्ध्वाधरः सम्मुखकोणः ∠4 इति वर्तते ?

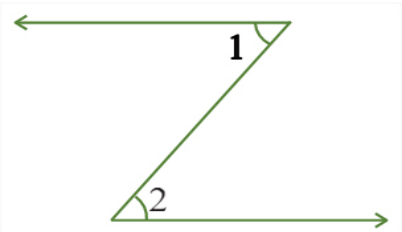
(vi) 5 इत्यस्य उर्ध्वाधरः सम्मुखकोणः कः वर्तते ?

10. अभिज्ञानं कुर्वन्तु यत् कतमाः युग्माः

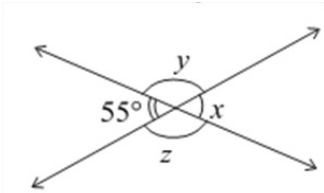
(i) उर्ध्वाधराः सम्मुखकोणाः सन्ति ।

(ii) रैखिकयुग्माः सन्ति ।

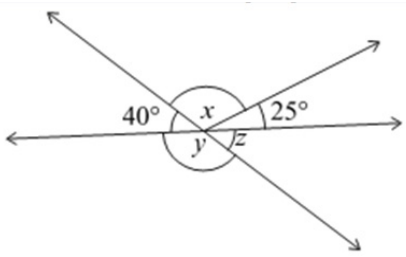
11. निम्नलिखितायाम् आकृत्यां किम् ∠1 इति ∠2 इत्यस्य आसन्नं वर्तते ? कारणं लिखन्तु ।



12 निम्नलिखितेषु प्रत्येकस्मिन् x, y तथा च z इत्येतेषां कोणानां मानं ज्ञातं कुर्वन्तु ।



(i)



(ii)

13. रिक्तस्थानानां पूर्तिं कुर्वन्तु :

(i) यदि द्वौ कोणौ पूरकौ स्तःतदा तयोः मापानां योगः _____ अस्ति।

(ii) यदि द्वौ कोणौ संपूरकौ स्तःतदा तयोः मापानां योगः _____ अस्ति।

(iii) रैखिकयुग्मस्य निर्मातारौ द्वौ कोणौ _____ भवतः।

(iv) यदि द्वौ आसन्नकोणौ संपूरकौ स्तःतदा तौ_____ निर्मातः।

(v) यदि रेखाद्वयं परस्परम् एकस्मिन् बिन्दौ प्रतिच्छेदं करोति तदा उर्ध्वाधराः सम्मुखकोणाः सदैव ___भवन्ति।

(vi) यदि रेखाद्वयं परस्परम् एकस्मिन् बिन्दौ प्रतिच्छेदं करोति यदि च उर्ध्वाधराणां सम्मुखकोणाणाम् एकः युग्मः न्यूनकोणः अस्ति, तदा उर्ध्वाधराणां सम्मुखकोणाणाम् अपरः युग्मः_____ अस्ति।

14. संलग्नायाम् आकृत्यां निम्नलिखित-कोणानां कृते नामानि यच्छन्तु :

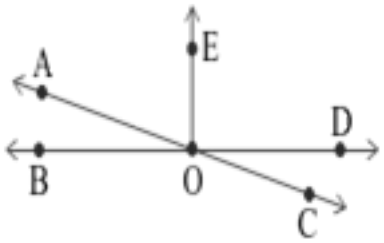
(i) उर्ध्वाधरः सम्मुखः अधिककोणः।

(ii) आसन्नः पूरककोणः।

(iii) समानः संपूरककोणः।

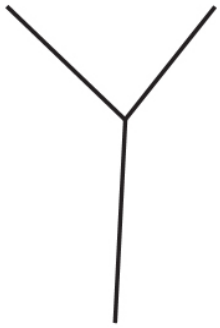
(iv) असमानः संपूरककोणः।

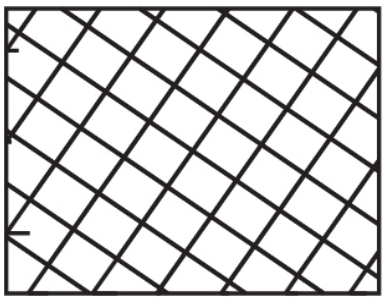
(v) आसन्नाः कोणाः ये रैखिकयुग्मं न निर्मान्ति।



5.3 रेखा युग्मः

5.3.1 प्रतिच्छेदिन्यः रेखाः





आकृतिः 5.19

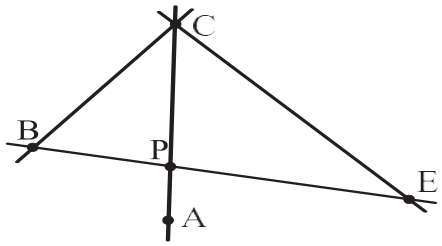
आधारे स्थापितं श्यामफलकम्, रेखाखण्डैः निर्मितम् Y इति अक्षरम् एकञ्च जालिकाद्वारम् (जालक्षद्वारम्) इत्येतेषु सर्वेषु उभयनिष्ठं किम् अस्ति ? एतानि प्रतिच्छेदि-रेखानाम् (intersecting lines) उदाहरणानि सन्ति (आकृतिः 5.19)। द्वे l तथा च m इति रेखे प्रतिच्छेदं कुर्वतः यदि तयोः एकः बिन्दुः उभयनिष्ठः अस्ति। एषः उभयनिष्ठबिन्दुः तयोः प्रतिच्छेदबिन्दुः इति कथ्यते।

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

5.20 इति आकृत्याम् AC तथा च BE इति रेखे P इति बिन्दौ प्रतिच्छेदं कुर्वतः।

AC एवञ्च BC इति रेखे C इति बिन्दौ प्रतिच्छेदं कुर्वतः। AC तथा च EC इति रेखे C बिन्दौ प्रतिच्छेदं कुर्वतः। प्रतिच्छेदि-रेखाखण्डानां दश अन्य-युग्मान् ज्ञातुं प्रयासं कुर्वन्तु।

किं रेखाद्वयम् अथवा रेखाखण्डद्वयम् आवश्यकरूपेण प्रतिच्छेदं कुर्यात् ? किं भवन्तः आस्याम् आकृत्यां द्वयोः रेखाखण्डयोः युग्मान् ज्ञातुम् अर्हन्ति यौ प्रतिच्छेदिनौ न स्तः ?
किं द्वे रेखे एकाधिकेषु बिन्दुषु प्रतिच्छेदं कर्तुं शक्नुवन्ति ? अस्मिन् विषये विचारं कुर्वन्तु।



आकृतिः 5.20

प्रयासं कुर्वन्तु

1. निज-पार्श्वस्थ-परिवेशात् एतादृशानि उदाहरणानि ज्ञातुं प्रयासं कुर्वन्तु यत्र रेखाः समकोणे प्रतिच्छेदं कुर्वन्ति।
2. एकस्य समबाहुत्रिभुजस्य शीर्षेषु प्रतिच्छेदि-रेखाभिः निर्मितकोणानां मापः ज्ञायताम्।
3. एकम् आयतं लिखन्तु प्रतिच्छेदीरेखाभिः चतुर्शीर्षाणां कोणानां मापः ज्ञायताम्।
4. यदि द्वे रेखे अन्योन्यं प्रतिच्छेदं कुर्वतः, तदा ते सर्वदैव अन्योन्यं समकोणे प्रतिच्छेदं कुर्वतः ?

5.3.2 तिर्यक् छेदि-रेखाः

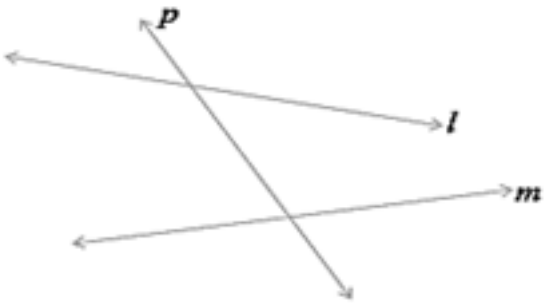
कदाचित् भवद्भिः द्वौ अथवा द्व्याधिकौ राजमार्गौ लङ्घयन् एकः राजमार्गः दृष्टः स्यात् अथवा बहून् रेलमार्गान् लङ्घयन् एकः रेलमार्गः दृष्टः स्यात्। एतैः तिर्यक्-छेदि-रेखानां (transversal) अनुभवः प्राप्यते (आकृतिः5.21)।

(i)

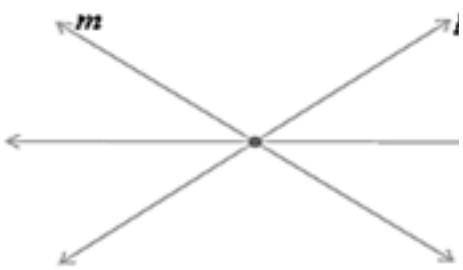
(ii)

आकृतिः 5.21

एका एतादृशी रेखा या द्वयोः अथवा द्व्यधिक-रेखानां भिन्नबिन्दुषु प्रतिच्छेदं करोति, तिर्यक् छेदि-रेखा इति कथ्यते। 5.22 आकृत्यां , p इति रेखा l तथा च m इति रेखयोः तिर्यक्-छेदिरेखा अस्ति।
5.23 आकृत्यां, p एका तिर्यक् रेखा नास्ति तथापि एषा l एवञ्च m इति रेखायोः प्रतिच्छेदं करोति। किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति किमर्थम् ?



आकृतिः 5.22



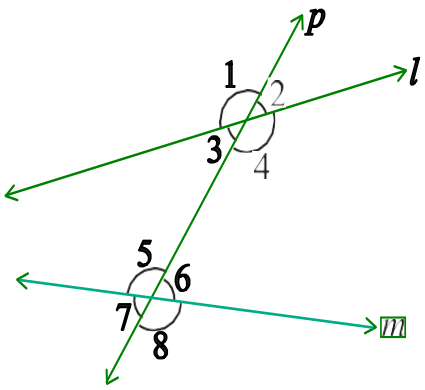
आकृतिः 5.23

प्रयासं कुर्वन्तु

1. चिन्तयन्तु यत् रेखाद्वयं दत्तम् अस्ति। एतयोः कृते भवन्तः कति तिर्यक्-छेदि-रेखाः आलेखितुम् अर्हन्ति ?
2. यदि एका रेखा तिसृणां रेखाणां तिर्यक्-छेदि-रेखा अस्ति तदा सूचयन्तु कति प्रतिच्छेदिबिन्दवः सन्ति ?
3. निजनिकटवर्तीः कतिपयाः तिर्यक्-छेदि-रेखाः अनुवेष्टुं प्रयासं कुर्वन्तु।

5.3.3 तिर्यक-छेदिरेखया निर्मितकोणः

5.24 इति आकृतौ भवन्तः पश्यन्ति यत् l तथा च m इति रेखे p इत्यनया तिर्यक्-छेदिरेखया छिद्यमाना अस्ति। अनेन प्रकारेण एकतः 8 पर्यन्तम् अङ्कितानां कोणानां विशिष्ट-नामानि सन्ति।



आकृतिः 5.24

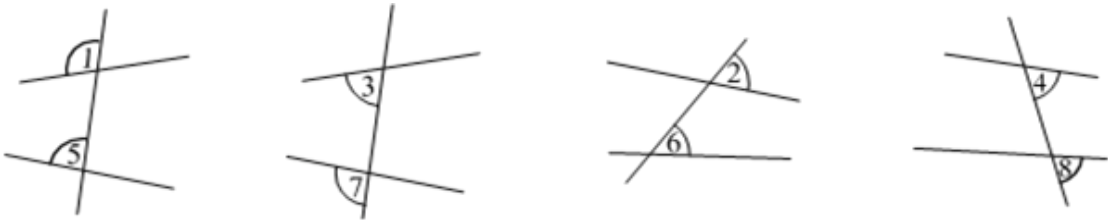
अन्तः कोणः	∠3, ∠4, ∠5, ∠6,
बाह्यः कोणः	∠1, ∠2, ∠7, ∠8
संगतकोणानां युग्माः	∠1 तथा च ∠ 5, ∠2 तथा च ∠6, ∠3 तथा च ∠ 7, ∠4 तथा च ∠8,
एकान्तराणाम् अन्तःकोणानां युग्माः	∠3 तथा च ∠6, ∠4 तथा च ∠5,
एकान्तराणां बाह्यकोणानां युग्माः	∠1 तथा च ∠8, ∠2 तथा च ∠7,
तिर्यक्-छेदीरेखायाः एकस्मिन् एव भागे निर्मितानाम् अन्तःकोणानां युग्माः	∠3, तथा च ∠5, ∠4 तथा च ∠6,

टिप्पणी- 5.25 इति आकृत्यां ∠1 एवञ्च ∠5 सदृशेषु संगतकोणेषु निम्नलिखितं सम्मिलितं वर्तते :

(i) विभिन्नानि शीर्षाणि

(ii) तिर्यक्-छेदिरेखायाः एकस्मिन् एव भागे निर्मिताः भवन्ति।

(iii) द्वयोः रेखयोः साक्षेप-संगत-स्थितिषु (उपरिष्टात् अथवा अधस्तात्,वामतः अथवा दक्षिणतः)भवन्ति।



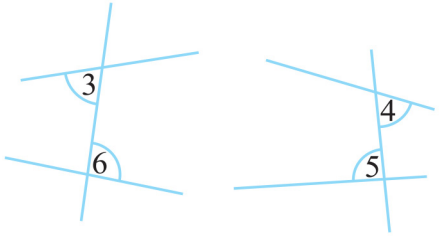
आकृतिः 5.25

5.26 इति आकृत्याम् ∠3 तथा च ∠6 सदृशाः अन्तः एकान्तरकोणाः

(i) एषां विभिन्नानि शीर्षाणि भवन्ति।

(ii) तिर्यक्-छेदिरेखायाः सम्मुख-स्थित्यां निर्मिताः भवन्ति।

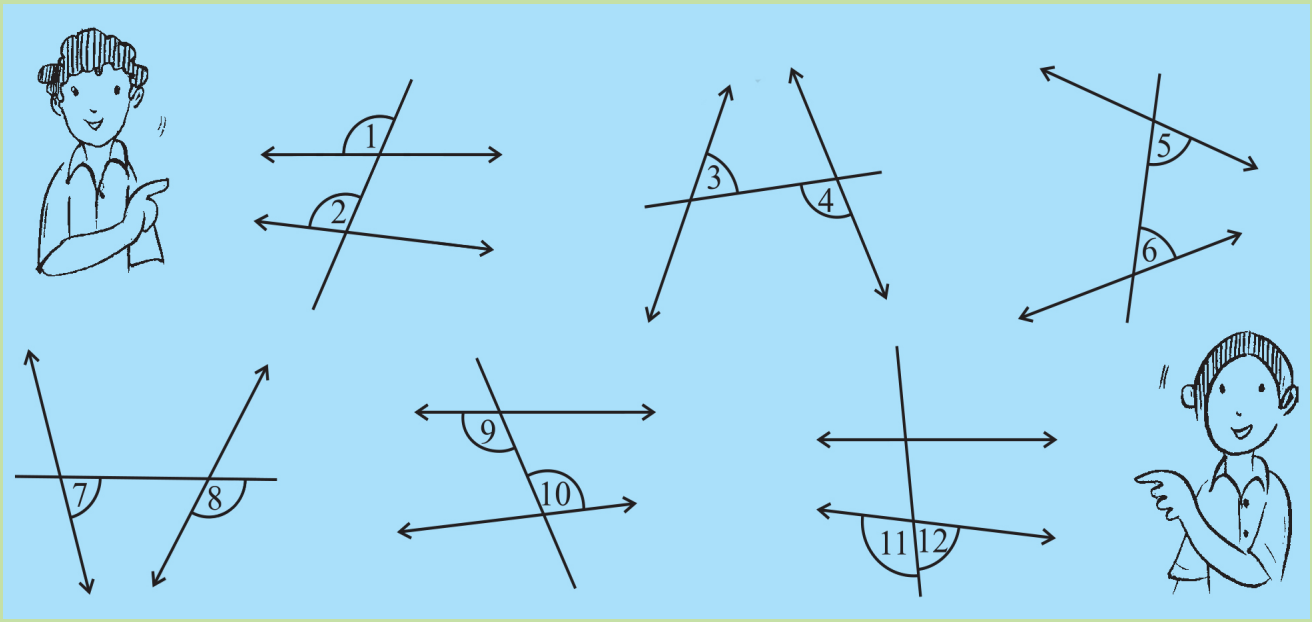
(iii) द्वयोः रेखयोः 'मध्ये' स्थिताः भवन्ति।



आकृतिः 5.26

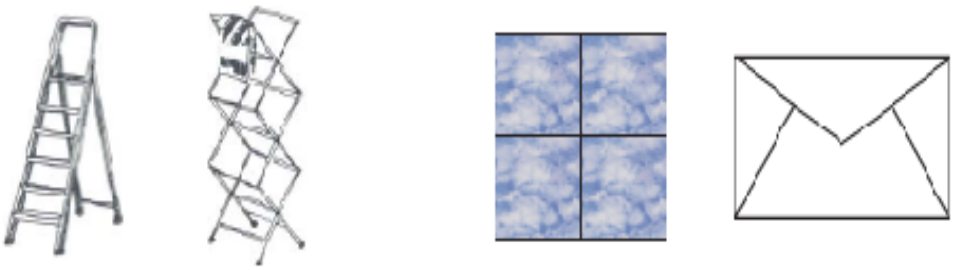
प्रयासं कुर्वन्तु

प्रत्येकम् आकृत्यां कोणयुग्माय नाम यच्छन्तु



5.3.4 समान्तराणां रेखाणां तिर्यक्-छेदिरेखा

भवन्तः स्मरन्ति किं यत् समान्तररेखाः काः सन्ति ? एताः कस्मिंश्चित् तले एतादृश्यः रेखाः भवन्ति याः परस्परं न कुत्रापि मिलन्ति । किं भवन्तः निम्नलिखितासु आकृतिषु समान्तररेखाणाम् अभिज्ञानं कर्तुम् अर्हन्ति (आकृतिः 5.27) ।



आकृतिः 5.26

समान्तररेखाणां तिर्यक्-छेदिरेखातः अतीव रूचिकराः परिणामाः प्राप्यन्ते ।

एतान् कुर्वन्तु

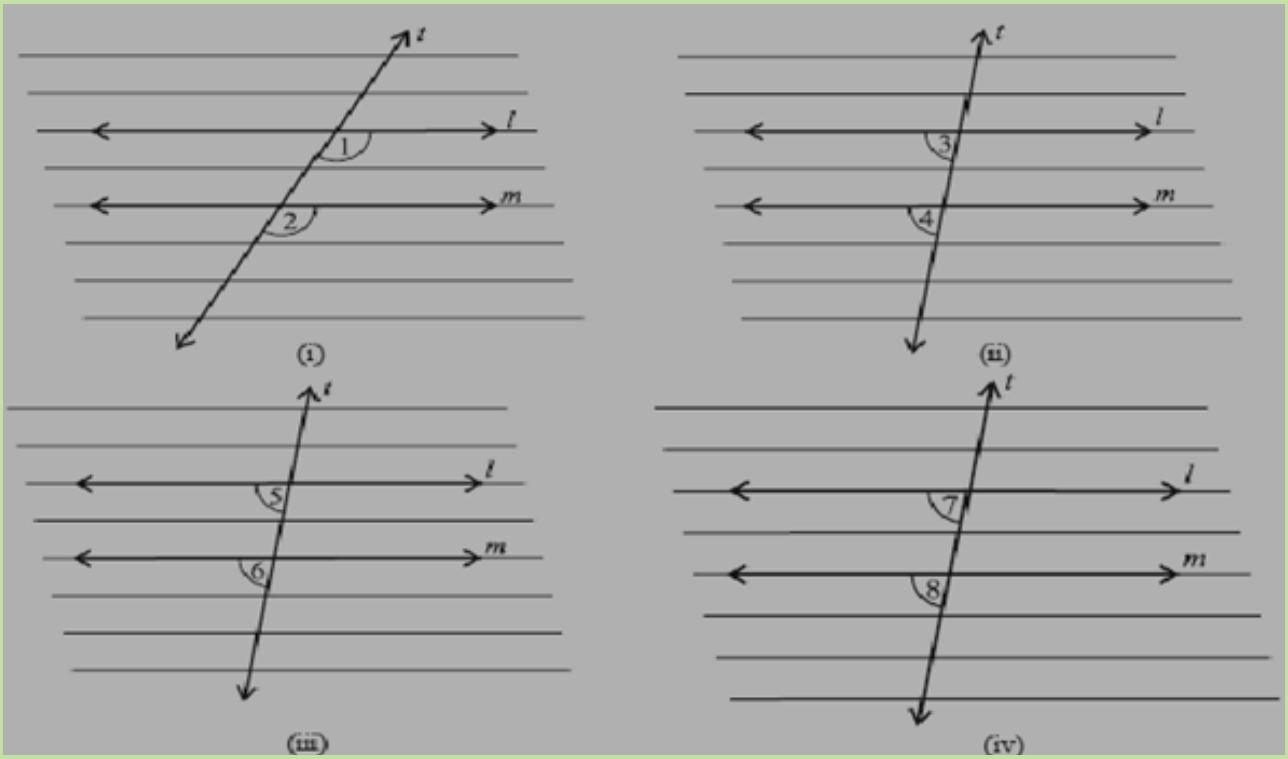
एकं रेखाङ्कितं कर्गदं स्वीकुर्वन्तु । द्वे स्थूले l तथा च m इति वर्णयुते समान्तररेखे आलिखन्तु ।

l तथा चmइति रेखयोः t इति एकां तिर्यक्-छेदि-रेखाम् आलिखन्तु । ∠1तथा च ∠2 इत्येतौ समरूपौ कुर्वन्तु यथा5.28 (i) इति आकृत्यां दर्शितम् अस्ति। आलिखितायाम् आकृत्याम् एकम् अनुरेखणकर्गदम्(ट्रेसिंग पेपर)स्थापयन्तु।l, mतथा चtइत्येतासां रेखाणां प्रतिलिपिं निर्मान्तु। अनुरेखणकर्गदम् t इत्येतम् अनु तावत्पर्यन्तं सारयन्तु यावत्पर्यन्तम् l, m इत्यस्य संपाती न भवेत् ।

भवन्तः प्राप्नुवन्ति यत् प्रतिलिपिकृतायाः आकृत्याः∠1 इति कोणःमूलाकृत्याः ∠2 इत्यस्य कोणस्य संपाती जायते । वस्तुतः भवन्तः निम्नलिखित-परिणामान् अनुरेखणस्य एवञ्च अपसारणस्य क्रियाकलापेन प्रमाणीकर्तुम् अर्हन्ति ।

(i) ∠1 = ∠2 (ii) ∠3 = ∠4 (iii) ∠5 = ∠6 (iv) ∠7 = ∠8

एतान् कुर्वन्तु

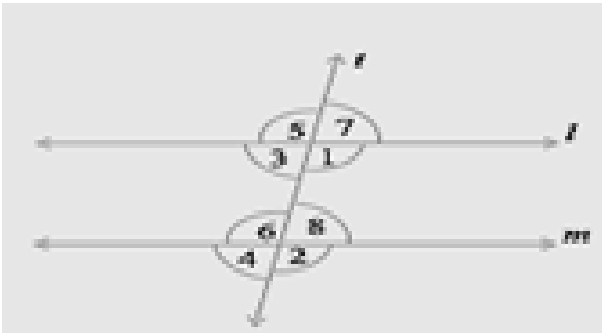


आकृतिः 5.28

एषः क्रियाविधिः निम्निलिखितं तथ्यं स्पष्टीकरोति :

यदि द्वे समान्तररेखे कयाचित् तिर्यक्-छेदिरेखया छिद्येते तदा सङ्गतकोणानां प्रत्येकं युग्मस्य मापः समानः भवति।

अस्य परिणामस्य उपयोगं कुर्वाणाः वयम् एकम् अन्यं रूचिकरं परिणामं प्राप्नुमः। 5.29 इति आकृतिम् अवलोकयन्तु। यदा l तथा च m इति समान्तररेखाः, t इति रेखया छिद्येते तदा $\angle 3 = \angle 7$ भवति। (उर्ध्वाधरः सम्मुखकोणः)



आकृतिः 5.29

परन्तु $\angle 7 = \angle 8$ (संगतकोणः) अतः, $\angle 3 = \angle 8$

अनेन एव प्रकारेण भवन्तः दर्शयितुम् अर्हन्ति $\angle 1 = \angle 6$.

अतः वयं निम्नलिखितं परिणामं प्राप्नुमः

यदि द्वे समान्तररेखे कयाचित् तिर्यक्-छेदिन्या रेखया छिद्येते, तदा अन्तः एकान्तरकोणानां प्रत्येकं युग्मः समानः भवति

एषः द्वितीयः परिणामः अस्मान् एकम् अन्यरूचिकरं गुणधर्मं प्रति नयति।

पुनः 5.29 इति आकृत्यां दत्तालेखेन, $\angle 3 + \angle 1 = 180°$ ($\angle 3$ तथा च $\angle 1$ इति रैखिकयुग्मं निर्मातः)

किन्तु $\angle 1 = \angle 6$ (अन्तः एकान्तरकोणयोः एकः युग्मः)

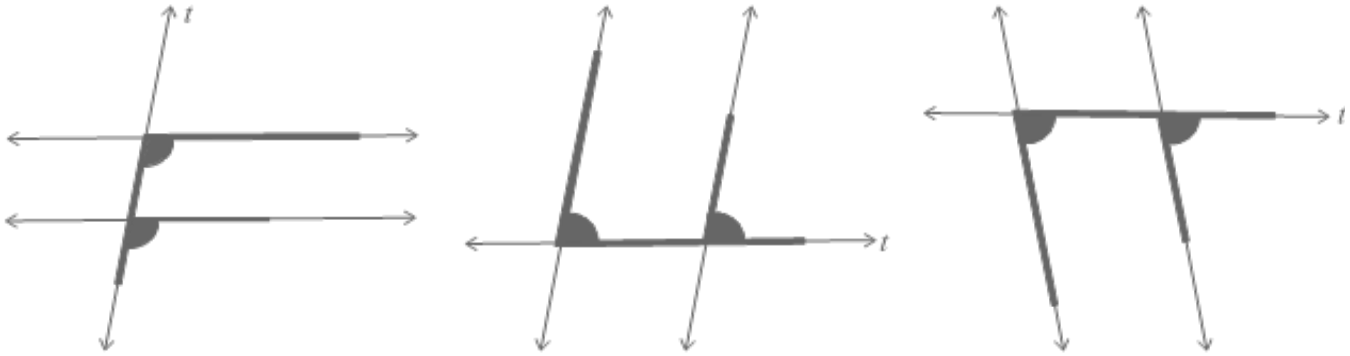
अनेन प्रकारेण वयं वक्तुं शक्नुमः यत् $\angle 3 + \angle 6 = 180°$ ।

इत्थमेव $\angle 1 + \angle 8 = 180°$ अनेन प्रकारेण निम्नलिखित-परिणामस्य प्राप्तिः भवति :

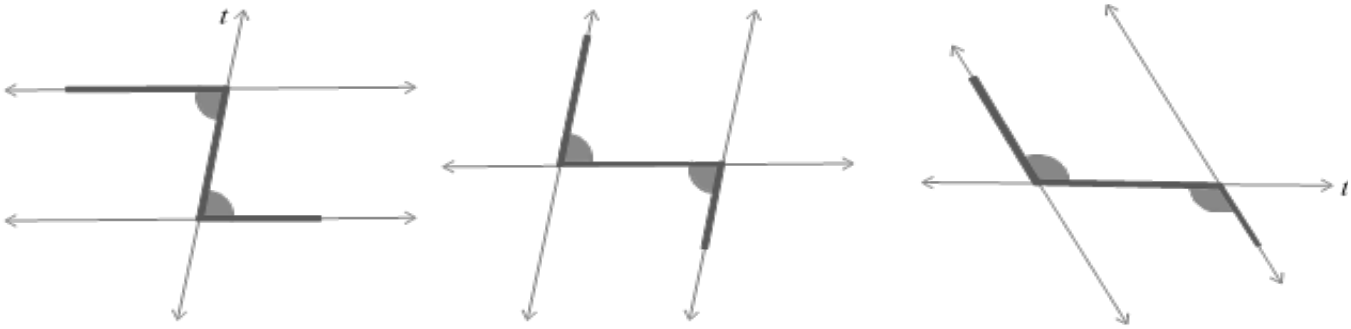
यदि द्वे समान्तररेखे कयाचित् तिर्यक्-छेदिन्या रेखया छिद्येते तदा तिर्यक् – छेदिन्याः रेखायाः एकस्यामेव दिशि निर्मितकोणानां प्रत्येकं युग्मः संपूरकः भवति ।

सुसंगताकृतीः अवधाने स्थापयन्तः भवन्तः एतान् परिणामान् अतीव सरलतया स्मर्तुं शक्नुवन्ति :

संगतकोणानां कृते 'F' इति आकारम् अवधाने स्थापयन्तु



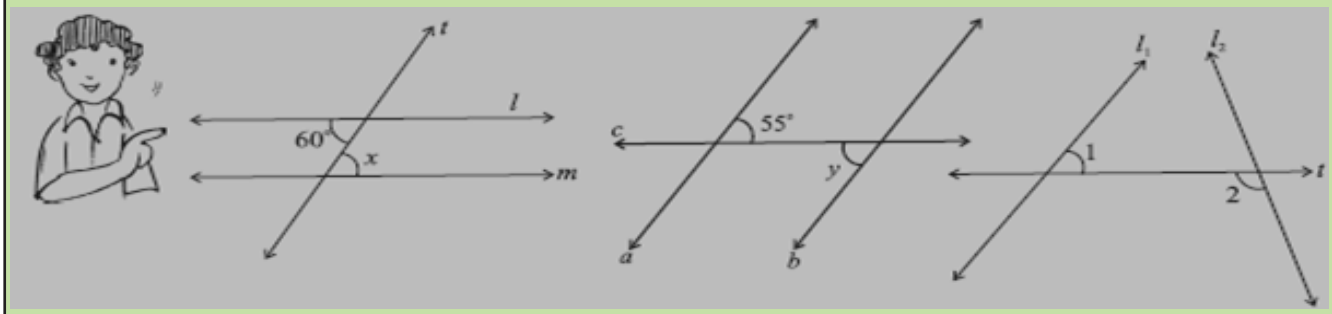
एकान्तरकोणानां कृते 'Z' इति आकारम् अवधाने स्थापयन्तु



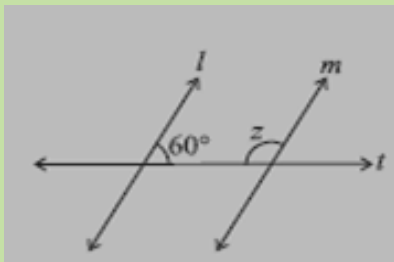
एतान् कुर्वन्तु

समान्तररेखाणाम् एकं युग्मं तथा च एकां तिर्यक्-छेदिरेखाम् आलिखन्तु । कोणान् मापयित्वा उपर्युक्तानां त्रयाणां कथनानां सत्यापनं कुर्वन्तु ।

एतान् कुर्वन्तु



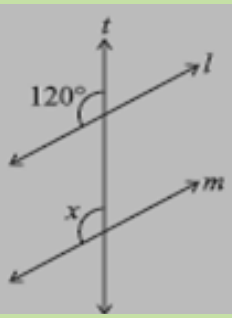
$l \parallel m$	$a \parallel b$	l_1, l_2 रेखाद्वयम् अस्ति
t इति एका तिर्यक्छेदिनी रेखा अस्ति ।	c इति एका तिर्यक्छेदिनी रेखा अस्ति ।	t इति एका तिर्यक्छेदिनी रेखा अस्ति
$\angle x = ?$	$\angle y = ?$	किम् $\angle 1 = \angle 2$ इति अस्ति ?



$l \| m$

t इति एका तिर्यक्छेदिनी रेखा अस्ति।

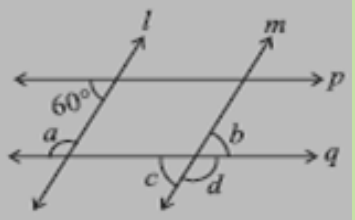
$\angle z = ?$



$l \| m$

tइति एका तिर्यक्छेदिनी रेखा अस्ति।

$\angle x = ?$



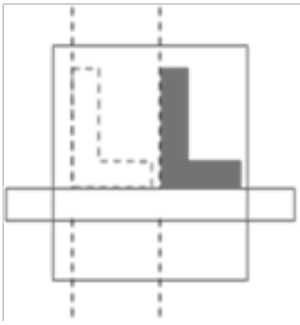
$l \| m, p \| q$

a,b,c,d इति ज्ञायताम्।

5.4 समान्तररेखाणां परीक्षणम्

भवन्तः जानन्ति यत् यदि द्वे रेखे समान्तरे स्तः तदा एकस्याः तिर्यक्-छेदिन्याः रेखायाः साहाय्येन समानसंगतानां कोणानाम् एकः युग्मः प्राप्यते, समानानाम् अन्तःकोणानाम् एकः युग्मः प्राप्यते तथा च तिर्यक् –छेदिन्याः रेखायाः एकस्यां दिशि निर्मिताः अन्तः कोणाः ये सम्पूरकाः भवन्ति।

यदा द्वे रेखे दत्ते स्तः तदा किं कश्चन एतादृशः विधिः अस्ति यस्य साहाय्येन एतद् अवेक्षणं कर्तुं शक्यते यत् दत्ते रेखे समान्तरे स्तः अथवा न ? जीवनेन सह सम्बधितासु परिस्थितिषु भवतां कृते अस्य कौशलस्य आवश्यकता भवति।

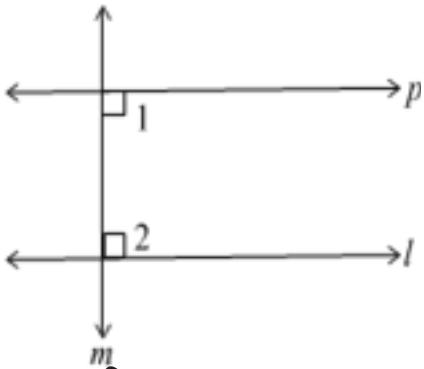


आकृतिः 5.30

आकृतिः 5.31

एतान् खण्डान् (5.30 आकृतिः) आलेखितुम् एकः वास्तुकारः तक्षकस्य वर्गम् एवञ्च मापिकां प्रयुनक्ति। सः अभियोगं करोति यत् एते समान्तराः सन्ति। कथम् ?

भवन्तः किं द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् किं तेन संगतकोणाः समानाः स्थापयन्ते ? (अत्र तिर्यक्–छेदिनी रेखा किम् अस्ति?)



आकृतिः 5.32

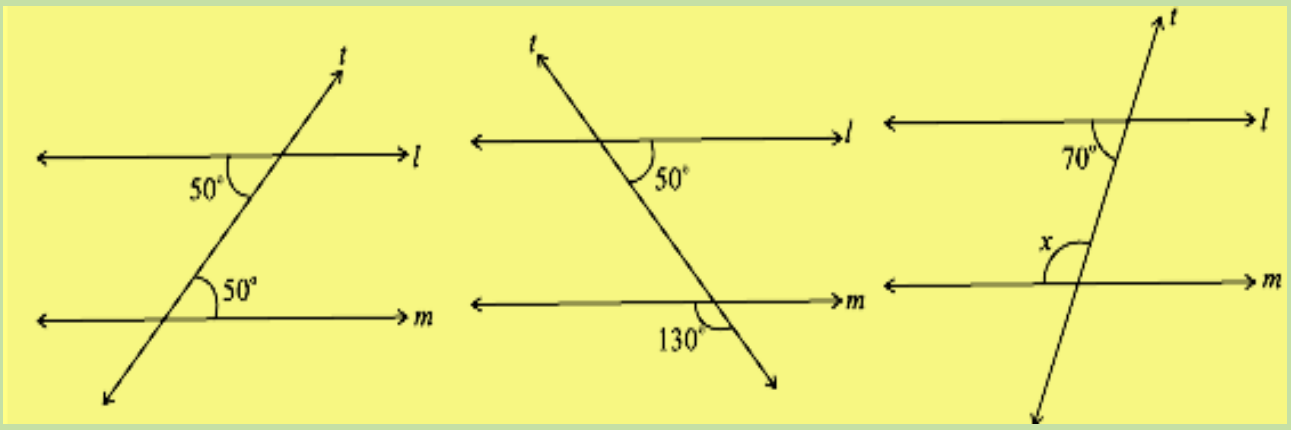
अतः यदा एका तिर्यक्–छेदिनी रेखा द्वे रेखे इत्थं कर्तयति यत् संगतकेणानां युग्माः समानाः भवेयुः तदा रेखाः समान्तराः भवन्ति।

Z इति अक्षरम् (5.31 आकृतिः) पश्यन्तु। अत्र क्षैतिजः खण्डः समान्तरः अस्ति यतोहि एकान्तरकोणः समानः अस्ति।

यदा एका तिर्यक् –छेदिरेखा द्वे रेखे इत्थं कर्तयति यत् अन्तःएकान्तरकोणानां युग्मः समानः अस्ति, तदा रेखाः समान्तराः भवन्ति। एकाम्। इति रेखाम्आलिखन्तु (आकृतिः 5.32)।l इति रेखायाः लम्बवतीम् एकाम् m इति रेखाम् आलिखन्तु। एकां रेखाम् p इत्यत्र तथा आलिखन्तु येन p इति m इत्यस्य लम्बवत्स्यात्। अनेन प्रकारेण p इति l इति लम्बोपरि लम्बः अस्ति। भवन्तः $p \| l$ इति प्राप्नुवन्ति कथम् ? एतद् एदर्थम् अस्ति यतोहि भवन्तः p तथा आलिखितवन्तः येन $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ इति अस्ति।

अतः यदा तिर्यक्-छेदिरेखा रेखाद्वयं तथा कर्तयति यत् तिर्यक्-छेदिरेखायाः एकस्यां दिशायां निर्मितानाम् अन्तःकोणानां युग्मः सम्पूरकः अस्ति तदा रेखाः समान्तराः भवन्ति ।

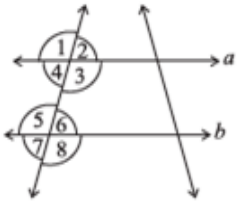
एतान् कुर्वन्तु



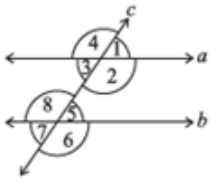
किम् l II mइति अस्ति ? किमर्थम् किम् l II mइति अस्ति ? यदि l II mतदाxइति किम् अस्ति ?

प्रश्नावली 5.2

1. निम्नलिखितकथनेषु प्रत्येकस्मिन् कथने प्रयुक्तस्य गुणधर्मस्य वर्णनं कुर्वन्तु (आकृतिः 5.33)।
   (i) यदि a || b, तदा∠1 = ∠5
   (ii) यदि ∠4 = ∠6, तदा a || b.
   (iii) यदि ∠4 + ∠5 = 180°, तदाa || b

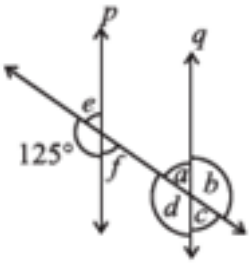


आकृतिः 5.33

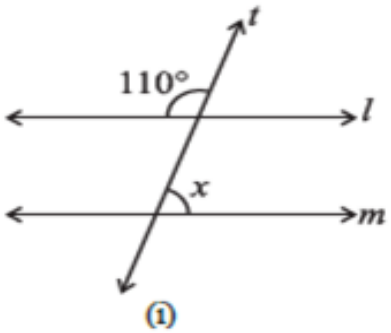


आकृतिः 5.34

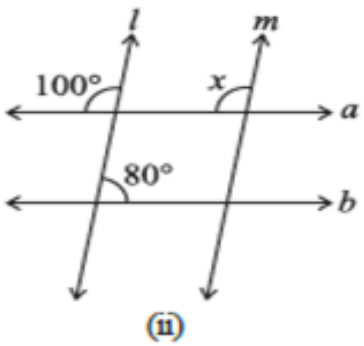
2 5.34 इति आकृत्यां निम्नलिखितानाम् अभिज्ञानं कुर्वन्तु
   (i) सङ्गतकोणानां युग्माः
   (ii) अन्तःएकान्तरकोणानां युग्माः
   (iii) तिर्यक्-छेदिन्याः रेखायाः एकस्यां दिशि निर्मितानाम् अन्तःकोणानां युग्माः
   (iv) उर्ध्वाधराः सम्मुखकोणाः।



3. संलग्नायाम् आकृत्यां यदि p || q भवेत् तदा अज्ञातकोणान् ज्ञातुं प्रयासं कुर्वन्तु ।
4. यदिl || mअस्ति तदा निम्नलिखितासु आकृतिषु प्रत्येकस्मिन् x इत्यस्य मानं ज्ञायताम्



(i)

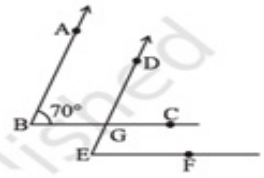


(ii)

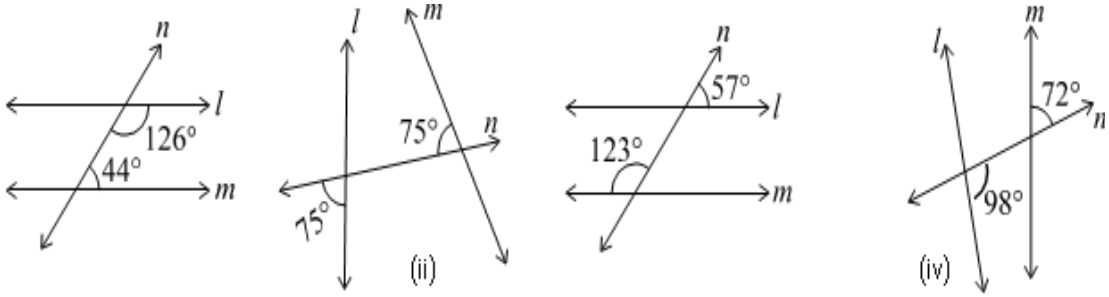
5. प्रदत्तायाम् आकृत्यां द्वयोः कोणयोः भुजाः समान्तराः सन्ति । यदि ∠ABC = 70° भवेत्,तदा

(i)∠DGC इति ज्ञायताम् ।

(∠)∠DEF इति ज्ञायताम् ।



6. अधोदत्तासु आकृतिषु निर्णयं स्वीकुर्वन्तु यत् किम् l इति m इत्यस्य समान्तरं वर्तते ?



अस्माभिः का चर्चा विहिता ?

1. वयं स्मरामः यत्

(i) एकस्य रेखाखण्डस्य द्वौ अन्तबिन्दू भवतः।

(ii) एकस्य किरणस्य केवलम् एकः एव अन्तबिन्दुः (तस्य शीर्षम्) भवति ।

(iii) एकस्याः रेखायाःकस्यामपि दिशि कश्चन अपि अन्तःबिन्दुः न भवति ।

2. एकस्य कोणस्य निर्माणः तदा भवति यदा द्वे रेखे (अथवा किरणौ अथवा रेखाखण्डौ) अन्योन्यं मिलतः।

कोणयुग्मः	**प्रतिबन्धः**
द्वौ पूरककोणौ	मापानां योगः 90° अस्ति ।
द्वौ सम्पूरककोणौ	मापानां योगः 180° अस्ति ।
द्वौ आसन्नकोणौ	एकम् उभयनिष्ठशीर्षम् एकञ्च उभयनिष्ठभुजा भवति । किन्तु कञ्चित् अपि उभयनिष्ठम् अन्तस्थः न भवति ।
रैखिकयुग्मः	आसन्नः एवञ्च संपूरकः ।

3. यदा l तथा च m इति द्वे रेखे अन्योन्यं मिलतः तदा वयं वदामः यत् एते रेखे प्रतिच्छेदं कुर्वतः। मेलनबिन्दुः प्रतिच्छेदबिन्दुः इति कथ्यते । एतादृश्यः रेखाः याः यावदपि वर्धयामः अन्योऽन्यं न मिलन्ति समान्तररेखाः इति कथ्यन्ते ।

4. (i) यदा रेखाद्वयं प्रतिच्छेदं करोति (सामान्यतः'X'इति अक्षरमिव दृश्यते) तदा वयं सम्मुखकोणानां युग्मद्वयं प्राप्नुमः । एते उर्ध्वाधराः सम्मुखकोणाः इति कथ्यन्ते । एतेषां मापः समानः भवति ।

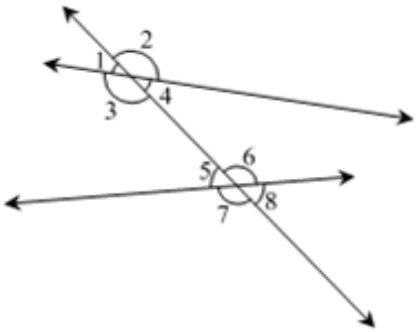
(ii) द्वयोः अथवा द्व्यधिक-रेखाणां विभिन्नबिन्दुषु प्रतिच्छेदं कुर्वती रेखा तिर्यक्-छेदिरेखा इति कथ्यते ।

(iii) एकतिर्यक्–छेदिरेखारेखेण विभिन्नप्रकारकाः कोणाः प्राप्यन्ते ।

(iv) आकृत्यां वयं प्राप्नुमः

कोणानां प्रकाराः	**दर्शयितारः कोणाः**
अन्तः	∠3, ∠4, ∠5, ∠6
बाह्यः	∠1, ∠2, ∠7, ∠8

संगतः	∠1 तथा च ∠5, ∠2 एवञ्च ∠6 ∠3 तथा च ∠7, ∠4 एवञ्च ∠8
अन्तः एकान्तरः	∠3 तथा च ∠6, ∠4 एवञ्च ∠5
बाह्यः एकान्तरः	∠1 तथा च ∠8, ∠2 एवञ्च ∠7
तिर्यक्-छेदिन्याः रेखायाः एकस्यां दिशि निर्मिताः कोणाः	∠3 तथा च ∠5, ∠4 एवञ्च ∠6



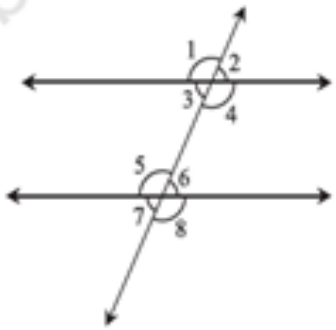
(v) यदा एका तिर्यक्-छेदिरेखा द्वयोः समान्तररेखयोः प्रतिच्छेदं करोति तदा वयं निम्नलिखितान् रूचिकरसम्बन्धान्प्राप्नुमः । सङ्गतकोणानां प्रत्येकं युग्मः समानः भवति।

∠1 = ∠5, ∠3 = ∠7, ∠2 = ∠6, ∠4 = ∠8

अन्तः एकान्तरः कोणानां युग्माः समानाः भवन्ति ∠3 = ∠6, ∠4 = ∠5

तिर्यक्–छेदिरेखायाः एकस्यां दिशायां निर्मितानाम् अन्तःकोणानां प्रत्येकं युग्मः सम्पूरकः भवति

∠3 + ∠5 = 180°, ∠4 + ∠6 = 180°



त्रिभुजम् अथ च तस्य गुणाः

अध्यायः 6

6.1 भूमिका

भवन्तः दृष्टवन्तः यत् त्रिभुजं त्रिभिः रेखाखण्डैः संवृत्तमुख-सरलाकृतिः अस्ति। अस्य त्रीणि शीर्षाणि, तिस्रः भुजाः त्रयः च कोणाः भवन्ति। अत्र एकं △ABC इति त्रिभुजम् (आकृतिः 6.1) अस्ति। अस्मिन् सन्ति -

भुजाः $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$

कोणाः ∠BAC, ∠ABC, ∠BCA

शीर्षाणि A, B, C

आकृतिः 6.1

A इति शीर्षाभिमुखं $\overline{BC}$ इति भुजा अस्ति। किं भवन्तः $\overline{AB}$ इति भुजायाः सम्मुख-कोणस्य नाम वक्तुं शक्नुवन्ति ? भवन्तः जानन्ति यत् त्रिभुजानां वर्गीकरणम् (i) भुजानाम् (ii) कोणानां च आधारेण कथं क्रियते।

(i) भुजाधारेण - बिषमबाहुः समद्विबाहुः समबाहुः चेति।

(ii) कोणाधारेण - न्यूनकोणः, अधिककोणः समकोणः च।

उपर्युक्तेन निर्दर्शनेन सर्वविधत्रिभुजानाम् आकाराणां प्रतिरूपाणि उपमानानि वा कर्गदेन छित्वा निर्मान्तु। स्वकीय-प्रतिरूपाणां सङ्गीनां प्रतिरूपैः सह तुलनां कुर्वन्तु।

आयान्तु त्रिभुजानां विषये इतोऽपि अधिकं ज्ञातुं प्रयासं कुर्मः।

एतान् कुर्वन्तु

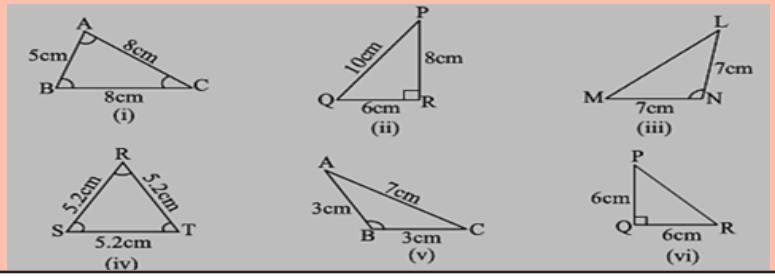
1. △ABC इति त्रिभुजस्य षण्णाम् अवयवानाम् (तिसृणां भुजानां त्रयाणां च कोणानाम्) नामानि लिखन्तु 2. लिखन्तु

(i) △PQR इति त्रिभुजस्य Q इति शीर्षसः सम्मुख-भुजा। (ii) △LMN इति त्रिभुजस्य LM इति भुजायाः सम्मुखकोणः।

(iii) △RST इति त्रिभुजस्य RT इति भुजायाः सम्मुखशीर्षम्।

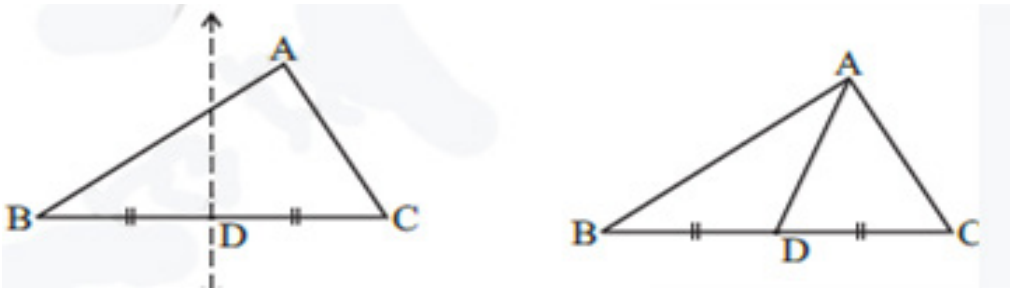
3. 6.2 इति आकृतिं पश्यन्तु त्रिभुजेषु च प्रत्येकं त्रिभुजस्य वर्गीकरणं कुर्वन्तु।

(a) भुजानाम् आधारेण (b) कोणानाम् आधारेण



6.2 त्रिभुजस्य माध्यमिका:

भवन्तः जानन्ति यत् एकस्य प्रदत्तरेखाखण्डस्य लम्बसमद्विभाजकः कर्गदस्य व्यावर्तन-प्रक्रियया कथं ज्ञायते। कर्गद-खण्डेन एकम् ABC इति त्रिभुजं छिन्दन्तु (आकृतिः 6.3)। अस्य एकां काञ्चित् भुजां कल्पयन्तु $\overline{BC}$ इति स्वीकुर्वन्तु। कर्गद-व्यावर्तन-प्रक्रियया $\overline{BC}$ इत्यस्याः भुजायाः लम्बसमद्विभाजकं ज्ञातं कुर्वन्तु। कर्गदोपरि वलयस्य अधस्तलम् $\overline{BC}$ इति भुजाम् 'D' इत्यस्मिन् बिन्दौ छिनत्ति यः तस्य मध्यबिन्दुः अस्ति। 'A' इति शीर्षम् 'D' इत्यनेन मेलयन्तु।



आकृतिः6.3

AD इति रेखाखण्डः, यः $\overline{BC}$ इति भुजायाः D इति मध्यबिन्दुम् A इति सम्मुखशीर्षेण मेलयति त्रिभुजस्य एका **माध्यमिका** वर्तते।

$\overline{AB}$ अथ च $\overline{CA}$ इति भुजे स्वीकृत्य अस्य त्रिभुजस्य अन्ये द्वे माध्यमिके आलिखन्तु।

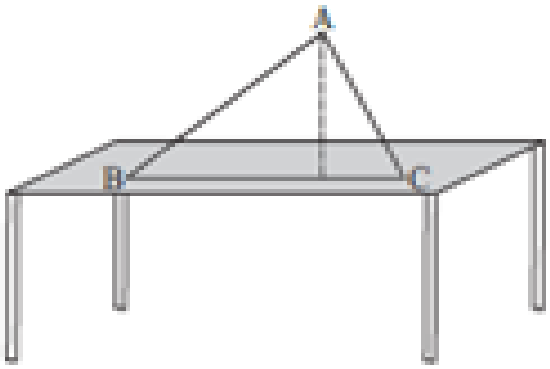
माध्यमिका, त्रिभुजस्य एकं शीर्षं सम्मुखी-भुजायाः मध्यबिन्दुना मेलयति।

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

1. एकस्मिन् त्रिभुजे कति माध्यमिकाः भवितुं शक्नुवन्ति ?
2. किम् एका माध्यमिका पूर्णतया त्रिभुजस्य अन्तः एव स्थिता भवति ? (यदि भवन्तः एतत् असत्यम् अधिगच्छन्ति तस्याः स्थितेः कृते एकाम् आकृतिम् आलिखन्तु।)

6.3 त्रिभुजस्य शीर्षलम्बाः

त्रिभुजाकारं संसृष्टपत्रस्य एकं ABC इति खण्डं स्वीकुर्वन्तु। एनं च उत्पीठिकायां वक्रतारहितम् ऊर्ध्वाधरम् ऊर्ध्वीकुर्वन्तु। अस्य औन्नत्यं कियद् अस्ति ? एतद् औन्नत्यम् A इति शीर्षात् $\overline{BC}$ इति भुजा पर्यन्तं दूरत्वम् दूरता वा अस्ति।



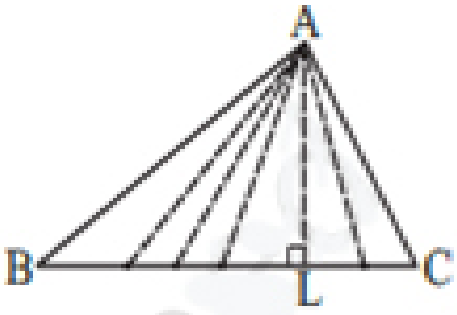
(आकृतिः 6.4)

A इति शीर्षात् $\overline{BC}$ इति भुजा पर्यन्तम् अनेकाः रेखाखण्डाः आलेखितुं शक्यते (आकृतिः 6.5)। एषु रेखाखण्डेषु त्रिभुजस्य औन्नत्यं कतमः रेखाखण्डः प्रदर्शयति ?

सः रेखाखण्डः यः A इति शीर्षाद् अधः सरलतया ऊर्ध्वाधरम् $\overline{BC}$ इति भुजा पर्यन्तं तस्यां च लम्बवत् भवति एषः अस्य औन्नत्यं भवति।

AL इति रेखाखण्डः अस्य त्रिभुजस्य शीर्षलम्बः अस्ति।

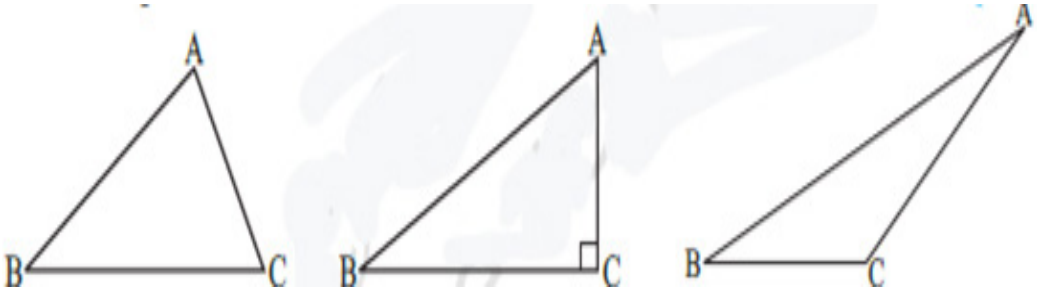
शीर्षलम्बस्य एकः अन्तबिन्दुः त्रिभुजस्य शीर्षे अपरश्च अन्तबिन्दुः सम्मुखभुजां निर्मीयमाणायां रेखायां स्थितः भवति। प्रत्येकं शीर्षाद् एकः शीर्षलम्बः आक्रष्टुं शक्यते



(आकृतः 6.5)

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

1. एकस्मिन् त्रिभुजे कति शीर्षाणि भवितुं शक्नुवन्ति ?
2. निम्न-त्रिभुजेषु A इति शीर्षबिन्दुतः $\overline{BC}$ इति भुजा पर्यन्तम् अनुमानेन शीर्षलम्बम् आलिखन्तु।



(i) न्यूनकोणः (ii) समकोणः (iii) अधिककोणः

आकृतिः 6.6

3. किम् एकः शीर्षलम्बः सदैव पूर्णतया त्रिभुजस्य आभ्यन्तरं भवति? (यदि भवन्तः अधिगमयन्ति यद् एतत् सत्यं नास्ति तर्हि तस्याः स्थितेः कृते एकाम् आकृतिम् आलिखन्तु।)
4. किं भवन्तः एतादृशं त्रिभुजं चिन्तयितुं शक्नुवन्ति यस्य द्वौ शीर्षलम्बौ तस्य भुजे एव स्तः ?
5. किं कस्यचित् त्रिभुजस्य माध्यमिका एवञ्च शीर्षलम्बः एकैव रेखाखण्डः भवितुं शक्नोति ?

(सङ्केतः 4 अथ च 5 प्रश्नयोः कृते प्रत्येकं प्रकारकस्य त्रिभुजस्य शीर्षलम्बम् आकृष्य अन्वेषणं कुर्वन्तु)

एतान् कुर्वन्तु

कर्गदेन छिन्नाः एताः आकृतीः स्वीकुर्वन्तु

(i) समबाहुत्रिभुजम् (ii) समद्विबाहुत्रिभुजम् अथ च (iii) विषमबाहुत्रिभुजम्

एतेषां शीर्षलम्बाः माध्यमिकाः च ज्ञायन्ताम्। किम् भवन्तः एतासु काञ्चित् विशिष्टतां आप्नुवन्ति ? स्वीयैः सङ्गिभिः सह आसु आकृतिषु चर्चां कुर्वन्तु।

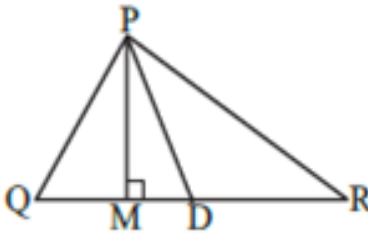
प्रश्नावली 6.1

1. △ PQR इत्यस्मिन् त्रिभुजे D इति बिन्दुः $\overline{QR}$ इत्यस्याः भुजायाः मध्यबिन्दुः अस्ति।

   $\overline{PM}$ _____ अस्ति।

   PD _____ अस्ति।

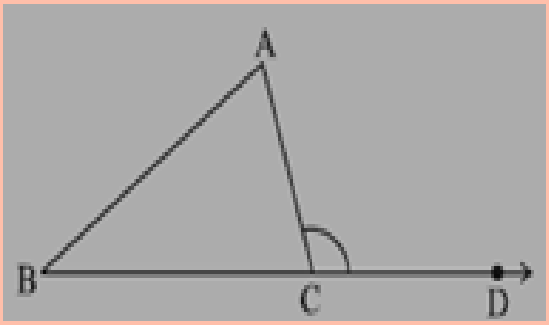
   किम् QM = MR इति अस्ति ?



2. निम्नानां कृते अनुमानेन आकृतिम् आलिखन्तु -
   (a) △ABC इत्यस्मिन् त्रिभुजे BE इति माध्यमिका अस्ति।
   (b) △PQR इत्यस्मिन् त्रिभुजे PQ तथा च PR त्रिभुजस्य शीर्षलम्बौ स्तः।
   (c) △XYZ इत्यस्मिन् त्रिभुजे YL इति त्रिभुजस्य शीर्षलम्बः तस्य बर्हिभागे अस्ति।
3. आकृतिम् आलिख्य पुष्टिं कुर्वन्तु यत् समद्विबाहुत्रिभुजे शीर्षलम्बः अथवा माध्यमिका एकैव रेखाखण्डः भवितुं शक्नोति।

6.4 त्रिभुजस्य बाह्यकोणः एवञ्च अस्य गुणाः

एतान् कुर्वन्तु



आकृतिः 6.7

1. एकम् ABC इति त्रिभुजम् आलिखन्तु अस्य च एकाम् $\overline{BC}$ इति भुजाम् एकां दिशं प्रति वर्धताम् (आकृतिः 6.7)। C इत्यस्मिन् बिन्दौ ACD इति निर्मितकोणे ध्यानं यच्छन्तु। एषः कोणः △ABC इत्यस्य बहिर्भागे स्थितः वर्तते। वयम् एतम् △ABC इति त्रिभुजस्य C इत्यस्मिन् शीर्षे निर्मित-बाह्यकोणम् इति कथयामः।

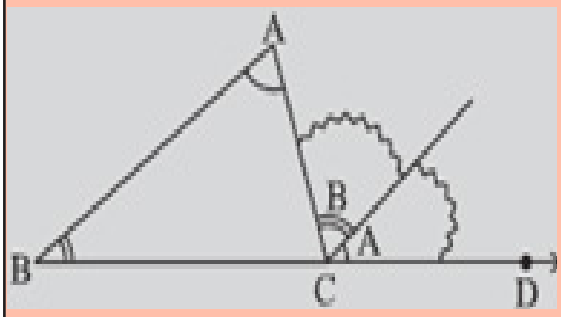
स्पष्टं वर्तते यत् ∠BCA अथ च ∠ACD मिथः संलग्नकोणौ स्तः। त्रिभुजस्य शेषौ ∠A तथा च ∠B इति कोणौ ACD इति

बाह्यकोणस्य द्वौ सम्मुखौ अन्तःकोणौ अथवा दूरस्थौ अन्तःकोणौ इति कथ्येते।

अधुना छित्वा अथवा प्रतिरूपम् (trace copy) आदाय ∠A अथ च ∠B इति संलग्नं कृत्वा ∠ACD इत्यस्य उपरि स्थापयन्तु यथा 6.8 इति आकृत्यां प्रदर्शितम् अस्ति।

किम् एतौ ∠ACD इति कोणं पूर्णतया आच्छादयतः?

भवन्तः किं m ∠ACD = m ∠A + m ∠B इति वक्तुं शक्नुवन्ति ?



आकृतिः 6.8

2. यथा अस्माभिः पूर्वं कृतम्। एकम् ABC इति त्रिभुजम् आदाय तस्य ACD इति बाह्यकोणं निर्मान्तु कोण-मापकस्य साहाय्येन ∠ACD, ∠A तथा च ∠B इत्येतौ परिमीयताम्।

∠A + ∠B इत्येतयोः योगं ज्ञात्वा तयोः तुलनाम् ∠ACD इत्यस्य परिमानेन कुर्वन्तु। कोण-मापकस्य साहाय्येन ∠ACD इत्यस्य परिमाणः ∠A + ∠B इत्यनयोः तुल्यः भविष्यति। यदि परिमाणे कापि त्रूटिः विद्यते तदा अनयोः परिमाणः प्रायशः तुल्यः भविष्यति।

भवन्तः एतौ द्वौ क्रियाकलापौ कानिचित् अन्यानि त्रिभुजानि स्वीकृत्य तेषां च बाह्यकोणान् आलिख्य व्याहर्तुं शक्नुवन्ति। प्रतिवारं भवन्तः एतद् एव प्राप्स्यन्ति यत् त्रिभुजस्य बाह्यकोणः तस्य द्वयोः सम्मुखयोः अन्तःकोणयोः योगस्य तुल्यः भवति।

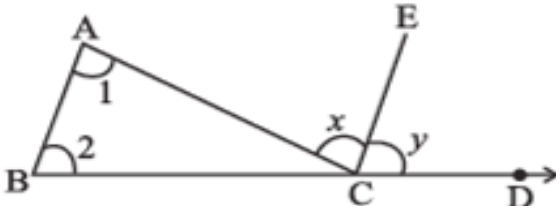
एकेन चरणबद्धेन अथवा तर्कपूर्णविधिना अपि अस्य गुणस्य पुष्टिः कर्तुं शक्यते।

कस्यचित् त्रिभुजस्य बाह्यकोणः स्वयोः द्वयोः सम्मुखान्तःकोणयोः योगस्य तुल्यः भवति।

दत्तम् अस्ति : △ABC इति त्रिभुजं स्वीकुर्मः। ∠ACD इति अस्य त्रिभुजस्य बाह्यकोणः अस्ति।

दर्शितव्यम् अस्ति : m ∠ACD = m ∠A + m ∠B

C इति शीर्षात् $\overline{BA}$ इति भुजायाः $\overline{CE}$ इति समान्तराम् एकां रेखाम् आलिखन्तु।



आकृतिः 6.9

औचित्यम्

चरणम्	**कारणानि**
(a) ∠1 = ∠x	($\overline{BA}$) || ($\overline{CE}$) तथा च ($\overline{AC}$) एका तिर्यक् रेखा अस्ति। अतः एकान्तरकोणाः समानाः भवेयुः।

(b) $\angle 2 = \angle y$ $(\overline{BA}) \parallel (\overline{CE})$ तथा च $(\overline{BD})$ एका तिर्यक् रेखा अस्ति।
अतः सङ्गतकोणाः समानाः भवेयुः।

(c) $\angle 1 + \angle 2 = \angle x + \angle y$

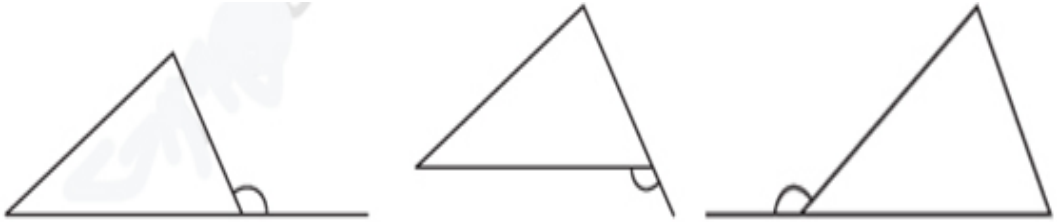
(d) सम्प्रति $\angle x + \angle y = m\ \angle ACD$ (6.9 इति आकृतितः)

अतः $\angle 1 + \angle 2 = \angle ACD$

कस्यचित् त्रिभुजस्य बाह्यकोणः तस्य च द्वयोः सम्मुखयोः अन्तकोणयोः अन्तःस्थः एषः सम्बन्धः त्रिभुजस्य बाह्यकोणस्य गुणनाम्ना ज्ञायते

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

1. एकस्य त्रिभुजस्य बाह्यकोणाः भिन्न-भिन्नप्रकारेण निर्मातुं शक्यन्ते। एषु त्रयः निम्नप्रकारेण दर्शिताः सन्ति (आकृतिः 6.10)



आकृतिः 6.10

एतद् अतिरिच्य त्रिभिः प्रकारैः अपि बाह्यकोणाः निर्मातुं शक्यन्ते। तान् अपि अनुमानेन निर्मान्तु।

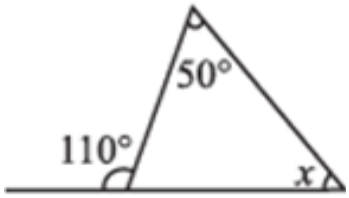
2. कस्यचित् त्रिभुजस्य एकस्मिन् शीर्षे किं निर्मितौ द्वौ बाह्यकोणौ इतरेतरं समानौ भवतः ?
3. कस्यचित् त्रिभुजस्य एकः बाह्यकोणः तस्य च संलग्नस्य अन्तःकोणस्य विषये भवन्तः किमपि वक्तुं शक्नुवन्ति ?

उदाहरणम् 1 6.11 इति आकृत्याम् x इत्यस्य मानः ज्ञायताम्।

समाधानम् सम्मुखानाम् अन्तःकोणानां योगः = बाह्यकोणः

अथवा $50° + x = 110°$

अथवा $x = 60°$

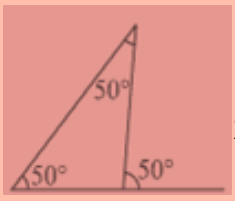


आकृतिः 6.11

विचारयन्तु चर्चयन्तु लिखन्तु च

1. प्रत्येकं दशायाम् अन्तःसम्मुखकोणानां विषये भवन्तः किं वक्तुं शक्यते अपरन्तु बाह्यकोणः -
   (i) एकः समकोणः? (ii) एकः अधिककोणः? (iii) एकः न्यूनकोणः ?
2. किं कस्यचित् त्रिभुजस्य कश्चन बाह्यकोणः एकः सरलकोणः अपि भवितुं शक्नोति ?

एतान् कुर्वन्तु

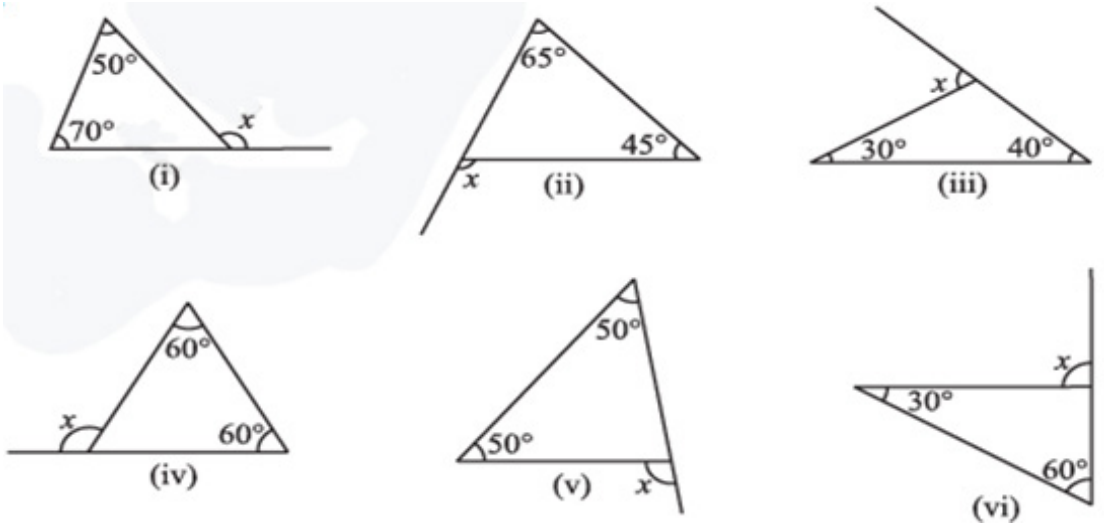


आकृतिः 6.12

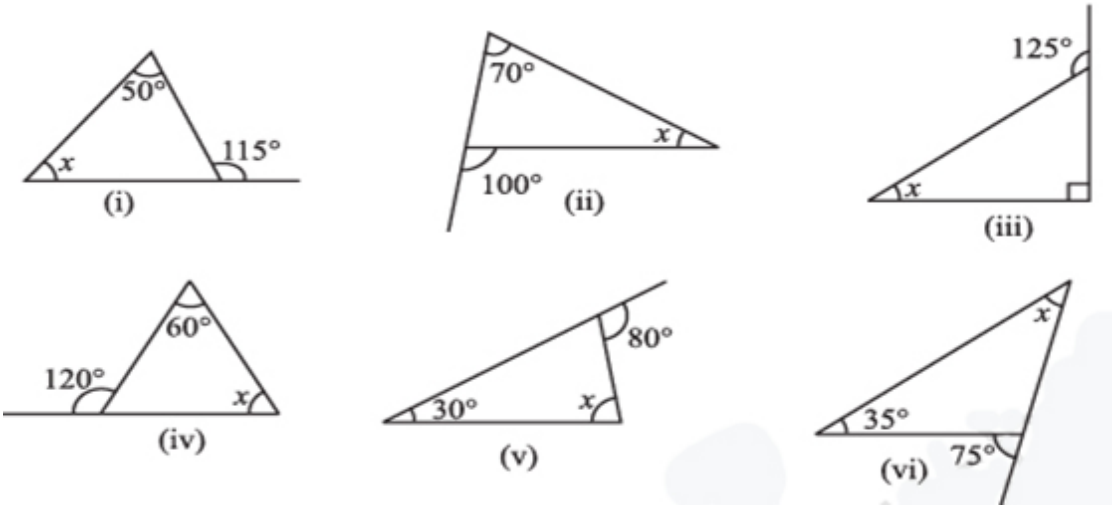
1. कस्मिंश्चित् त्रिभुजे एकस्य बाह्यकोणस्य परिमाणम् 70° इति अस्ति अथ च अन्तःसम्मुखकोणेषु एकस्य परिमाणम् 25° इति अस्ति। द्वितीयस्य अन्तःसम्मुखकोणस्य परिमाणं ज्ञायताम्।
2. कस्यचित् त्रिभुजस्य द्वयोः अन्तःसम्मुखकोणयोः परिमाणौ 60° तथा च 80° इति अस्ति। तस्य बाह्यकोणस्य परिमाणः ज्ञायताम्।
3. किम् अस्याम् आकृत्यां कापि त्रूटिः वर्तते (आकृतिः 6.12) ? टिप्पणीं कुर्वन्तु।

प्रश्नावली 6.2

1. निम्नाकृतिषु x इति आज्ञात-बाह्यकोणस्य मानं ज्ञायताम्।



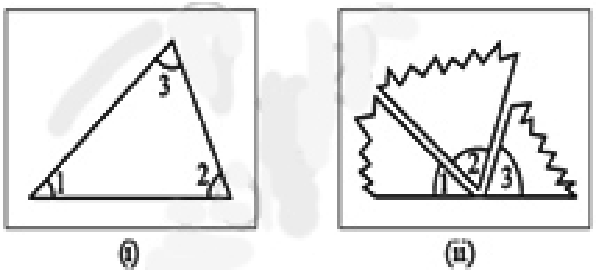
2. निम्नलिखिताकृतिषु x इत्यस्य आज्ञातान्तःकोणस्य मानं ज्ञायताम्।



6.5 त्रिभुजस्य अन्तःकोणानां योग-गुणः

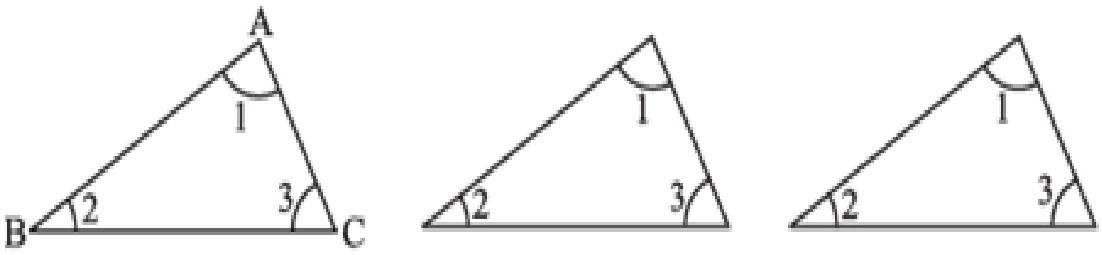
त्रिभुजस्य त्रयाणां कोणानाम् इतरेतरः सम्बन्ध-प्रदर्शकः अद्भुत-गुणः अस्ति। एतं गुणं भवन्तः चतुर्भिः निम्नलिखितक्रियाकलापैः द्रष्टुम् अथ च अधिगन्तुं शक्ष्यन्ति।

1. एकं त्रिभुजम् आलिखन्तु। अस्य त्रीन् कोणान् छित्वा पृथक् - पृथक् कुर्वन्तु। एतान् अधुना इत्थं व्यवस्थीकृत्य स्थापयन्तु यथा 6.13 इति आकृत्याम् (i) एवञ्च (ii) एतन्मध्ये प्रदर्शितं वर्तते। एते त्रयः अपि कोणाः मिलित्वा एकं कोणं निर्मान्ति। यस्य परिमाणः 180° इति अस्ति। अनेन प्रकारेण त्रिभुजस्य त्रयाणां कोणानां परिमाणानां योगः180° इति भवति।



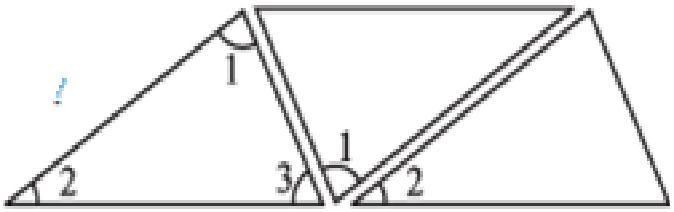
आकृतिः 6.13

2. एतत् तथ्यं भवन्तः एकेन अन्यविधिना अपि द्रष्टुं शक्नुवन्ति। कस्यचित् △ABC इति त्रिभुजस्य त्रीणि प्रतिरूपाणि रचयन्तु (आकृतिः 6.14)।



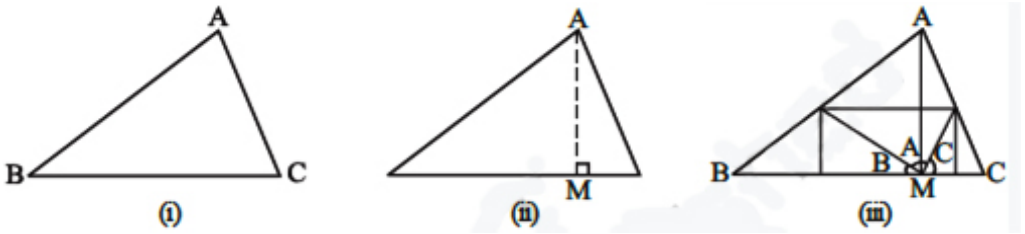
आकृतिः 6.14

एतानि त्रीणि 6.15 इति आकृतिवत् मेलयित्वा सम्यक्तया स्थापयन्तु। ∠1 + ∠2 + ∠3 इत्यादीन् भवन्तः कथम् अवलोकयन्ति ? (किम् अत्र भवन्तः बाह्यकोणेन सम्बन्धितगुणं द्रष्टुं शक्नुवन्ति ?)



आकृतिः 6.15

3. एकेन कर्गदखण्डेन किञ्चन एकं यथा △ABC इति त्रिभुजम् (आकृतिः 6.16)छिन्दन्तु। एतत् त्रिभुजं वक्रीकृत्य A इति शीर्षात् गम्यमानम् AM इति शीर्षलम्बं निर्धारीकुर्वन्तु (निर्धारितं कुर्वन्तु)। अधुना अस्य त्रिभुजस्य त्रीन् कोणभागान् तथा वक्रीकुर्वन्तु येन A, B तथा च C इति त्रीणि अपि शीर्षाणि M इत्यस्मिन् बिन्दौ मिलेयुः।



आकृतिः 6.16

भवन्तः पश्यन्ति यत् त्रिभुजस्य त्रयः कोणाः सम्मिल्य एकं सरलकोणं निर्मान्ति। पुनश्च एषः क्रियाकलाप दर्शयति यत् त्रिभुजस्य त्रयाणां कोणानां परिमापानां योगः 180° इति भवति।

4. स्वीयाम् अभ्यासपुस्तिकायां कानिचित् मन्वताम् △ABC, △PQR तथा च △XYZ इति त्रीणि त्रिभुजानि आलिखन्तु। एतेषां सर्वेषां त्रिभुजानां प्रत्येकं कोणस्य मापम् एकेन कोणमापकेन मित्वा ज्ञायताम्।

एतान् मापान् तालिकारूपेण अनेन प्रकारेण लिखन्तु-

△ त्रिभुजस्य नाम	कोणानां परिमापाः	त्रयाणां कोणानां मापानां योगः
△ABC	m ∠A = m ∠B = m ∠C =	m ∠A + m ∠B + m ∠C =
△PQR	m ∠P = m ∠Q = m ∠R =	m ∠P + m ∠Q + m ∠R =
△XYZ	m ∠X = m ∠Y = m ∠Z =	m ∠X + m ∠Y + m ∠Z =

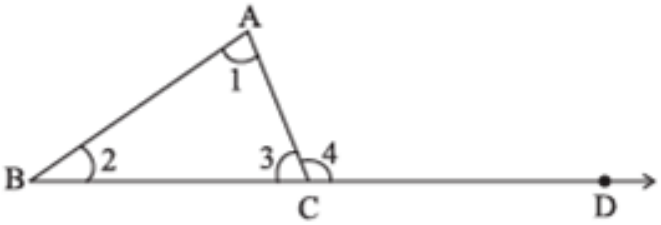
मापने सम्भाविताः त्रूटीः ध्यायन् भवन्तः प्राप्स्यन्ति यत् अन्तिमे स्मम्भे त्रयाणां कोणानां योगः 180° (अथवा प्रायशः 180°) एव अस्ति।

पूर्णतया शुद्धमापे सम्भवे सति वयम् एतद् एव प्राप्स्यामः यत् त्रिभुजस्य त्रयाणां कोण-परिमापानां योगः 180°इति भवति।

इदानीं भवन्तः स्वम् एतं निर्णयं तर्कपूर्णकथनैः चरणबद्धरूपेण प्रस्तोतुं शक्नुवन्ति।

कथनम् त्रिभुजस्य त्रयाणां कोण-परिमापानां योगः 180°इति भवति। एतत् तथ्यं प्रमाणीकर्तुं वयं त्रिभुजस्य बाह्यकोण-गुणस्य उपयोगं कुर्मः।

दत्तम् अस्ति : △ABC इति त्रिभुजस्य ∠1, ∠2 एवञ्च ∠3 इति त्रयाः कोणाः सन्ति (आकृतिः 6.17)।



आकृतिः 6.17

∠4 इति एकः बाह्यकोणः अस्ति यः $\overline{BC}$ इति भुजाम् D इति बिन्दुपर्यन्तं वर्धनेन उत्पन्नं भवति।

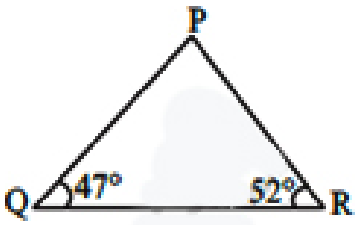
उपपत्तिः ∠1 + ∠2 = ∠4 (बाह्यकोणस्य गुणः)

∠1 + ∠2 + ∠3 = ∠4 + ∠3 (उभयस्मिन् पक्षे ∠3 इति योजनेन)

किन्तु ∠4 एवञ्च ∠3 इति रैखिकयुग्मं निर्मातः। अतः एतयोः योगः 180° इति अस्ति।

अर्थात् ∠1 + ∠2 + ∠3 = 180° इति।

आयान्तु सम्प्रति पश्यामः यत् त्रिभुजस्य एतं कोणगुणं विभिन्न-शङ्कानां समाधाने वयं कथं प्रयोक्तुं शक्नुमः?



आकृतिः 6.18

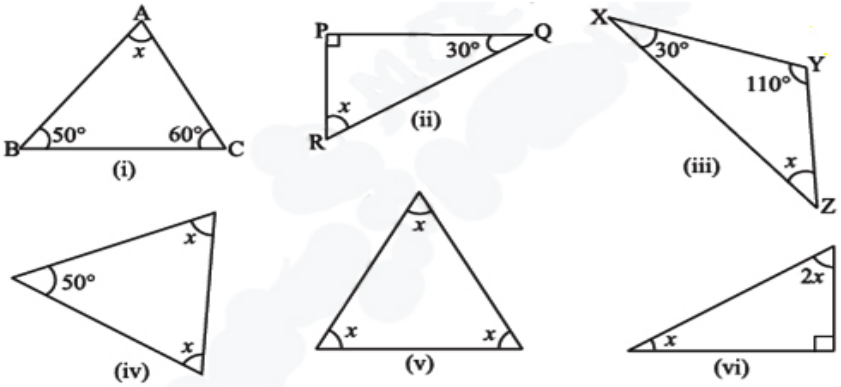
उदाहरणम् 2 6.18 इति प्रदत्ताकृत्याम् m ∠P इत्यस्य मापः ज्ञायताम्।

समाधानम् त्रिभुजस्य कोणानां योगगुणेन m ∠P + 47° + 52° = 180°

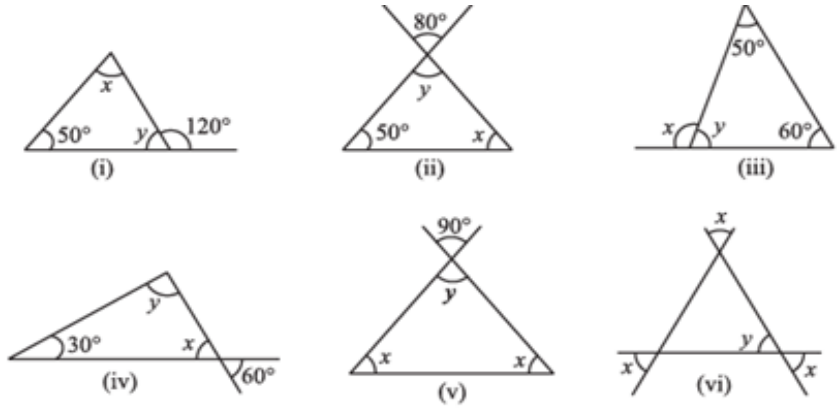
अतः m ∠P = 180° – 47° – 52°= 180° – 99° = 81°

प्रश्नावली 6.3

1. निम्नाङ्कितासु आकृतिषु x इत्यस्य मानः ज्ञायताम्।



2. निम्नाङ्कितासु आकृतिषु x तथा च y इत्यनयोः मानः ज्ञायताम्।



प्रयासं कुर्वन्तु

1. एकस्य त्रिभुजस्य द्वौ कोणौ 30° एवञ्च 80° इति स्तः। त्रिभुजस्य तृतीयकोणं ज्ञातकुर्वन्तु।
2. कस्यचित् त्रिभुजस्य एकः कोणः 80° इति अस्ति तथा च शेषकोणौ समानौ स्तः। समानकोणयोः प्रत्येकं कोणस्य मापं ज्ञातं कुर्वन्तु।
3. कस्यचित् त्रिभुजस्य त्रिषु कोणेषु अनुपातः 1:2:1 एवम् अस्ति। त्रिभुजस्य त्रयः कोणाः ज्ञातव्याः। त्रिभुजस्य द्विधा वर्गीकरणम् अपि कुर्वन्तु।

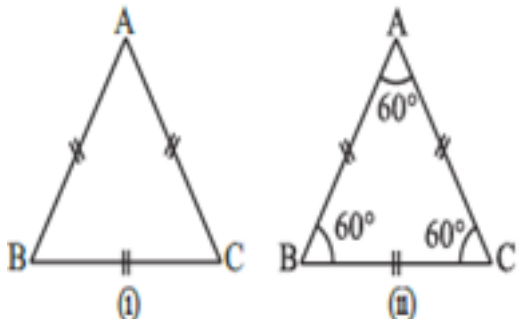
विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

1. किम् अपि एतादृशं त्रिभुजं सम्भवम् अस्ति यस्य द्वौ कोणौ समकोणौ भवताम् ?
2. किम् अपि एतादृशं त्रिभुजं सम्भवम् अस्ति यस्मिन् द्वौ कोणौ अधिककोणौ भवताम् ?
3. किम् अपि एतादृशं त्रिभुजं सम्भवम् अस्ति यस्मिन् द्वौ कोणौ न्यूनकोणौ भवताम् ?
4. किम् अपि एतादृशं त्रिभुजं सम्भवम् अस्ति यस्मिन् त्रयः कोणाः 60° इत्यस्माद् अधिकाः भवन्तु ?
5. किम् अपि एतादृशं त्रिभुजं सम्भवम् अस्ति यस्मिन् त्रयः कोणाः 60° इत्यस्य भवन्तु ?
6. किम् अपि एतादृशं त्रिभुजं सम्भवम् अस्ति यस्मिन् त्रयः कोणाः 60° इत्यस्य इत्यस्मात् न्यूनाः भवन्तु ?

6.6 द्वे विशेषत्रिभुजे - समबाहुः समद्विबाहुः च

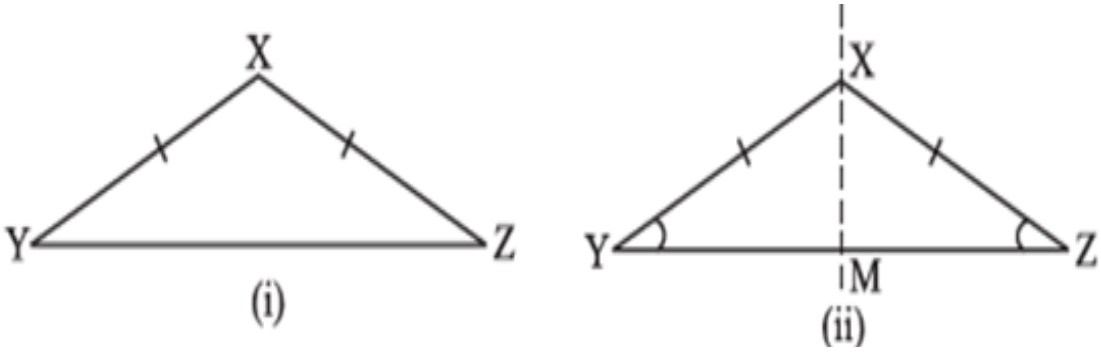
एकं त्रिभुजं यस्य तिसृणां भुजानां मापः समानः स्यात् समबाहु-त्रिभुजम् इति उच्यते।

एकम् ABC इति समबाहुत्रिभुजम् (आकृतिः 6.19) रचयन्तु। अस्य प्रतिरूपम् अर्थात् अस्यैव मापस्य एकम् अन्यं समबाहुत्रिभुजं कर्गदात् छिन्दन्तु। प्रथमं त्रिभुजं स्थिरीकुर्वन् अस्य उपरि द्वितीयत्रिभुजम् एतत् प्रथम- त्रिभुजम् आवृणन् स्थापयन्तु। द्वितीयत्रिभुजं प्रथमत्रिभुजं पूर्णतया आवृणोति। द्वितीयत्रिभुजं प्रथमत्रिभुजे केनापि प्रकारेण परिभ्राम्य स्थापयन्तु, ते त्रिभुजे पुनः अपि मिथः आवृणीतः। किं भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् यदि त्रिभुजस्य तिस्रः भुजाः समानाः स्युः तदा त्रयः कोणाः अपि समानमापाः एव भवन्ति। वयं निष्कर्षं निस्कासयामः यत् समबाहुत्रिभुजे (i) तिस्रः भुजाः समानमापाः भवन्ति। (ii) प्रत्येकं कोणस्य मापः 60° इति भवति।



आकृतिः 6.19

एकं त्रिभुजं यस्य द्वयोः भुजयोः मापः समानः स्यात् समद्विबाहु-त्रिभुजम् इति उच्यते।



आकृतिः 6.20

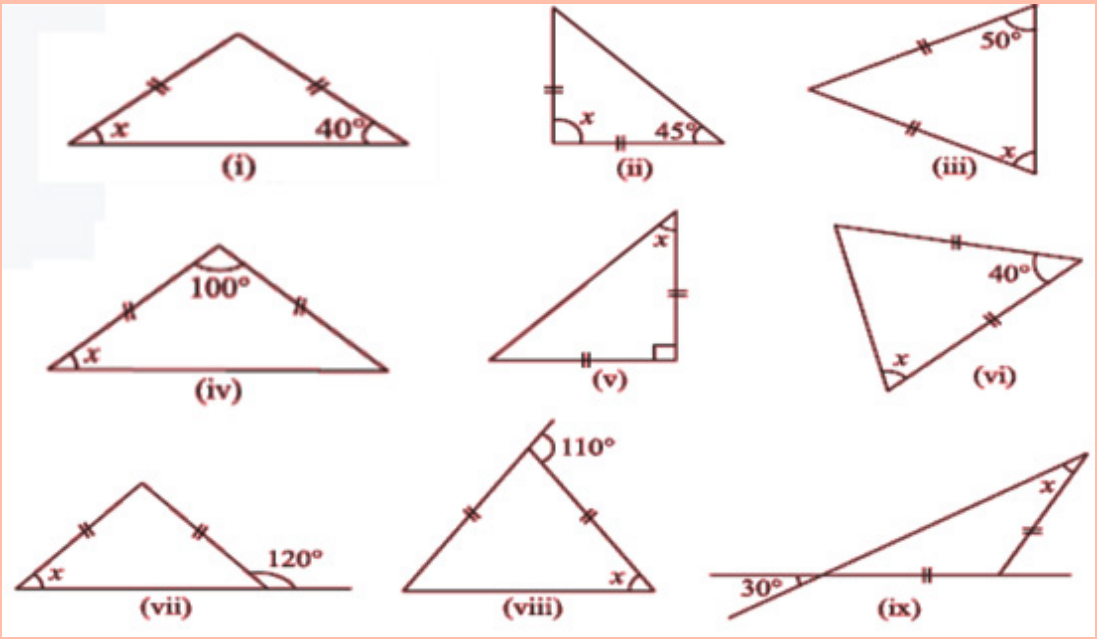
कर्गदखण्डेन एकम् XYZ इति समद्विबाहुत्रिभुजं छिन्दन्तु यस्मिन् भुजा XY= भुजा XZ स्यात् (आकृतिः 6.20)। एतत् तथा वक्रीकुर्वन्तु येन Z इति शीर्षं Y इति शीर्षे आच्छादितं भवेत्। अधुना X इति शीर्षाद् गम्यमाना XM इति रेखा अस्य त्रिभुजस्य सममिताक्षः अस्ति (यस्य विषये भवन्तः चतुर्दशेऽध्याये पठिष्यन्ति)। भवन्तः पश्यन्ति यत् ∠Y तथा च ∠Z इति इतरेतरं पूर्णतया आवृणीतः। XY एवञ्च XZ इति त्रिभुजस्य समभुजे इति कथ्येते। YZ इति आधारः कथ्यते, ∠Y एवञ्च ∠Z इति आधारकोणौ स्तः यौ परस्परं समानौ भवतः।

अनेन प्रकारेण वयं निष्कर्षं निस्कासयामः यत् समबाहुत्रिभुजे (i) द्वे भुजे समानदीर्घतायाः भवतः।

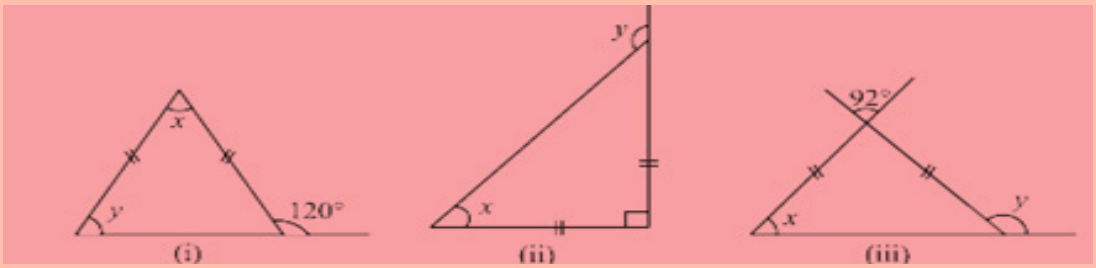
(ii) समान-भुजाभिमुखं कोणः समानः भवति।

प्रयासं कुर्वन्तु

1. प्रत्येकम् आकृत्याम् x इत्यस्य मानः ज्ञायताम्



2. प्रत्येकम् आकृत्याम् x एवञ्च y इत्यनयोः मानः ज्ञायताम्



6.7 एकस्य त्रिभुजस्य द्वयोः भुजयोः मापयोः योगः

1. स्वीये क्रीडाक्षेत्रे A, B तथा च C इति त्रीन् बिन्दून् अङ्कयन्तु ये एकस्यामेव रेखायां न भवेयुः। चूर्णकम् (चूना) आदाय AB, BC तथा च AC इति पथः निर्धारितं कुर्वन्तु।
स्वां काञ्चन मित्रं वदन्तु यत् सा निर्धारितपथां प्रयुज्य केनचित् प्रकारेण A इतः आरभ्य C इति पर्यन्तम् आगच्छेत्। उदाहरणार्थं सा सर्वप्रथमम् $\overline{AB}$ इत्यस्मिन् पथि तत्पश्चात् $\overline{BC}$ इत्यस्मिन् पथि चलित्वा अथवा C इत्यत्र आगच्छेत् अथवा $\overline{AC}$ इत्यस्मिन् पथि चलित्वा

आकृतिः 6.21

साक्षात् AC इत्यत्र आगच्छेत्। यदि सा कञ्चन अन्यपन्थानम् ($\overline{AB}$ तथा च $\overline{BC}$) स्वीकरिष्यति तदा तया अधिकं चलितव्यं भविष्यति।

अपरशब्दैः $AB + BC > AC$ (i)

अनेन प्रकारेण यदि सा B इत्यस्माद् आरभ्य A इत्यत्र प्राप्तुकामा अस्ति तदा सर्वप्रथमम् $\overline{BC}$ इति पन्थानं तत्पश्चात् $\overline{CA}$ इति पन्थानं नैव स्वीकरिष्यति प्रत्युत सा $\overline{BA}$ इति पन्थानं स्वीकृत्य साक्षात् B इत्यस्माद् A इत्यत्र आगमिष्यति।

एतत् एतदर्थम् यत् $BC + CA > AB$ (ii)

अनेन तर्केण वयं पश्यामः यत्

$CA + AB > BC$ (iii)

अनेन ज्ञायते यत् कस्यचित् त्रिभुजस्य द्वयोः भुजयोः मापयोः योगः तृतीय-भुजायाः मापाद् अधिकः भवति।

2. भिन्नं भिन्नं मापयुताः पञ्चदश लघु-श्लाकाः (अथवा पट्टिकाः) स्वीकुर्वन्तु। तासां परिमापाः मन्यन्ताम् 6 सेण्टीमीटर, 7 सेण्टीमीटर, 8 सेण्टीमीटर, 9 सेण्टीमीटर, ..., 20 सेण्टीमीटरपरिमिताः सन्ति।

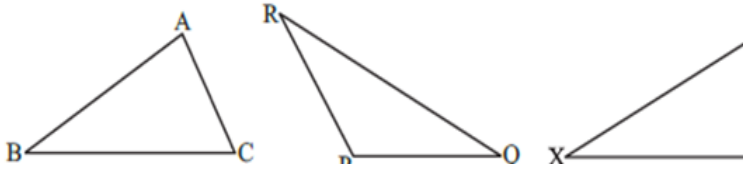
एतासु तिस्रः शलाकाः आदाय त्रिभुजं निर्मातुं प्रयतन्ताम्। तिस्रः तिस्रः श्लाकानां विभिन्नसमूहान् स्वीकृत्य एतां प्रक्रियां व्याहरन्तु।

मन्यन्तां सर्वप्रथमं भवन्तः 6 सेण्टीमीटरपरिमिताम् अथ च 12 सेण्टीमीटरपरिमितां दीर्घशलाकाद्वयं स्वीकुर्वन्ति। तृतीयशलाका $12 - 6 = 6$ सेण्टीमीटरपरिमिताद् अधिका दीर्घा किन्तु $12 + 6 = 18$ सेण्टीमीटरपरिमिताद् ह्रस्वा स्वीकरणीया भविष्यति। एतत् सर्वं कृत्वा पश्यन्तु ज्ञानं च कुर्वन्तु एतत् किमर्थम् अस्ति।

एकं त्रिभुजं निर्मातुं भवन्तः तिस्रः श्लाकाः अनेन प्रकारेणतथा चेष्यन्ति येन तासु कयोश्चिद् द्वयोः श्लाकयोः दीर्घतयोः योगः तृतीयशलाकायाः दैर्घ्याद् अधिकं स्यात्।

अनया प्रक्रियया एतत् ज्ञायते यत् एकस्य त्रिभुजस्य द्वयोः भुजयोः मापयोः योगः तृतीयभुजायाः मापाद् अधिकं भवति।

3. निज-अभ्यास-पुस्तिकायां कानिचित् त्रीणि त्रिभुजानि यथा △ABC, △PQR एवञ्च △XYZ इति निर्मान्तु (आकृतिः 6.22)।



(i) (ii) (iii)

आकृतिः 6.22

स्वकीयायाः मापिकायाः सहाय्येन एतेषां त्रिभुजानां भुजाः मित्वा एकेन तालिकारूपेण निम्नप्रकारेण लिखन्तु :

△त्रिभुजस्य नाम	भुजानां मापः	किम् एतत् सत्यम् अस्ति ?	
△ ABC	AB ___	AB – BC < CA ___ + ___ > ___	(आम् / न)
	BC ___	BC – CA < AB ___ + ___ > ___	(आम् / न)
	CA ___	CA – AB < BC ___ + ___ > ___	(आम् / न)

△ PQR	PQ___ QR ___ RP ___	PQ – QR < RP ___ + ___ > ___ QR – RP < PQ ___ + ___ > ___ RP – PQ < QR ___ + ___ > ___	(आम् / न) (आम् / न) (आम् / न)
△ XYZ	XY ___ YZ___ ZX ___	XY – YZ < ZX ___ + ___ > ___ YZ – ZX < XY ___ + ___ > ___ ZX – XY < YZ ___ + ___ > ___	(आम् / न) (आम् / न) (आम् / न)

अनया प्रक्रियया अस्माकं गतानुमानस्य पुष्टिः अपि भवति । अतः वयं निष्कर्षं निष्कास्यामः यद् एकस्य त्रिभुजस्य द्वयोः भुजयोः मापयोः योगः तृतीयभुजायाः मापाद् अधिकः भवति ।

युगपद् एतद् अपि ज्ञायते यत् एकस्य त्रिभुजस्य कयोश्चिद् द्वयोः भुजयोः मापयोः अन्तरं तृतीयभुजायाः मापात् न्यूनं भवति ।

उदाहरणम् 3 किम् एतादृशं त्रिभुजं सम्भवम् अस्ति यस्य भुजानां परिमापाः 10.2 सेण्टीमीटर्, 5.8 सेण्टीमीटर् तथा च 4.5 सेण्टीमीटरपरिमिताः भवेयुः?

समाधानम् मन्यन्तां यत् एतादृशं त्रिभुजं सम्भवम् अस्ति । तदानीम् अस्य त्रिभुजस्य कयोश्चिद् द्वयोः भुजयोः मापयोः योगः तृतीयभुजायाः मापाद् अधिकः भविष्यति । आयान्तु अवेक्षणं कृत्वा पश्याम -

किम् $4.5 + 5.8 > 10.2$? सत्यम् अस्ति ।

किम् $5.8 + 10.2 > 4.5$? सत्यम् अस्ति ।

किम् $10.2 + 4.5 > 5.8$? सत्यम् अस्ति ।

अतः एतादृशं भुजमत् त्रिभुजं सम्भवम् अस्ति ।

उदाहरणम् 4 एकस्य त्रिभुजस्य कयोश्चिद् द्वयोः भुजयोः मापः 6 सेण्टीमीटर् एवञ्च 8 सेण्टीमीटर् इति अस्ति । अस्य तृतीयभुजायाः मापः कयोश्चिद् द्वयोः सङ्ख्ययोः मध्ये भविष्यति ?

समाधानम् वयं जानीमः यत् त्रिभुजस्य कयोश्चिद् द्वयोः भुजयोः योगः तृतीयभुजातः अधिकः भवति । अतः तृतीयभुजा प्रदत्तयोः द्वयोः भुजयोः योगात् न्यूना स्यात् । अर्थात् तृतीयभुजा $8 + 6 = 14$ सेण्टीमीटरपरिमितात् न्यूना भविष्यति ।

एषा तृतीयभुजा प्रदत्तयोः द्वयोः भुजयोः अन्तराद् अधिका स्यात् । अर्थात् तृतीयभुजा $8 - 6 = 2$ सेण्टीमीटरपरिमिताद् अधिका भविष्यति ।

तृतीयभुजायाः मापः 2 सेण्टीमीटरपरिमिताद् अधिकः अथ च 14 सेण्टीमीटरपरिमितात् न्यूनः स्यात् ।

प्रश्नावली 6.4

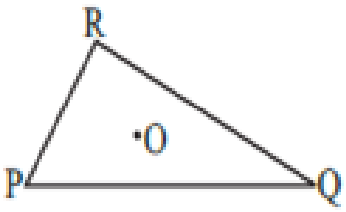
1. किं निम्न-प्रदत्तैः भुजमापैः किमपि त्रिभुजं सम्भवम् अस्ति ?

   (i) 2 सेण्टीमीटर् , 3 सेण्टीमीटर्, 5 सेण्टीमीटर्

(ii) 3 सेण्टीमीटर्, 6 सेण्टीमीटर्, 7 सेण्टीमीटर्

(iii) 6 सेण्टीमीटर्, 3 सेण्टीमीटर्, 2 सेण्टीमीटर्

2. PQR इति त्रिभुजस्य अभ्यन्तरम् O इति कञ्चन बिन्दुं स्वीकुर्वन्तु। किम् एतद् उचितम् अस्ति यत्

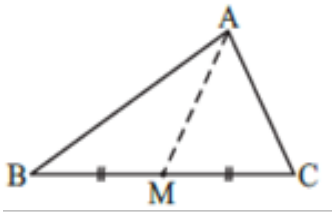


(i) OP + OQ > PQ?

(ii) OQ + OR > QR?

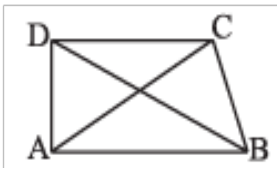
(iii) OR + OP > RP?

3. is a median of a triangle ABC इति त्रिभुजस्य एका माध्यमिका AM इति अस्ति। निर्दिशन्तु यत् किम् AB + BC + CA > 2 AM?



(सङ्केतः △ABM तथा च △AMC इत्यनयोः भुजासु विचारं कुर्वन्तु)

4. ABCD इति एकं चतुर्भुजम् अस्ति।



किम् AB + BC + CD + DA > AC + BD?

5. ABCD इति एकं चतुर्भुजम् अस्ति ।

किम् AB + BC + CD + DA < 2 (AC + BD)?

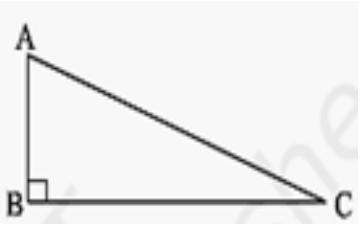
6. एकस्य त्रिभुजस्य द्वयोः भुजयोः मापः 12 सेण्टीमीटर् तथा च 15 सेण्टीमीटरपरिमितः अस्ति । अस्य तृतीयभुजायाः मापः कयोश्चित् द्वयोः मापयोः मध्ये स्यात् ?

विचारयन्तु चर्चयन्तु लिखन्तु च

1. कस्मिंश्चित् त्रिभुजे किं तस्य द्वयोः कोणयोः योगः तृतीयात् कोणात् सदैव अधिकः भवति ?

6.8 समकोणत्रिभुजं तथा च पायथागोरसगुणः

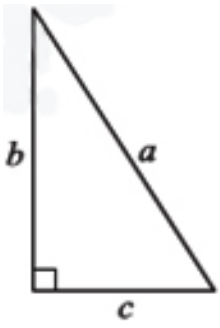
ईसापूर्वं षष्ठे शतके एकः यूनानी दार्शनिकः पायथागोरसः समकोणत्रिभुजेन सम्बन्धितम् एकं महत्त्वपूर्णगुणम् अजानात्, यं वयम् अस्मिन् अनुभागे बोधयन्तः स्मः। अतः अयं गुणः तस्यैव नाम्ना प्रथितः। वस्तुतः अस्य गुणस्य ज्ञानं केषाञ्चित् अन्यदेशानां जनानाम् अपि आसीत् । भारतीयः गणितज्ञः बौधायनः अपि अस्य गुण-समकक्षस्य एकस्य गुणस्य परिचयम् अददात् ।



आकृतिः 6.23

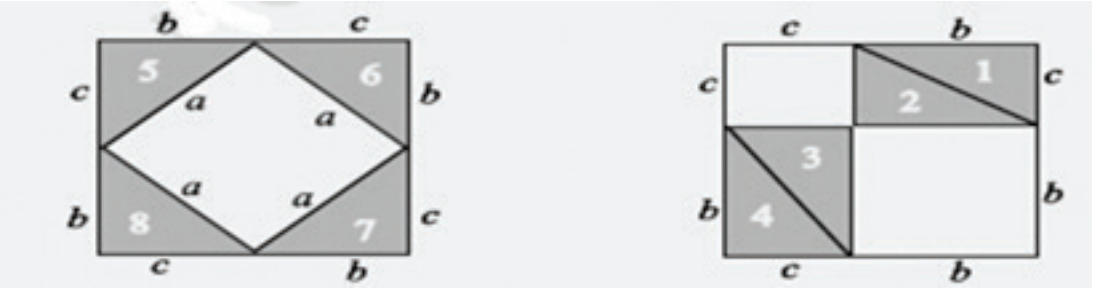
अधुना वयं पायथागोरसगुणस्य विस्तरेण अध्ययनं कुर्मः।

समकोणत्रिभुजे तस्य भुजानां कृते विशिष्टानि नामानि दीयन्ते। समकोणस्य अभिमुखं भुजां कर्णः इति कथ्यते। अन्ये द्वे भुजे समकोणत्रिभुजस्य पादः इति कथ्यते। △ABC इति त्रिभुजे (आकृतिः 6.23) B इति शीर्षे समकोणः निर्मितः अस्ति। अतः AC अस्य कर्णः अस्ति। $\overline{AB}$ तथा च $\overline{BC}$ इति △ABC समकोणत्रिभुजस्य द्वौ पादौ स्तः। कस्यचिद् अपि परिमापस्य एकं समकोणत्रिभुजं स्वीकृत्य तस्य अष्टौ प्रतिरूपाणि निर्मान्तु । उदाहरणार्थम् एकं समकोणत्रिभुजं स्वीकुर्मः यस्य कर्णस्य मापः a इति एककं तथा च तस्य द्वयोः पादयोः मापः b इति एककम् अथ च c इति



आकृतिः 6.24

एककम् अस्ति । (आकृतिः 6.24)। एकस्मिन् कर्गदे एकसमानौ परिमापवन्तौ वर्गौ निर्मान्तु यस्य भुजानां मापः b + c इत्यस्य तुल्यः भवेत् । इदानीं स्वस्य अष्टसु त्रिभुजेषु चत्वारि त्रिभुजानि A इत्यस्मिन् वर्गे अथ च चत्वारि त्रिभुजानि B इत्यस्मिन् वर्गे स्थापयन्तु यथा निम्नाकृत्यां दर्शितं वर्तते (आकृतिः 6.25)।



A वर्गः **आकृतिः 6.25** B वर्गः

भवन्तः जानन्ति यत् द्वौ वर्गौ एकरूपौ अर्थात् तुल्यौ स्तः तथा च न्यस्तानि अष्टौ त्रिभुजानि अपि तुल्यानि सन्ति।

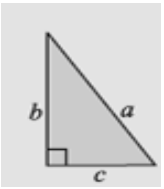
अतः A इत्यस्य अनाच्छादितं क्षेत्रफलम् = B इत्यस्य अनाच्छादितं क्षेत्रफलम्

अथवा A इति वर्गस्य अन्तस्थवर्गस्य क्षेत्रफलम् = B इति वर्गस्य अन्ते द्वयोः अनाच्छादितयोः वर्गयोः क्षेत्रफलस्य योगः अर्थात्

$$a^2 = b^2 + c^2$$

एषः पायथागोरसगुणः अस्ति । एतद् अनेन प्रकारेण अपि वक्तुं शक्यते –

> एकस्मिन् समकोणत्रिभुजे
> कर्णे निर्मितवर्गः = पादयोः निर्मितयोः द्वयोः वर्गयोः योगः

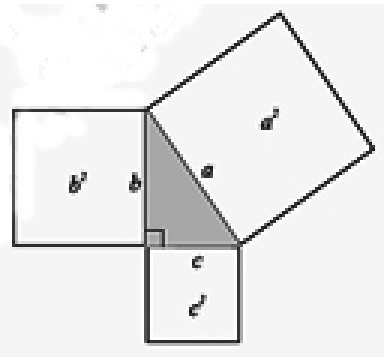


पायथागोरसगुणः गणिते एकः अतीव महत्त्वपूर्णगुणः अस्ति । अग्रिमासु कक्षासु एतद् एकेन साध्यरूपेण विधिपूर्वकम् अपि साधयिष्यामः । अधुना अस्य तात्पर्यं सम्यक्तया अधिगच्छामः।

एतदनुसारेण कस्मिंश्चित् समकोणत्रिभुजे कर्ण-निर्मितवर्गस्य क्षेत्रफलं पाद-निर्मितवर्गयोः क्षेत्रफलस्य योगस्य तुल्यं भवति ।

एकं वर्गाकारं कर्गदं स्वीकृत्य तस्य उपरि एकं समकोणत्रिभुजं निर्मान्तु । अस्य भुजासु वर्गाणां क्षेत्रफलं ज्ञायताम् अस्य च साध्यस्य व्यवहारिकरूपेण अवेक्षणं क्रियताम् (आकृतिः 6.26) । यदि किमपि त्रिभुजं समकोणत्रिभुजम् अस्ति तर्हि तस्मिन् पायथागोरसगुणः प्रयुक्तः भवति । अधुना यदि कस्मिंश्चित् समकोणत्रिभुजे पायथागोरसगुणः सत्यम् अस्ति तदा किम् एतद् एकं समकोणत्रिभुजं भविष्यति ?

(वयम् एतादृशीः समस्याः विलोमी-समस्याः इति कथयामः) वयम् अस्य प्रश्नस्य उत्तरं दातुं प्रयतिष्यामहे । सम्प्रति वयं दर्शयिष्यामः यत् यदि कस्मिंश्चित् त्रिभुजे कयोश्चित् द्वयोः भुजयोः वर्गयोगः तृतीयायाः भुजायाः वर्गस्य तुल्यः अस्ति तदा तत् त्रिभुजं समकोणत्रिभुजं भवेत् ।



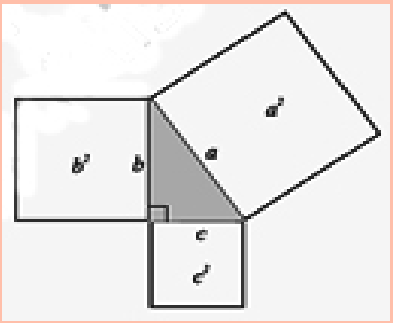
आकृतिः 6.26

एतान् कुर्वन्तु

1. 4 सेण्टीमीटर्, 5 सेण्टीमीटर् तथा च 6 सेण्टीमीटरपरिमितान् भुजमतः त्रीन् वर्गान् कर्गदात् छिन्दन्तु । एतेषां त्रयाणां वर्गाणां त्रीणि शीर्षाणि मेलयन्तः तथा व्यवस्थीकृत्य निदधन्तु येन तेषां भुजाभिः एकं त्रिभुजं प्राप्तं भवेत् (आकृतिः 6.27)। अनेन प्रकारेण प्राप्त-त्रिभुजं कर्गदे अङ्कीकुर्वन्तु ।

अस्य त्रिभुजस्य त्रीन् कोणान् मान्तु । भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् एतेषु कश्चन अपि समकोणः नास्ति । ध्यानं यच्छन्तु यत् $4^2 + 5^2 \neq 6^2$, $5^2 + 6^2 \neq 4^2$ तथा च $6^2 + 4^2 \neq 5^2$

2. उपयुक्तां प्रक्रियाम् 4 सेण्टीमीटर्, 5 सेण्टीमीटर् तथा च 7 सेण्टीमीटरपरिमितान् भुजमतः त्रीन् वर्गान् आदाय पुनः आचरन्तु । अस्मिन् पर्याये भवन्तः एकम् अधिककोणत्रिभुजम प्राप्स्यन्ति । अत्र ध्यानं यच्छन्तु यत् $4^2 + 5^2 \neq 7^2$ इत्यादिः।



आकृतिः 6.27

अनया प्रक्रियया ज्ञायते यत् पायथागोरसगुणः केवलं तदैव प्रयुज्यते यदा त्रिभुजम् एकं समकोणत्रिभुजं भविष्यति ।

अतः अस्माभिः एतत् तथ्यं प्राप्यते ।

यदि कस्मिंश्चित् त्रिभुजे पायथागोरसगुणं तदा एव प्रयोक्तुं शक्नुमः यदा तत् समकोणत्रिभुजं भविष्यति ।

उदाहरणम् 5 एकस्य त्रिभुजस्य भुजाः 3 सेण्टीमीटर्, 4 सेण्टीमीटर् तथा च 5 सेण्टीमीटरपरिमिताः दीर्घाः सन्ति । किं तत् एकं समकोणत्रिभुजम् अस्ति इति निर्धारितं कुर्वन्तु ?

समाधानम् $3^2 = 3 \times 3 = 9$, $4^2 = 4 \times 4 = 16$, $5^2 = 5 \times 5 = 25$

वयं पश्यामः यत् $3^2 + 4^2 = 5^2$

अतः एतत् त्रिभुजम् एकं समकोणत्रिभुजम् अस्ति ।

ध्यानं यच्छन्तु - कस्मिंश्चित् समकोणत्रिभुजे कर्णः दीर्घतमा भुजा भवति । अस्मिन् उदाहरणे 5 सेण्टीमीटरपरिमिता दीर्घा भुजा एव कर्णः अस्ति ।

उदाहरणम् 6 △ ABC इति त्रिभुजस्य C इति समकोणः अस्ति । यदि AC = 5 सेण्टीमीटरपरिमिता तथा च BC = 12 सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति तदा AB इति भुजायाः दैर्घ्यं ज्ञातं कुर्वन्तु ।

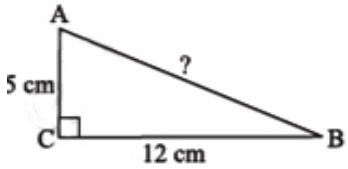
समाधानम् सहायातार्थम् अनुमानेन एकाम् उपयुक्ताम् आकृतिं रचयामः । (आकृतिः 6.28)

पायथागोरसगुणेन

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$

$AB^2 = 13^2$ अतः AB = 13 इति अस्ति ।

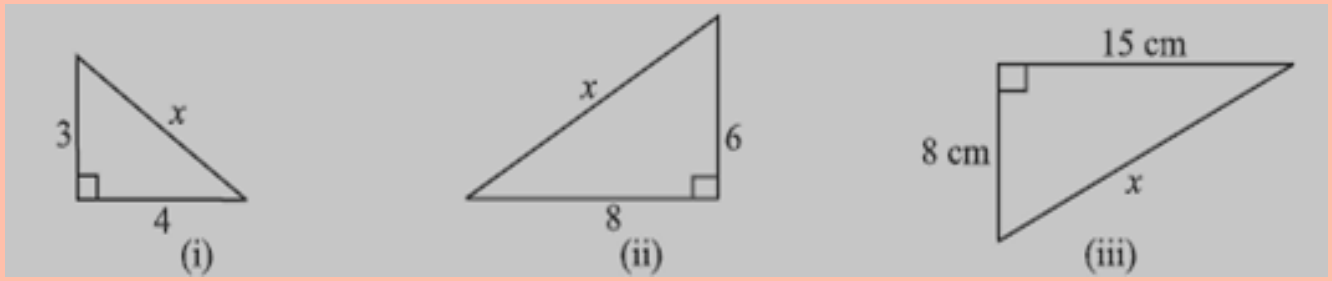


आकृतिः 6.28

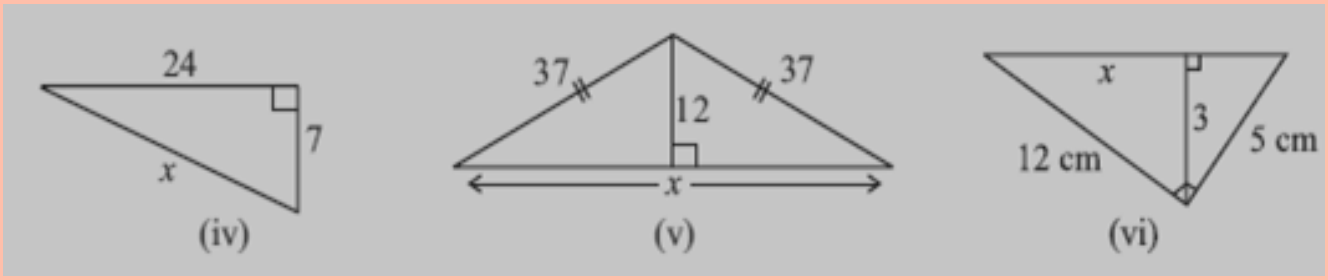
अर्थात् AB इत्यस्याः भुजायाः दैर्घ्यं 13 सेण्टीमीटरपरिमितम् अस्ति ।

ध्यानं यच्छन्तु - भवन्तः पूर्णवर्ग-सङ्ख्याः प्रतिसंवेत्तुम् अभाज्य-गुणनखण्ड-विधिं प्रयोगे आनेतुं शक्नुवन्ति।

एतान् कुर्वन्तु



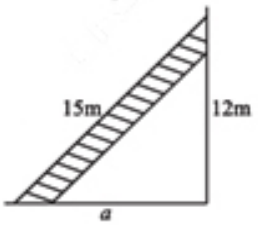
एतान् कुर्वन्तु



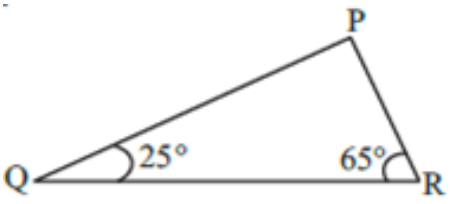
आकृतिः 6.29

प्रश्नावली 6.5

1. PQR इति एकं त्रिभुजम् अस्ति यस्य P इति समकोणः अस्ति। यदि PQ = 10 सेण्टीमीटरपरिमितं तथा च PR = 24 इति सेण्टीमीटरपरिमितं भवेत् तदानीं QR इति ज्ञायताम्।
2. ABC इति एकं त्रिभुजम् अस्ति यस्य C इति समकोणः अस्ति। यदि AB = पञ्चविंशतिः (25) सेण्टीमीटरपरिमितं तथा च AC = 7 इति सेण्टीमीटरपरिमितं भवेत् तदा BC इति ज्ञायताम्।
3. भित्तिम् अवलम्ब्य पञ्चदशमीटरपरिमितम् (15) लम्बायमानम् एकस्य सोपानस्य पादौ किञ्चिद् दूरे संस्थाप्य भूमितः द्वादशमीटरपरिमितं (12) उच्चैः स्थितं वातायनपर्यन्तं प्राप्नोति। भित्तितः सोपान-पादयोः दैर्घ्यं ज्ञायताम्।
4. निम्नलिखितेषु भुजानां कतमाः समूहाः एकं त्रिभुजं निर्मान्तुं शक्नुवन्ति ?
   (i) 2.5 सेण्टीमीटर्, 6.5 सेण्टीमीटर्, 6 सेण्टीमीटर्
   (ii) 2 सेण्टीमीटर्, 2 सेण्टीमीटर्, 5 सेण्टीमीटर्
   (iii) 1.5 सेण्टीमीटर्, 2सेण्टीमीटर्, 2.5 सेण्टीमीटर्
   समकोणत्रिभुजे सति तस्य समकोणम् अपि परिचिन्वन्तु।



5. एकः वृक्षः भूमितः पञ्चमीटरपरिमितात् (5) उपरिष्टात् त्रुटति वृक्षस्य च शिरस्भागः भूमिं तस्य आधाराद् द्वादशमीटरपरिमितं (12) दूरं स्पृशति। वृक्षस्य औन्नत्यं ज्ञायताम्।
6. △PQR इत्यस्मिन् त्रिभुजे Q इति कोणः 25° तथा च R इति कोणः 65° स्तः निम्नलिखितेषु कतमत् कथनं सत्यम् अस्ति ?
   (i) $PQ^2 + QR^2 = RP^2$
   (ii) $PQ^2 + RP^2 = QR^2$
   (iii) $RP^2 + QR^2 = PQ^2$



7. एकस्य आयतस्य दीर्घता चत्वारिंशत्सेण्टीमीटरपरिमिता (40) वर्तते तस्य च विकर्णः एकचत्वारिंशत्सेण्टीमीटरपरिमितः (41) वर्तते। अस्य परिमापः ज्ञातं कुरूत।
8. एकस्य समचतुर्भुजस्य विकर्णौ षोडशसेण्टीमीटरपरिमितः (16) तथा च त्रिंशत्सेण्टीमीटर्-परिमितः (30) स्तः। अस्य परिमापः ज्ञातं कुरूत।

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

1. PQR इति त्रिभुजे P इति एकः समकोणः अस्ति। अस्य दीर्घतमा भुजा कतमा अस्ति ?
2. ABC इति त्रिभुजस्य B इति एकः समकोणः अस्ति। अस्य दीर्घतमा भुजा कतमा अस्ति ?
3. कस्यचित् समकोणत्रिभुजस्य दीर्घतमा भुजा कतमा भवति ?
4. कस्मिंश्चिद् आयते विकर्णे निर्मित-वर्गस्य क्षेत्रफलं तस्य दैर्घ्ये विस्तृत्यां च निर्मित-वर्गाणां क्षेत्रफलस्य योगस्य समानं भवति। एतद् बौधायनप्रमेयम् अस्ति। अस्य पायथागोरसगुणेन तुलनां कुर्वन्तु।

एतान् कुर्वन्तु

ज्ञानवर्धकः क्रियाकलापः

आकृतीः संयोज्य अथवा त्रोटयित्वा पायथागोरससाध्यं अनेकविधिभिः साधितम्। एषु विधिषु कतिचन एकत्रीकृत्य ताः एकं कोष्ठकं कृत्वा प्रस्तुवन्तु।

अस्माभिः का चर्चा कृता ?

1. एकस्य त्रिभुजस्य **तिस्रः भुजाः** त्रयः च **कोणाः** अस्य **षड् अवयवयाः** इति कथ्यन्ते।
2. कस्यचित् त्रिभुजस्य एकं शीर्षं तस्य च अभिमुखं भुजायाः मध्यबिन्दुना मेल्यमानं रेखाखण्डं तस्य एका **माध्यिका** इति भवति। एकस्मिन् त्रिभुजे तिस्रः माध्यमिकाः भवन्ति।
3. कस्यचित् त्रिभुजस्य एकस्मात् शीर्षात् तस्य सम्मुख-भुजायाम् आलिखितं लम्बं त्रिभुजस्य एकः शीर्षलम्बः इति कथ्यते। एकस्मिन् त्रिभुजे त्रयः शीर्षलम्बाः भवन्ति।
4. कस्यचित् त्रिभुजस्य **बाह्यकोणः** काञ्चिद् एकां भुजाम् एकामेव दिशां प्रति वर्धनेन निर्मितं भवति।
5. बाह्यकोणस्य एकः गुणः त्रिभुजस्य बाह्यकोणस्य परिमापः,तस्य द्वयोः सम्मुखान्तःकोणयोः योगस्य समानः भवति।
6. त्रिभुजस्य कोणानां योग-गुणः एकस्य त्रिभुजस्य त्रयाणां कोणानां योगः अशीत्युत्तरैकशतडिग्रीपरिमितः(180°) इति भवति।
7. एकं त्रिभुजं यस्य प्रत्येकं भुजायाः मापः समानः भवेत् **समबाहुत्रिभुजम्** इति कथ्यते। समबाहुत्रिभुजस्य प्रत्येकं कोणः षष्ठीडिग्रीपरिमितः (60°) भवति।
8. एकं त्रिभुजं यस्य केचित् द्वे भुजे परिमापे समाने भवेतां **समद्विबाहुत्रिभुजम्** इति कथ्यते। समद्विबाहुत्रिभुजस्य असमाना भुजा तस्य आधारः इति कथ्यते तथा च आधारे निर्मितौ कोणौ परस्परं समानौ भवतः।
9. त्रिभुजस्य भुजानां सम्बद्धगुणाः -
   त्रिभुजस्य कयोश्चित् द्वयोः भुजयोः मापयोः योगः तृतीयायाः भुजायाः मापनात् अधिकः भवति।
   त्रिभुजस्य कयोश्चित् द्वयोः भुजयोः मापयोः अन्तरं तृतीयभुजायाः मापनात् न्यूनं भवति। एतौ गुणौ कस्यचित् त्रिभुजस्य रचनायाः सम्भावनाकथने उपयोगिनौ भवतः अपरन्तु तस्य तिसृणां भुजानां परिमापाः दत्ताः स्युः।
10. समकोणत्रिभुजे समकोणाभिमुखं भुजा **कर्णः** तथा च अन्ये द्वे भुजे तस्य **पादौ** इति कथ्यते।

11. पायथागोरसगुणः

एकस्मिन् समकोणत्रिभुजे कर्णस्य वर्गः = तस्य द्वयोः पादयोः वर्गयोः योगः।

यदि एकं त्रिभुजं समकोणत्रिभुजं नास्ति तदा एषः पायथागोरसगुणः नैव प्रयुज्यते। एषः गुणः एतत् तथ्यं निर्धारीकर्तुम् उपयोगी भवति यत् किमपि प्रदत्तं त्रिभुजं समकोणत्रिभुजम् अस्ति अथवा नास्ति।

त्रिभुजानां सर्वाङ्गसमता

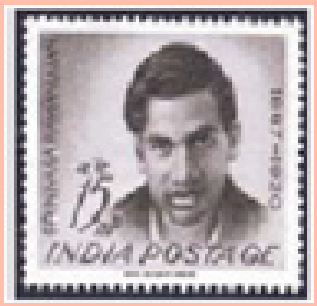
अध्यायः 7

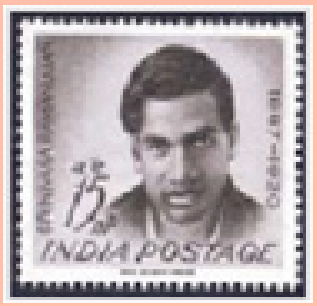
7.1 भूमिका

अधुना भवन्तः अतीव महत्त्वपूर्णां ज्यामितसङ्कल्पनां 'सर्वाङ्गसमताम्'अधिगम्यमानाः सन्ति। विशेषतया, भवन्तः त्रिभुजानां सर्वाङ्गसमतायाः विषये बहु किमपि पठिष्यन्ति। सर्वाङ्गसमताम् अधिगन्तुं, वयं काश्चन क्रियाः करिष्यामः।

एतान् कुर्वन्तु

एकप्रकारस्य (denomination) चिटिकाद्वयं स्वीकुर्वन्तु (आकृतिः 7.1)। एकां चिटिकाम् अपर चिट्टिकायाः उपरि स्थापयन्तु। भवन्तः किं पश्यन्ति ?



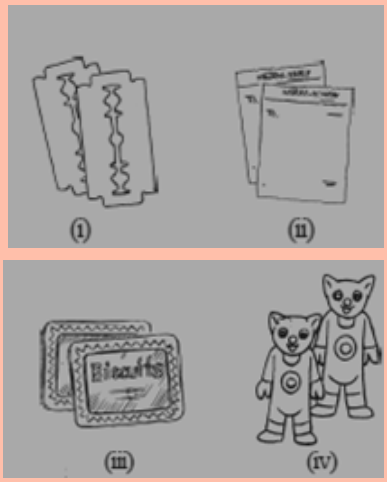


आकृतिः 7.1

एका चिटिका अपरचिटिकां पूर्णतया आवृणोति । अस्य अर्थोऽस्ति यत् चिटिकाद्वयं एकस्य एव आकारस्य एकस्य च एव मापस्य अस्ति। एतादृशानि वस्तूनि 'सर्वाङ्गसमम्' इति कथ्यते। भवद्भिः प्रयुक्ता चिटिकाद्वयं परस्परं सर्वाङ्गसमं वर्तते। सर्वाङ्गसमवस्तूनि अन्योन्यं शतप्रतिशतं प्रतिलिपयः भवन्ति।

किम् अधुना भवन्तु वक्तुं शक्नुन्ति यत् निम्नवस्तूनि सर्वाङ्गसमानि सन्ति अथवा न ?

1. एकस्योद्योगस्य क्षुरपत्रम् [(आकृतिः 7.2 (i))]
2. एकस्य पत्रपुस्तकस्य (लेटर पैड) पृष्ठानि [आकृतिः7.2 (ii)]
3. एकस्यैव (पैकिट) सुपिष्टकानि [आकृतिः 7.2 (iii)]
4. एकस्यैव (साँचा) उपकरेणविशेषेण [आकृतिः 7.2 (iv)]

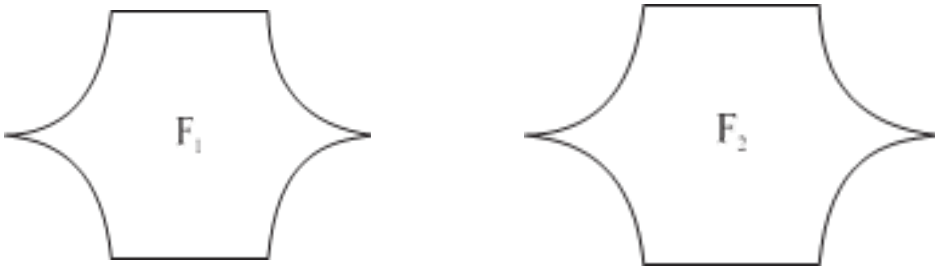


आकृतिः 7.2

द्वयोः वस्तुनोः सर्वाङ्गसमस्य प्रक्रिया-सम्बन्धं 'सर्वाङ्गसमता' इति कथ्यते। अस्मिन् अध्याये, वयं केवलं तले (आधारे) निर्मितानाम् आकृतीनां विषये एव चर्चयिष्यामः यद्यपि सर्वाङ्गसमतायाः एकः साधारणः विषयः अस्ति यस्य उपयोगं वयं त्रि-आयामिभ्यः (3-Dimensional) आकारेभ्यः अपि कुर्मः इदानीं वयं तले निर्मितानाम् एतादृशीनाम् आकृतीनां सर्वाङ्गसमतायाः विधिपूर्वकम् अर्थं ज्ञातुं प्रयतिष्यामहे याः आकृतीः वयं पूर्वतः जानीमः।

7.2 तलाकृतीनां सर्वाङ्गसमता

अत्र आकृतिद्वयं पश्यामः (आकृतिः 7.3)। किम् एतत् आकृतिद्वयं सर्वाङ्गसमम् अस्ति ?



(i) (ii)

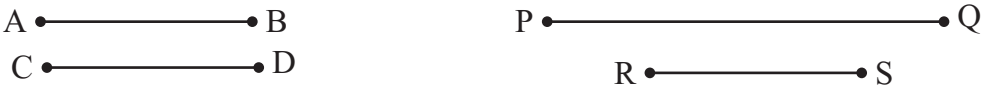
आकृतिः 7.3

भवन्तः अध्यारोपणविधेः प्रयोगं कर्तुम् अर्हन्ति। एतयोः मध्ये एकस्याः आकृतेः प्रतिलिपिं (trace-copy) रचयित्वा अपरस्याम् आकृत्याम् स्थापयन्ति। यदि एते आकृत्यौ अन्योन्यं पूर्णतया आवृणुतः तदा ते सर्वाङ्गसमम् इति कथ्यते। द्वितीयप्रकारेण, भवन्तः एतयोः मध्ये एकाम् आकृतिं कर्तयित्वा तां द्वितीयाम् आकृत्यां स्थापयितुं शक्नुवन्ति। किन्तु सावधानम् ! याम् आकृतिं भवन्तः कर्तितवन्तः (अथवा प्रतिलिपिं निर्मितवन्तः) तस्याः मोटनस्य आस्तरणस्य च स्वतन्त्रता भवतां कृते नास्ति।

7.3 आकृतिः मध्ये,यदि आकृतिः F1, F2 आकृतेः सर्वाङ्गसमम् अस्ति तदा वयं लिखिष्यामः F1 = F2

7.3 रेखाखण्डेषु सर्वाङ्गसमता

द्वौ रेखाखण्डौ कदा सर्वाङ्गसमौ भवतः ? अधः दत्तं रेखाखण्डयोः युग्मद्वयं पश्यन्तु



(ii) (ii)

आकृतिः 7.4

प्रत्येकं रेखाखण्डयुग्मस्य प्रतिलिपिं निर्माय अध्यारोपणविधेः प्रयोगं कुर्वन्तु। आकृतिः7.4(i) $\overline{CD}$ इत्यस्य प्रतिलिपिं रचयित्वा एतं $\overline{AB}$ इत्यस्य उपरि स्थापयन्तु। भवन्तः पश्यन्ति यत् $\overline{CD}$ इति $\overline{AB}$ इत्येतं पूर्णतया आवृणोति तथा C,A इत्यस्य उपरि D.B इत्यस्य उपरि स्थितः अस्ति। अतः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् द्वौ रेखाखण्डौ सर्वाङ्समौ स्तः वयं च लेखिष्यामः $\overline{AB} \cong \overline{CD}$।

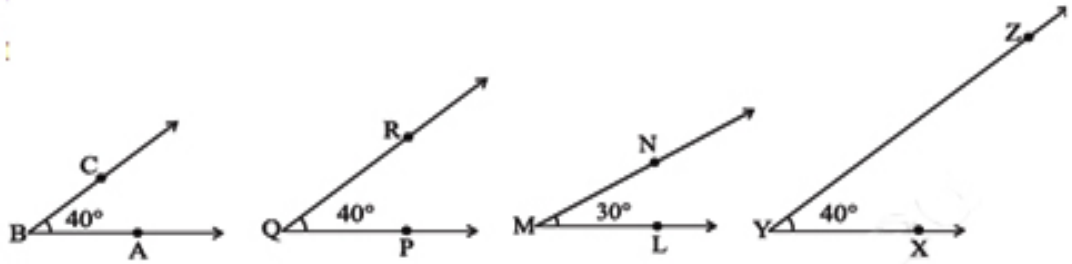
7.4 (ii) आकृतेः रेखाखण्डयुग्माय एतं क्रियाकलापं वारं वारं व्याहरन्तु। किं भवन्तः पश्यन्ति ? एतौ रेखाखण्डौ सर्वाङ्गसमौ न स्तः। एतत् कथं भवन्तः ज्ञातवन्तः ? यतोहि यदा एकः रेखाखण्डः द्वितीयस्य उपरि स्थाप्यते तदा तौ अन्योन्यं पूर्णतया न आवृणुतः। आकृतिः 7.4 (i) मध्ये भवद्भिः दृष्टं स्यात् यत् रेखाखण्डयुग्मस्य अन्योन्येन सह सुमेलनम् (matching) भवति यतोहि तयोः रेखाखण्डयोः दीर्घता समाना वर्तते किन्तु 7.4 (ii) आकृत्याम् एतादृशी स्थितिः नास्ति।

यदि द्वयोः रेखाखण्डयोः दीर्घता समाना (अर्थात् तुल्या) वर्तते तदा तौ सर्वाङ्गसमौ स्तः। यदि तौ रेखाखण्डौ सर्वाङ्गसमौ स्तः तदा तयोः दीर्घता समाना भवति।

उपरि प्रदत्तं तथ्यम् अवधाने निवेशयन्तः, यदा द्वौ रेखाखण्डौ सर्वाङ्गसमौ भवतः तदा वयं वदामः यत् रेखाखण्डौ तुल्यौ समानौ वा स्तः, वयं च लिखामः AB = CD। (वस्तुतः अस्माकम् अर्थः अस्ति यत् $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ।

7.4 कोणानां सर्वाङ्गसमता

अत्र दत्तान् चतुरः कोणान् पश्यन्तु (आकृतिः 7.5)



(i) (ii) (iii) (iv)

आकृतिः 7.5

∠PQR इत्यस्य प्रतिलिपिं (अक्स) रचयन्तु एतेन च ∠ABC इत्येतम् (आवृणोतुम्) आवर्तुं वा प्रयतन्ताम्। एतदर्थं सर्वप्रथमं Q इति B इत्यस्य उपरि $\overrightarrow{QP}$ इत्येतं च $\overrightarrow{BA}$ इत्यस्य उपरि स्थापयन्तु । $\overrightarrow{QR}$ कुत्र आगमिष्यति । एषः $\overrightarrow{BC}$ इत्यस्य उपरि भविष्यति।

अनेन प्रकारेण ∠PQR इत्यस्य सुमेलनम् ∠ABC इत्यनेन भवति।

अस्मिन् सुमेलने ∠ABC तथा च ∠PQR सर्वाङ्गसमौ स्तः।

(ध्यानं यच्छन्तु यत् एतयोः सर्माङ्गसमयोः कोणयोः मापः(मापनम्) समानः अस्ति।)

वयं लिखामः $\angle ABC \approx \angle PQR$ (i)

अथवा $m\angle ABC = m\angle PQR$ (अस्यां स्थित्यां परिमाणः 40°विद्यते)

इदानीं भवन्तः ∠LMN इत्यस्य प्रतिलिपिं निर्मान्तु ∠ABC इत्यस्य उपरि स्थापयनतु। M इत्येतं B इत्यस्य उपरि तथा च $\overrightarrow{ML}$ इति $\overrightarrow{BA}$ इत्यस्य उपरि स्थापयन्तु । किं $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BC}$ अस्य उपरि आयाति ? न, अस्यां स्थितौ एवं नास्ति । भवन्तः अपश्यन् यत् ∠ABC एवञ्च ∠LMN परस्परं पूर्णतया न आवृणुतः। अतः एतौ सर्वाङ्गसमौ न स्तः।

(ध्यानं यच्छन्तु ∠ABC तथा च ∠LMN एतयोः परिमाणः समानः नास्ति)

∠XYZ तथा च ∠ABC अस्मिन् विषये भवन्तः किं कथयिष्यन्ति आकृतिः 7.5 (iv) मध्ये किरण $\overrightarrow{YX}$ तथा च $\overrightarrow{YZ}$ क्रमशः किरणः $\overrightarrow{BA}$ तथा च $\overrightarrow{BC}$ अस्मात् दीर्घा प्रतीयते । अस्य आधारेण भवन्तः विचारयितुं शक्नुवन्ति यत् ∠ABC, ∠XYZ अस्मात् लघुः वर्तते । परञ्च स्मरन्तु यत् आकृत्यां किरणः केवलं दिशामेव प्रदर्शयति न तु दीर्घताम् । भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् उभौ कोणौ अपि सर्वाङ्गसमौ स्तः।

वयं लिखामः $\angle ABC \cong \angle XYZ$ (ii)

अथवा $m\angle ABC = m\angle XYZ$

(i) तथा च (ii) इति अवधाने निवेशयन्तः, वयम् एदपि लिखितुं शक्नुमः

$$\angle ABC \cong \angle PQR \cong \angle XYZ$$

यदि द्वयोः कोणयोः परिमाणः समानः भवेत् तदा तौ सर्वाङ्गसमौ भवतः। यदि कोणौ सर्वाङ्गसमौ स्तः तदा तयोः परिमाणः अपि समानः भवति । कोणानां सर्वाङ्गसमता पूर्णतया तेषां समानतायाः उपरि आश्रीयते यथा हि रेखाखण्डानां स्थितेः विषये उक्तम् आसीत् । अनेन प्रकारेण, एषा उक्तिः यत् द्वौ कोणौ सर्वाङ्गसमौ

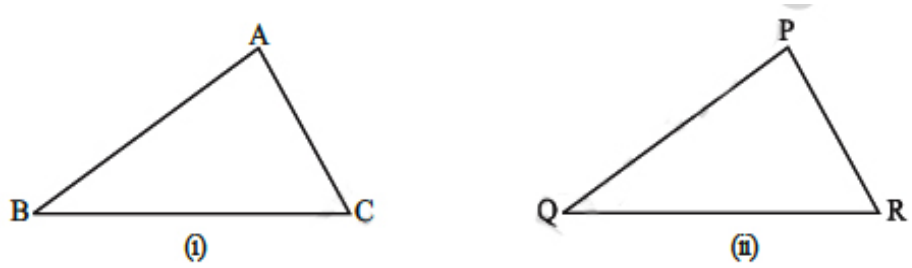
स्तः, वयं बहुधा केवलम् एतदेव कथयामः यत् कोणाः समानाः सन्ति, वयं च लिखामः

$\angle ABC = \angle PQR$ (अर्थात् $\angle ABC \cong \angle PQR$)

7.5 त्रिभुजानां सर्वाङ्गसमता

अस्माभिः दृष्टं यत् रेखाखण्डौ सर्वाङ्गसमौ भवतः यदा तयोर्मध्ये एकः अपरस्य प्रतिलिपिः भवेत्। अनेन प्रकारेण, द्वौ कोणौ सर्वाङ्गसमौ भवतः यदि तयोः मध्ये एकः द्वितीयस्य प्रतिलिपिः स्यात्। वयम् एतां सङ्कल्पनाम् अधुना त्रिभुजेभ्यः अपि पश्यामः।

द्वे त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे भवतः यदि तौ परस्परं प्रतिलिप्यौ स्तः एकं च अपरस्य उपरि स्थापनेन, तौ अन्योन्यं पूर्णतया आवृणुतः।



आकृतिः 7.6

ΔABC तथा च ΔPQR समानाकारौ समानपरिमाणौ च विद्येते। एतौ सर्वाङ्गसमौ स्तः। अतः एतौ निम्नप्रकारेण दर्शयिष्यामः

$\Delta ABC \approx \Delta PQR$

अस्य अयम् अर्थः अस्ति यत् यदि भवन्तः ΔPQR इति ΔABC अस्य उपरि स्थापयन्ति, तदा P इति A अस्य उपरि Q, इति B इत्यस्य उपरि तथा च R इति C इत्यस्य उपरि आयाति। इत्थमेव $\overline{PQ}$, $\overline{AB}$ अस्य अनुदिशि, $\overline{QR}$, $\overline{BC}$ अस्य अनुदिशि एवञ्च $\overline{PR}$, $\overline{AC}$ अस्य अनुदिशि आयान्ति। यदि प्रदत्ते सुमेलनमध्ये (correspondence) द्वौ त्रिभुजौ सर्वाङ्गसमौ स्तः तु तयोः संगतभागाः (अर्थात् कोणाः भुजाः च) समानाः जायन्ते। अतः एतयोः सर्वाङ्गसमत्रिभुजयोः,अस्माभिः प्राप्यते :

संगतानि शीर्षाणि A तथा च P, B तथा च Q, C तथा च R.

संगताः भुजाः $\overline{AB}$ एवञ्च $\overline{PQ}$, $\overline{BC}$ तथा च $\overline{QR}$, $\overline{AC}$ एवञ्च $\overline{PR}$.

संगता: कोणाः $\angle A$ एवञ्च $\angle P$, $\angle B$ एवञ्च $\angle Q$, $\angle C$ एवञ्च $\angle R$.

यदि भवन्तः ΔPQR इति ΔABC अस्य उपरि तथा आरोपयन्ति यत् P, B इत्यस्य उपरि आगच्छेत् तदा किम् अपरशीर्षाणि अपि यथायोग्यं सुमेलितानि भविष्यन्ति? एतत् आवश्यकं नास्ति? भवन्तः त्रिभुजानां प्रतिलिपीः स्वीकृत्य एतत् ज्ञातुं प्रयतन्ताम्। एतत् दर्शयति यत् त्रिभुजानां सर्वाङ्गसमतायाः विषये चर्चयन् न केवलं कोणानां परिमाणस्य भुजानां दीर्घतायाः च महत्त्वं विद्यते,अपितु शीर्षाणां सुमेलनम् अपि तद्वद् महत्त्वम् आधत्ते। उपरि प्रदत्तायां स्थितौ, सुमेलनम् एवम् अस्ति -

$A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$, $C \leftrightarrow R$

वयम् एतत्, अनेन प्रकारेण अपि लिखितुं शक्नुमः $ABC \leftrightarrow PQR$

उदाहरणम् 1 यदि ΔABC तथा च ΔPQR सुमेलनम् $ABC \leftrightarrow RQP$ इत्यस्य अन्तर्गतं सुमेलनम् स्यात्,तदा

ΔABC इत्यस्य तान् भागान् लिखन्तु ये निम्नस्य संगताः स्युः।

(i) $\angle P$ (ii) $\angle Q$ (iii) $\overline{RP}$

समाधानम् एतां सर्वाङ्गसमतां सुष्ठु प्रकारेण अधिगन्तुम्, आयान्तु वयम् एकाम् आकृतिम् (आकृति 7.7) उपयुञ्ज्महे

आकृति 7.7

अत्र सुमेलनम् $ABC \leftrightarrow RQP$ अस्ति।

अर्थात् $A \leftrightarrow R$; $B \leftrightarrow Q$; $C \leftrightarrow P$.

अतः (i) $\overline{PQ} \leftrightarrow \overline{CB}$ (ii) $\angle Q \leftrightarrow \angle B$ (iii) $\overline{RP} \leftrightarrow \overline{AB}$

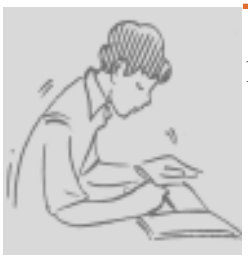
विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

यदा द्वे त्रिभुजे,कल्पन्ताम् ABC तथा चPQR, दत्ते स्यात् तु तयोः मध्ये षड् सम्भवसुमेलनानि भवन्ति।तेषु द्वे सुमेलने स्तः

(i) $ABC \leftrightarrow PQR$ तथा च (ii) $ABC \leftrightarrow QRP$

द्वयोः त्रिभुजयोः कट-आऊट(cutouts)इति प्रयुज्य अन्यानि चत्वारि सुमेलनानि ज्ञायताम्। किम् इमानि सर्वाणि सुमेलनानि सर्वाङ्गसमतां दर्शयन्ति ? अस्मिन् विषये विचारयन्तु।

प्रश्नावली 7.1



1. निम्न-कथनानि पूरयन्तु
   (a) द्वौ रेखाखण्डौ सर्वाङ्गसमौ भवतः यदि ---------- ।
   (b) द्वयोः कोणयोः मध्ये एकस्य परिमाणम् 70° अस्ति। द्वितीयकोणस्य परिमाणम् -------- अस्ति।
   (c) यदा वयम् $\angle A = \angle B$ इति लिखामः, वस्तुतः अस्माकम् अर्थः भवति --------- ।
2. वास्तविकजीवनेन सम्बन्धितानां सर्वाङ्गसमानाम् आकाराणां किञ्चित् उदाहरणद्वयं यच्छन्तु।
3. यदि सुमेलनं $ABC \leftrightarrow FED$ अस्य अन्तर्गते $\Delta ABC \cong \Delta FED$ अस्ति तदा त्रिभुजस्य अन्तर्गतं सर्वान् संगतसुमेलनभागान् लिखन्तु।
4. यदि $\Delta DEF \cong \Delta BCA$ स्यात्, तदा ΔBCA इत्यस्य तान् भागान् लिखन्तां ये निम्नानां संगताः भवेयुः
   (i) $\angle E$ (ii) $\overline{EF}$ (iii) $\angle F$ (iv) $\overline{DF}$

7.6 त्रिभुजानां सर्वाङ्गसमतायै प्रतिबन्धः

वयं निजदैनिकजीवने त्रिभुजाकारसंरचनां प्रतिरूपाणां च प्रयोगं कुर्मः। अतः एतत् ज्ञातु श्रेयस्करं भविष्यति यत् द्वे त्रिभुजाकारे आकृती कदा सर्वाङ्गसमे भविष्यतः। यदि भवतः टिप्पणीपुस्तिकायां त्रिभुजे निर्मिते स्तः भवन्तः प्रमाणितं कर्तुम् इच्छन्ति यत् किं ते आकृती सर्वाङ्गसमे स्तः।

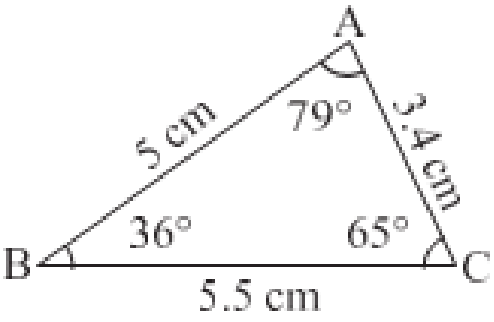
तदा प्रति वारं भवन्तः तयोः मध्ये एकं छित्वा अपरस्य उपरि अध्यारोपणविधेः (आरेपणम्) प्रयोगं नैव कर्तुं शक्नुवन्ति। एतद् अतिरिच्य यदि वयं सर्वाङ्गसमतां सम्यक् परिमाणैः निश्चितं कर्तुं शक्नुयाम तर्हि एतत् अधिकोपयोगी भविष्यति। अस्तु तथा कर्तुं प्रयत्नं कुर्मः।

एका क्रीडा

अप्पूमहोदयः टिप्पूमहोदयः च एकां क्रीडां क्रीडतः। अप्पूमहोदयेन एकं त्रिभुजम् (आकृतिः7.8) निर्मितम्।

सः प्रत्येकं भुजायाः दीर्घताम् अस्य च प्रत्येकं कोणस्य परिमाणम् अवधाने स्थापितवान्। टिप्पूमहोदयः एतत् सर्वं ध्यानेन न दृष्टम्। अप्पूमहोदय,टिप्पूमहोदयः आह्वयते (चुनौति देता है)यत् किं सः दत्तानां कतिपयसूचनाम् आधारेण तस्य ΔABC इत्यस्य प्रतिलिपिं निर्मातुं शक्नोति।

अप्पूमहोदयेन दत्ताः सूचनाः प्रयुज्य टिप्पूमहोदयः ΔABC इत्यस्य सर्वाङ्गसमम् एकं त्रिभुजनिर्माणस्य प्रयासम् अकरोत्। क्रीडा आरभते। ध्यानेन तयोः वार्तालापस्य तयोः च क्रीडायाः अवलोकनं कुर्वन्तु।

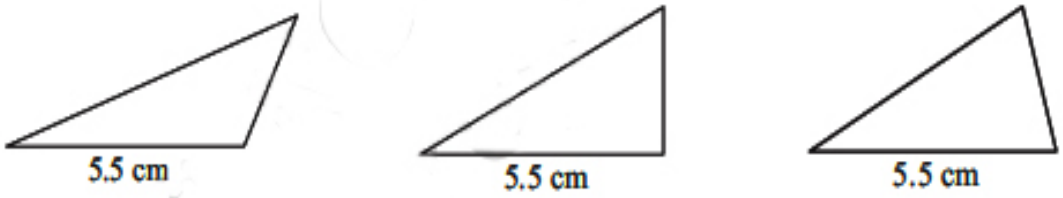


आकृतिः 7.8
(अप्पूवर्येण निर्मितं त्रिभुजम्)

SSS क्रीडा

अप्पूमहोदयः ΔABC इत्यस्य एका भुजा 5.5 से.मी.अस्ति।

टिप्पूमहोदयः अनया सूचनया अहं, नैकानि त्रिभुजानि निर्मातुं शक्नोमि (आकृतिः 7.9) किन्तु एतत् आवश्यकं नास्ति यत् तानि ΔABC इत्यस्य एव प्रतिलिपयः स्युः। अहं यानि त्रिभुजानि निर्मामि तत् त्रिभुजं अधिककोणे (obtuse angled) अथवा समकोणे (Right angled) अथवा न्यूनकोणे (acute angled) भवितुं शक्नोति। अत्र कानिचित् उदाहरणानि दत्तानि सन्ति :



(अधिककोणः) (समकोणः) (न्यूनकोणः)

आकृतिः 7.9

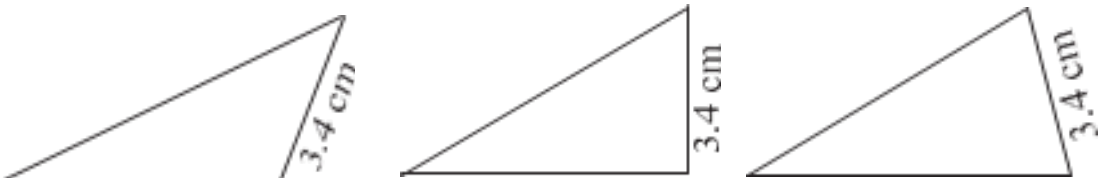
अहम् अन्य भुजाभ्यः स्वेच्छया दीर्घतायाः प्रयोगं कृतवन्तः। अनेन अहं 5.5 से.मी. आधारयुतानि बहूनि त्रिभुजानि प्राप्नोमि।

अतः प्रदत्तेन एकस्याः भुजायाः दैर्घ्येण ΔABC इत्यस्य प्रतिलिपिनिर्माणं, मम कृते सम्भवः नास्ति।

अप्पूमहोदयः समीचीनम्। अहं तुभ्यम् एकस्याः अन्यभुजायाः दैर्घ्यं ददामि। ΔABC इत्यस्य द्वयोः भुजयोः दीर्घते (लम्बाईयाँ) 5.5 से.मी. तथा च 3.4 से.मी. स्तः।

टिप्पूवर्यः एषा सूचना अपि त्रिभुजं निर्मातुं पर्याप्ता नास्ति। अहं दत्तया सूचनया बहुनि त्रिभुजानि निर्मातुं शक्नोमि यत् ΔABC प्रतिलिपयः न भविष्यन्ति।

अत्र कानिचित् त्रिभुजानि दत्तानि सन्ति यानि मम वार्ताम् अङ्गीकुर्वन्ति।



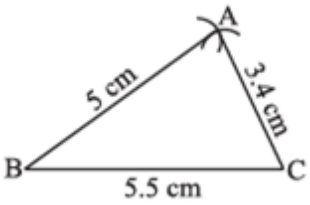
5.5 cm 5.5 cm 5.5 cm

आकृतिः 7.10

भवतः त्रिभुजस्य सदृशां प्रतिलिपिं कश्चन अपि निर्मातुं न शक्नोति यदि केवलं द्वयोः भुजयोः दीर्घता दत्ता

स्यात्।

अप्पूमहोदयः सम्यक् अस्ति। अहम तुभ्यं तिसृणां भुजानां परिमाणं ददामि। ΔABC मध्ये मम पार्श्वे AB = 5 से.मी., BC = 5.5 से.मी. तथा च AC = 3.4 से.मी.।



आकृतिः 7.11

टिप्पूवर्यः अहं विचारयामि यत् त्रिभुजस्य निर्माणम् अधुना सम्भवं स्यात्। अहम् इदानीं प्रयासं करोमि। आदौ अहं प्रतिरूपाकृतिम् (खाका) निर्मामि येन अहं सरलतया दीर्घताः स्मरामि। अहं 5.5 से.मी. $\overline{BC}$ आकर्षयामि।

'B' इति केन्द्रं मत्वा, अहं 5 से.मी.त्रिज्यायुतम् एकं चापम् आलिखामि। 'A' बिन्दौ कुत्रचित् स्थितं स्यात्। 'C' इति केन्द्रं मत्वा 3.4 से.मी. त्रिज्यायुतम् एकं चापम् आकर्षामि। 'A' बिन्दौ कुत्रचित् अस्मिन् चापे अपि स्थितं स्यात्। अर्थात् 'A' बिन्दुः आकृष्टचापे स्थितः अस्ति। अर्थात् 'A' द्वयोः चापयोः प्रतिच्छेदीबिन्दुः अस्ति।

अहम् अधुना A, B तथा च C इति त्रयाणां बिन्दूनां स्थितिं जानन्तु। अहो। अहम् एतान् मेलयित्वा ΔABC इति प्राप्तुं शक्नोमि (आकृतिः 11)।

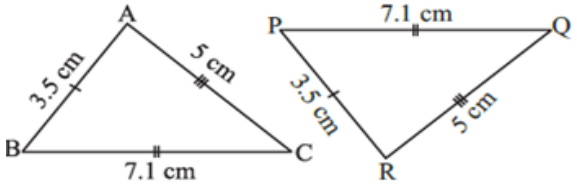
अप्पूमहोदयः बहु सम्यक्! अतः ΔABC प्रतिलिपिं निर्मातुम् (अर्थात् ΔABC इत्यस्य सर्वाङ्गसमाय) अस्माकं कृते तिस्रृणां भुजानां दीर्घतायाः आवश्यकता भवति। किं वयम् एतां स्थितिं भुजा-भुजा-भुजा (side-side-side) प्रतिबन्धं वक्तुम् अर्हामः।

टिप्पूवर्यः किमर्थं न वयम् एतं संक्षेपे, SSS इति प्रतिबन्धं कथयामः।

SSS सर्वाङ्गसमतायाः प्रतिबन्धः:
यदि प्रदत्तस्य सुमेलनस्य अन्तर्गतम्, एकस्य त्रिभुजस्य तिस्रः भुजाः क्रमशः कस्यचित् अन्यस्य त्रिभुजस्य संगतभुजानां समानाः स्युः तदा द्वे त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे भवतः।

उदाहरणम् 2 त्रिभुज ABC तथा च PQR मध्ये AB = 3.5 से.मी., BC = 7.1 से.मी., AC =5 से.मी., PQ = 7.1 से.मी., QR = 5 से.मी., तथा च PR = 3.5 से.मी.,अस्ति। (आकृतिः 7.1)। अवेक्षणं कुर्वन्तु यत् किं त्रिभुजे सर्वाङ्समे स्तः अथवा न ? यदि आम्, तदा सुमेलनसम्बन्धं सांकेतिकरूपेण लिखन्तु।

समाधानम् अत्र AB = RP (= 3.5 cm),
BC = PQ (= 7.1 से.मी.)
AC = QR (= 5 से.मी.)



आकृतिः 7.12

एतत् दर्शयति यत् पूर्वं त्रिभुजस्य तिस्रः भुजाः, द्वितीयस्य त्रिभुजस्य तिस्रृणां भुजानां तुल्याः सन्ति। अतः SSS सर्वाङ्गसमतायाः प्रतिबन्धस्य अन्तर्गतं, द्वे त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे स्तः। उपरि दत्तैः समानातासम्बन्धैः,एतत् सारल्येन द्रष्टुं शक्यते।

यत् $A \leftrightarrow R$, $B \leftrightarrow P$ तथा च $C \leftrightarrow Q$.

अतः $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$

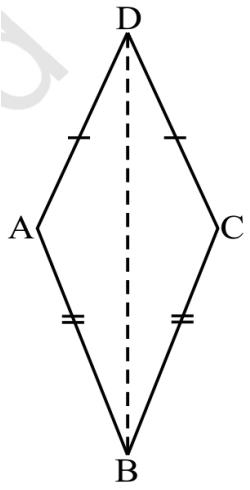
महत्त्वपूर्णं तथ्यम् सर्वाङ्गसमानां त्रिभुजानां नामेषु अक्षराणां क्रमसङ्गतान् सम्बन्धान् दर्शयति। अनेन प्रकारेण, यदा भवन्तः $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$, लिखन्ति। भवद्भिः ज्ञायते यत् A, R अस्य उपरि B,P अस्य उपरि C, Q अस्य उपरि, $\overline{AB}$, $\overline{RP}$ अस्यां दिशि, $\overline{BC}$, $\overline{PQ}$ अस्यां दिशि $\overline{AC}$, $\overline{RQ}$ इत्यस्यां दिशि वर्तते।

उदाहरणम् 3 7.13 आकृत्यां, AD = CD तथा च AB = CB अस्ति।

(i) ΔABD तथा च ΔCBD मध्ये समानभागानां त्रियुग्मानि निर्मान्तु।

(ii) किम् $\Delta ABD \cong \Delta CBD$? किमर्थम् अथवा किमर्थं न ?

(iii) किम् BD, $\angle ABC$ इत्येतं समद्विभजति ? कारणं वदन्तु।



आकृतिः 7.13

समाधानम्

(i) ΔABD तथा च ΔCBD मध्ये समानभागानां त्रियुग्मानि सन्तिः

AB = CB (दत्तम् अस्ति)

AD = CD (दत्तम् अस्ति)

तथा च BD = BD (उभयत्र उभयनिष्ठम् अस्ति)

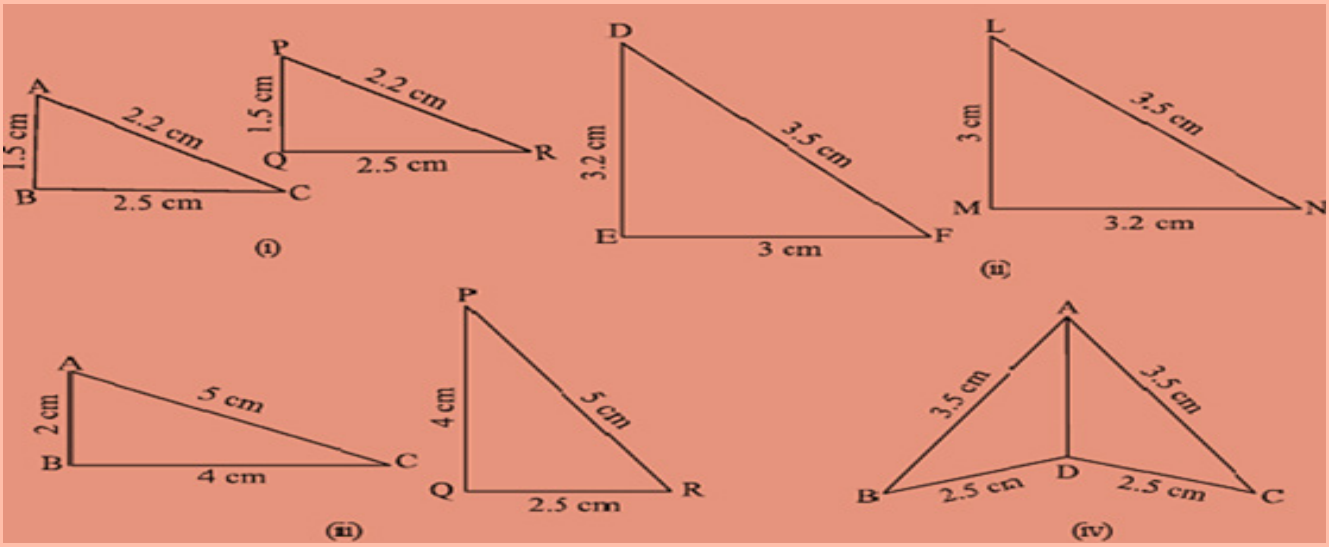
(ii) उपरि दत्तेन (i) द्वारा $\angle ABD \cong \angle CBD$ (SSS सर्वाङ्गसमतायाः प्रतिबन्धः)

(iii) $\angle ABD = \angle CBD$ (सर्वाङ्गसमानां त्रिभुजानां सङ्गतभागाः)

अतः BD, $\angle ABC$ इति समद्विभाजितं करोति।

एतान् कुर्वन्तु

1. आकृतिः7.14 मध्ये, त्रिभुजानां भुजानां दीर्घताः दर्शिताः सन्ति। SSS सर्वाङ्गसमतायाः प्रतिबन्धस्य उपयोगं कृत्वा उच्यतां यत् कतमः त्रिभुज-युग्मः सर्वाङ्गसमाः सन्ति ? सर्वाङ्गसमतायाः स्थित्याम् उत्तरं सांकेतिकरूपेण लिखन्तु।



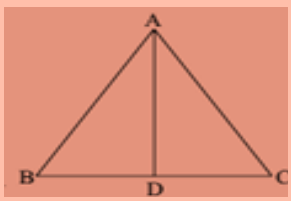
आकृतिः 7.14

2. आकृतिः7.15 मध्ये AB= AC तथा च D, BC इत्यस्य मध्यबिन्दुः अस्ति -

(i) ΔADB तथा च ΔADC मध्ये समानभागानां त्रियुग्मानि उच्यताम्।

(ii) किम् $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ अस्ति ? कारणं यच्छन्तु।

(iii) किम् $\angle B = \angle C$ अस्ति ?

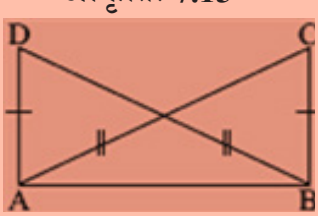


आकृतिः 7.15

3. आकृतिः 7.16 मध्ये AC = BD तथा AD = BC च अस्ति।

निम्नलिखितकथनेषु कतमत् सत्यम् अस्ति ?

(i) $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ (ii) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$



आकृतिः 7.16

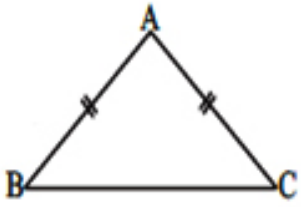
विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

ABC एकं समद्विबाहुत्रिभुजम् अस्ति यस्मिन्। AB = AC (आकृतिः7.17) अस्ति ΔABC इत्यस्य एकां प्रतिलिपिं स्वीकुर्वन्तु तथा च एनाम् अपि ΔABC इति नाम यच्छन्तु।

(i) ΔABC तथा च ΔACB मध्ये समानभागानां युग्मत्रयं निर्मान्तु।

(ii) किम् ΔABC ≅ ΔACB अस्ति ? किमर्थम् अथवा किमर्थं न ?

(iii) किम् ∠B = ∠C अस्ति ? किमर्थम् अथवा किमर्थं न ? अप्पूमहोदयः टिप्पूवर्यः च गतक्रीडायां किञ्चित् परिवर्तनं कृत्वा पुनः क्रीडतः।



आकृतिः 7.17

SAS क्रीडा

अप्पूमहोदयः अधुना अहं त्रिभुजानां प्रतिलिपिनिर्माणक्रीडायाः नियमेषु परिवर्तनं करोमि।

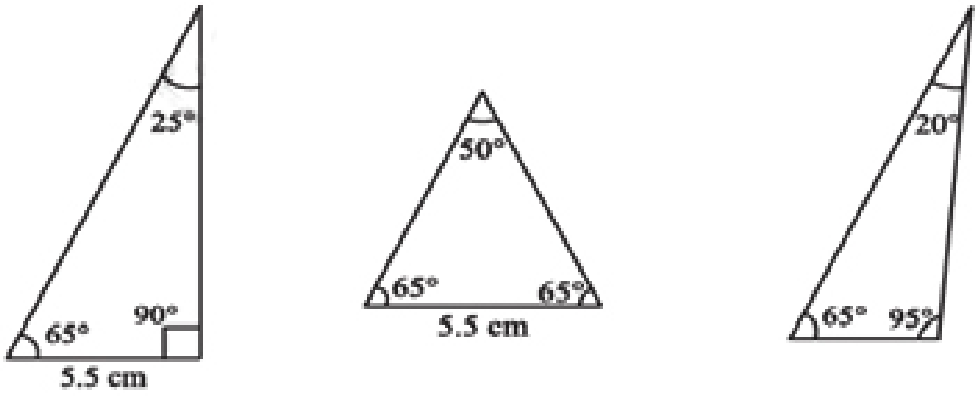
टिप्पूवर्यः सम्यक् अस्ति। क्रियन्ताम्।

अप्पूमहोदयः भवन्तः पूर्वतः एव जानन्ति यत् त्रिभुजस्य केवलं एकस्याः भुजायाः दीर्घता-प्रदानम् अपर्याप्तम् अस्ति।

टिप्पूवर्यः आम्।

अप्पूमहोदयः तस्यां स्थित्याम्, अहं वदामि यत् ΔABC मध्ये एका भुजा 5-5 से.मी. एकश्च कोणः 65°वर्तते।

टिप्पूवर्यः एतत्, पुनः त्रिभुजस्य निर्माणाय पर्याप्तम् अस्ति। अहम् एतादृशानि बहूनि त्रिभुजानि निर्मातुं शक्नोमि यानि भवतः सूचनां सन्तोषयेयुः, परन्तु तानि ΔABC इत्यस्य प्रतिलिपयः न स्युः। उदाहरणार्थम्, अहं कानिचित् त्रिभुजानि अत्र अददाम् (आकृतिः 7.18)A



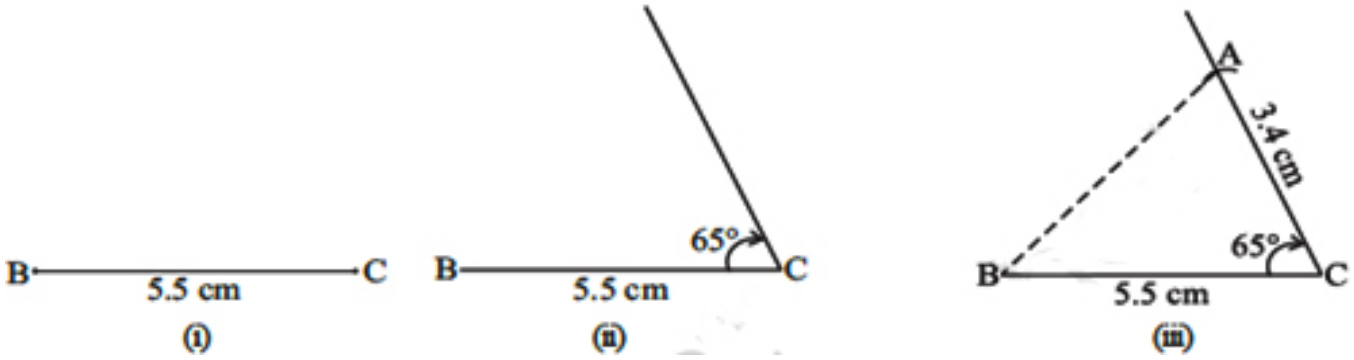
आकृतिः7.18

अप्पूमहोदयः अतः वयं किं कुर्मः?

टिप्पूवर्यः अस्माकं कृते इतोऽपि सूचनानाम् आवश्यकता वर्तते।

अप्पूमहोदयः तदानीम् अहं पूर्वतनकथने परिवर्तनं करोमि। ΔABC मध्ये, द्वयो भुजयोः दीर्घता 5.5 से.मी.एवञ्च 3.4 से.मी.अस्ति। तथा च एतयोः भुजयोः अन्तर्गतं 65° कोणः अस्ति।

टिप्पूवर्यः एषा सूचना मम साहाय्यं करिष्यति। अहं प्रयासं करिष्यामि। अहं सर्वप्रथमं 5.5 से.मी. दीर्घतावन्तं BC रेखाखण्डम् आकर्षामि। (आकृतिः7.19 (i))। अधुना अहं 'C' अस्य उपरि 65°कोणं निर्मामि (आकृतिः 7.19 (ii))।



आकृतिः7.19

आम्, अहं 'A' इति बिन्दुं प्राप्तवान्। एषः C इत्यस्मात् आकृष्टायाः अस्याः कोणीयायाः भुजायाः दिशि,'C'

अस्मात् 3.4 से.मी. दूरं स्यात्। 'C' इति केन्द्रं स्वीकृत्य, अहं 3.4 से.मी.एकं चापं आकर्षामि। एतत् कोणभुजाम् 'A'अस्य बिन्दोः उपरि छिनत्ति। अधुना अहं AB इति मेलयामि तथा च ΔABC इति प्राप्नोमि (आकृतिः 7.19 (ii))।

अप्पूमहोदयः भवद्भिः अत्र कोण-भुजा-कोणस्य उपयोगः कृतः यत्र कोणः भुजासु विद्यते।

टिप्पूवर्यः आम्। वयम् एतस्मै प्रतिबन्धाय किं नाम दास्यामः?

अप्पूमहोदयः एषः SAS प्रतिबन्धः अस्ति, किं भवन्तः अधिगतवन्तः?

टिप्पूवर्यः आम्। अवश्यमेव।

SAS सर्वाङ्गसमतायाः प्रतिबन्धः

यदि एकस्य सुमेलनस्य अन्तर्गतम्, एकस्य त्रिभुजस्य द्वे भुजे एवञ्च तयोः अन्तर्गतकोणः अपरस्य त्रिभुजस्य संगते भुजे तयोः च अन्तर्गतकोणस्य समानं स्यात्, तदा एते त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे भवतः।

उदाहरणम् 4 द्वयोः त्रिभुजयोः केषाञ्चित् भागानां परिमाणानि अधः प्रदत्तानि सन्ति। SAS सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धम् उपयुज्य अवेक्षणं क्रियन्तां यत् त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे स्तः अथवा न ? यदि त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे स्तः तदा ते सांकेतिकरूपे लिखन्तु।

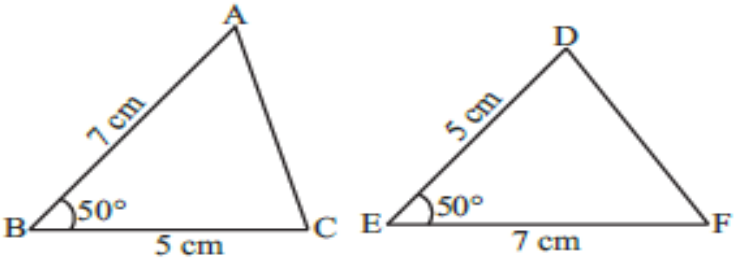
	ΔABC	ΔDEF
(a)	AB = 7 से.मी., BC = 5 से.मी., $\angle B = 50°$	DE = 5 से.मी., EF = 7से.मी., $\angle E = 50°$
(b)	AB = 4.5 से.मी., AC = 4 से.मी., $\angle A = 60°$	DE = 4 से.मी., FD = 4.5 से.मी., $\angle D = 55°$
(c)	BC = 6 से.मी., AC = 4 से.मी., $\angle B = 35°$	DF = 4 से.मी., EF = 6 से.मी., $\angle E = 35°$

(एतत् सर्वदैव अतीव उपयोगी भविष्यति यत् पूर्वं प्रतिरूपाकृतिं (खाका) निर्माय तेषां परिमाणानाम् अङ्कनं क्रियते ततश्च प्रश्नः दृश्यते।)

समाधानम्

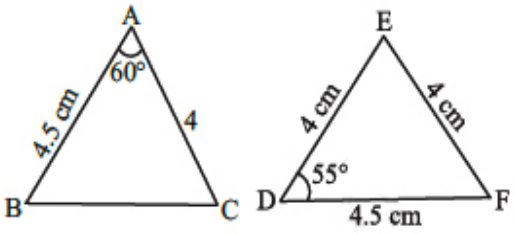
(a) अत्र, AB = EF (= 7 से.मी.), BC = DE (= 5 से.मी.) तथा च

अन्तर्गतं $\angle B$ = अन्तर्गतं $\angle E$ (= 50°).



आकृतिः 7.20

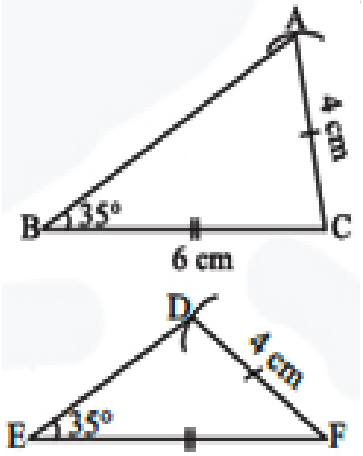
अनेन प्रकारेण, A ↔ F B ↔ E तथा च C ↔ D.



आकृतः 7.21

अतः, $\Delta ABC \cong \Delta FED$ (SAS सर्वाङ्गसमतायाः प्रतिबन्धस्य अन्तर्गतम्) (आकृतिः 7.20)

(b) अत्र, AB = FD तथा च AC = DE अस्ति (आकतिः 7.21)। किन्त अन्तर्गतं $\angle A \neq$ अन्तर्गतम् $\angle D$; अतः, वयं वक्तुं शक्नुमः यत् त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे स्तः।



(c) अत्र, BC = EF, AC = DF तथा च $\angle B = \angle E$.

परन्तु $\angle B$, AC तथा च BC भुजानाम् अन्तर्गतं कोणः नास्ति।

एवमेव, $\angle E$, EF तथा च DF भुजानाम् अन्तर्गतं कोणः नास्ति।

अतः अत्र SAS सर्वाङ्गसमतायाः प्रतिबन्धस्य उपयोगं नैव कर्तुं शक्नुमः एवञ्च वयम् एतं निष्कर्षं नैव निस्कासयितुं शक्नुमः यत् द्वे त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे स्तः अथवा न।

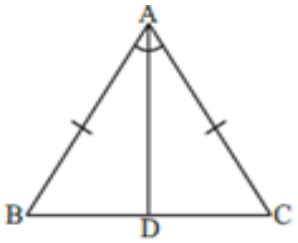
आकृतिः 7.22

उदाहरणम् 5 7.23 आकृत्यां, AB = AC अस्ति तथा च AD, $\angle BAC$ इत्यस्य समद्विभाजकः अस्ति।

(i) त्रिभुजम् ADB तथा च ADC मध्ये समानान् त्रियुग्मान् निर्मान्तु।

(ii) किम् $\Delta ADB \cong \Delta ADC$? कारणं यच्छन्तु।

(iii) किम् $\angle B = \angle C$? कारणं यच्छन्तु।



आकृतिः 7.23

समाधानम्

(i) समानाः त्रियुग्माः निम्नाः सन्ति -

AB = AC (दत्तं वर्तते)

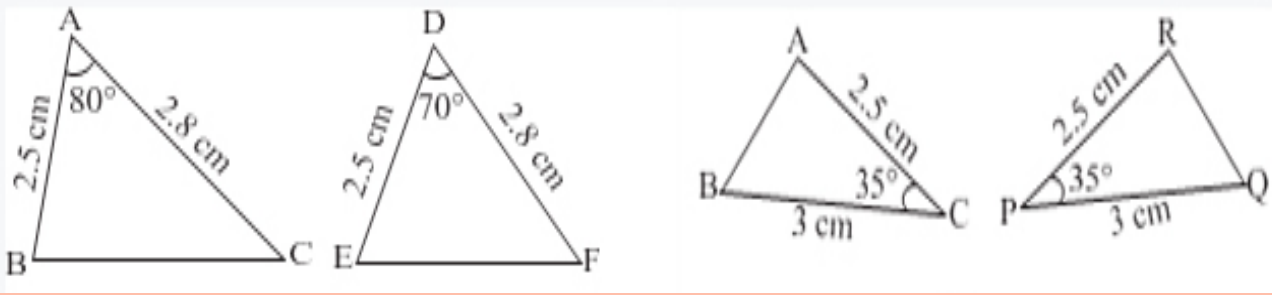
$\angle BAD = \angle CAD$ (AD, $\angle BAC$ इत्येतं समद्विभाजितं करोति) तथा च AD = AD (उभयनिष्ठम्)

(ii) आम्, $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ (SAS सर्वाङ्गसमतायाः प्रतिबन्धस्य अन्तर्गतम्)

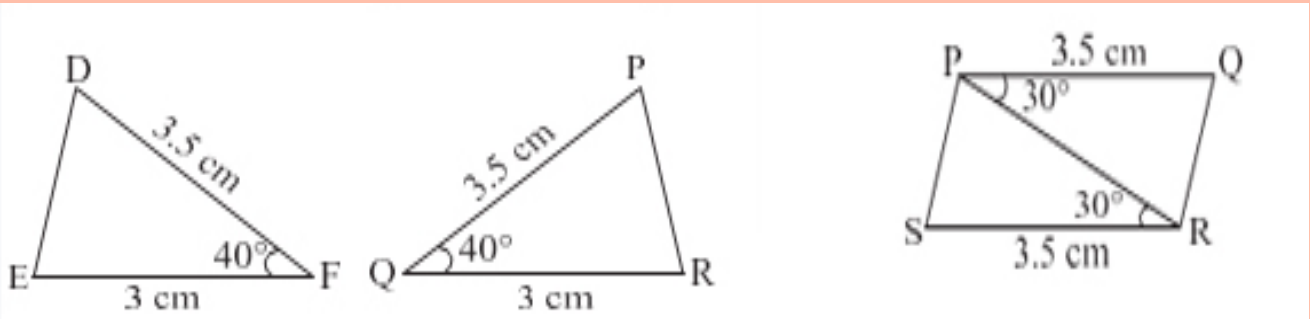
(iii) $\angle B = \angle C$ (सर्वाङ्गसमानां त्रिभुजानां संगतभागाः सन्ति।)

एतान् कुर्वन्तु

1. ΔDEF इत्यस्य भुजयोः $\overline{DE}$ तथा च $\overline{EF}$ अनयोः अन्तर्गतः कतमतः कोणः अस्ति ?
2. SAS सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धं उपयुज्य भवन्तः $\Delta PQR \cong \Delta FED$ स्थापितुम् इच्छन्ति। एतत् दत्तम् अस्ति यत् PQ = FE तथा च RP = DF अस्ति। सर्वाङ्गसमतां स्थापयितुम् अन्यस्य कस्यचित् तथ्यस्य अन्यायाः सूचनायाः आवश्यकता भविष्यति ?
3. आकृतिः 7.24 मध्ये, त्रिभुजानां युग्मेषु केषाञ्चन भागानां परिमाणाः अङ्किताः सन्ति। SAS सर्वाङ्गसमतायाः प्रतिबन्धस्य प्रयोगं कृत्वा, सर्वाङ्गसमत्रिभुजस्य स्थित्यां तान् सांकेतिकरूपे अपि लिखन्तु।



एतान् कुर्वन्तु



आकृतिः 7.24

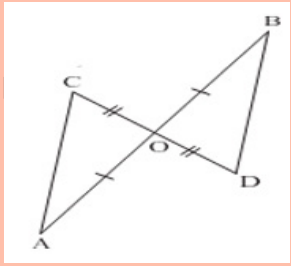
4. आकृति 7.25 मध्ये, $\overline{AB}$ तथा च $\overline{CD}$, अन्योन्यम् O अस्य उपरि समद्विभाजितं कुवर्तः

(i) द्वयोः त्रिभुजयोः AOC तथा च BOD मध्ये समानभागानां त्रियुग्मानं निर्मान्तु।

(ii) निम्नकथनेषु कतमत् कथनं सत्यम् अस्ति ?

(a) $\Delta AOC \cong \Delta DOB$

(b) $\Delta AOC \cong \Delta BOD$



आकृतिः 7.25

ASA क्रीडा

किं भवन्तः अप्पूमहोदयस्य त्रिभुजं निर्मातुं शक्नुवन्ति, यदि भवन्तः जानन्ति।

(i) केवलम् अस्य एकं कोणम् ?

(ii) केवलम् अस्य द्वौ कोणौ ?

(iii) द्वौ कोणौ काञ्चन च भुजाम् ?

(iv) द्वौ कोणौ तयोर्मध्यस्थां च भुजाम् ?

उपरोक्तानां प्रश्नानां समाधाननिष्कासनस्य प्रयासाः अस्मान् प्रतिबन्धेन अवगमयन्ति।

ASA सर्वाङ्गसमतायाः प्रतिबन्धः

यदि एकस्मिन् सुमेलने, एकस्य त्रिभुजस्य द्वौ कोणौ तयोः अन्तर्गता च भुजा, कस्यचित् अन्यत्रिभुजस्य द्वौ संगतकोणौ तयोः अन्तर्गताः च भुजाः समानाः स्युः, तदा ते त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे भवतः।

उदाहरणम् 6 ASA सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धम् उपयुज्य $\Delta ABC \cong \Delta QRP$ स्थापनीयः अस्ति यदि एतत् दत्तम् अस्ति यत् BC = RP। एतां सर्वाङ्गसमतां स्थापयितुम् अन्येषां केषां तथ्यानाम् आवश्यकता अस्ति ?

समाधानम् ASA सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धार्थम् अस्माकं कृते दत्तेन कोणद्वयेन सह अन्तर्गतानां BC एवञ्च RP भुजानाम् आवश्यकता वर्तते।

अतः अन्यानि आवश्यकतथ्यानि निम्नानि सन्ति:

$\angle B = \angle R$

तथा च $\angle C = \angle P$

उदाहरणम् 7 आकृतिः 7.26 मध्ये,किं भवन्तःASA सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धस्य उपयेगं कृत्वा एतं निष्कर्षं निष्कासयितुं शक्नुमः यत् $\Delta AOC \cong \Delta BOD$ अस्ति ?

समाधानम् द्वयोः त्रिभुजयोः AOC एवञ्च BOD मध्ये, $\angle C = \angle D$ (प्रत्येकम् 70°)

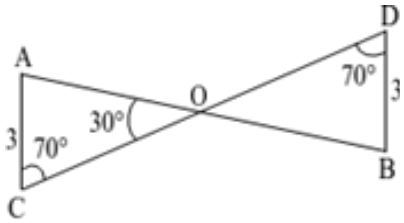
तथा च $\angle AOC = \angle BOD = 30°$ (शीर्षाभिमुखकोणः)

अतः $\angle A = 180° - (70° + 30°) = 80°$

(त्रिभुजस्य कोणानां योगः गुणधर्मस्य प्रयोगः)

अनेन प्रकारेण $\angle B = 180° - (70° + 30°) = 80°$

अतः अस्माकं पार्श्वे, $\angle A = \angle B$, AC = BD तथा च $\angle C = \angle D$ अस्ति।



आकृतिः 7.26

अधुना, $\angle A$ एवञ्च $\angle C$ एतयोः अन्तर्गता भुजा AC तथा च $\angle B$ एवञ्च $\angle D$ एतयोः अन्तर्गता भुजा अस्ति।

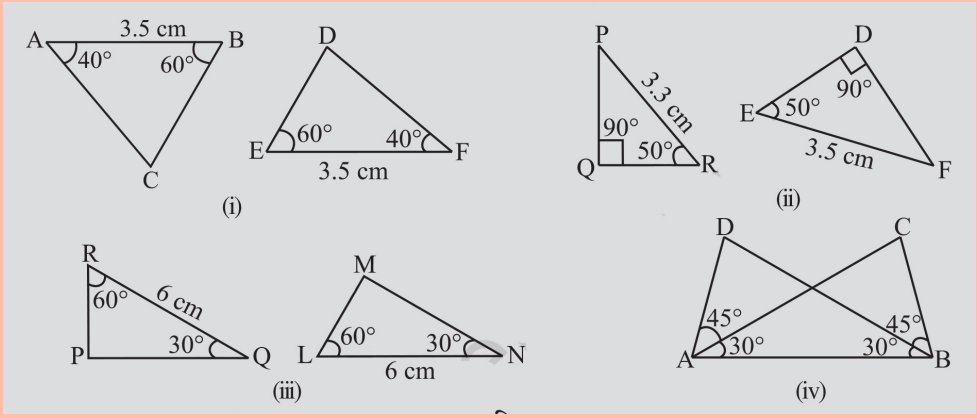
अतः ASA सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धेन $\Delta AOC \cong \Delta BOD$.

टिप्पणी

यदि एकस्य त्रिभुजस्य द्वौ कोणौ दत्तौ स्यातां तु भवन्तः सदैव त्रिभुजस्य तृतीयं कोणं ज्ञातुं शक्नुवन्ति।अतः यदा एकस्य त्रिभुजस्य द्वौ कोणौ एका च भुजा कस्यचित् अन्यस्य त्रिभुजस्य द्वयोः संगतकोणयोः एकस्याः च भुजायाः समानौ स्याताम्,तदा भवन्तः एतत् 'कोणद्वयं अन्तर्गतभुजा' संयुक्तायां सर्वाङ्गसमतायां रूपान्तरितं कर्तुं शक्नुवन्ति तदा च प्रतिबन्धस्य उपयोगं कर्तुम् अहर्न्ति।

एतान् कुर्वन्तु

1. ΔMNP कोणेषु, M तथा च N एतयोः अन्तर्गतं भुजा का अस्ति ?
2. ASA सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धस्य उपयोगं कृत्वा भवन्तः $\Delta DEF \cong \Delta MNP$ स्थापयितुम् इच्छन्ति। भवतां कृते दत्तम् अस्ति यत् $\angle D = \angle M$ तथा च $\angle F = \angle P$। एतां सर्वाङ्गसमतां स्थापनार्थं कानि तथ्यानि आवश्यकानि सन्ति? (प्रतिरूपाकृतिं निर्मीय प्रयतन्ताम्)।
3. आकृतिः 7.27 मध्ये, त्रिभुजानां केषाञ्चित् भागानां परिमाणाः अङ्किताः वर्तन्ते। ASA सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धम् उपयुज्य कथ्यन्तां कतमतां त्रिभुजानां युग्माः सर्वाङ्गसमाः सन्ति। सर्वाङ्गसमतायाः स्थित्याम्, उत्तरं संकेतितकरूपे लिखन्तु।



आकृतिः 7.27

4. द्वयोः त्रिभुजयोः केषाञ्चन भागानां परिमाणाः (परिमापाः) अधः दत्ताः सन्ति। ASA सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धस्य उपयोगं विधाय अवेक्षणं कुर्वन्तु यत् किम् एते त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे स्तः अथवा न। सर्वाङ्गसमतायाः स्थित्याम् उत्तरं सांकेतिकरूपेण लिखन्तु।

	ΔDEF	**ΔPQR**
(i)	$\angle D = 60°, \angle F = 80°$, DF = 5 से.मी.	$\angle Q = 60°, \angle R = 80°$, QR = 5 से.मी
(ii)	$\angle D = 60°, \angle F = 80°$, DF = 6 से.मी	$\angle Q = 60°, \angle R = 80°$, QP = 6 से.मी
(iii)	$\angle E = 80°, \angle F = 30°$, EF = 5 से.मी	$\angle P = 80°$, PQ = 5 से.मी, $\angle R = 30°$

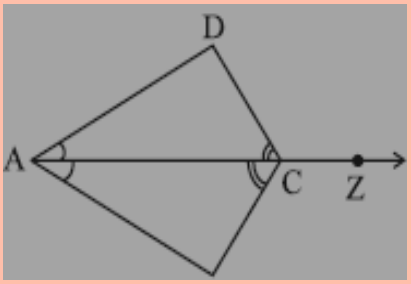
5. 7.28 आकृत्यां,किरणः AZ, ∠DAB तथा च ∠DCB एतौ कोणौ समद्विभाजितं करोति।

(i) त्रिभुजयोः BAC तथा च DAC समानभागानां त्रियुग्मान् वदन्तु।

(ii) किम् $\Delta BAC \cong \Delta DAC$ अस्ति? कारणं यच्छन्तु।

(iii) किम् AB = AD अस्ति ? कारणं यच्छन्तु।

(iv) किम् CD = CB अस्ति ? कारणं यच्छन्तु।



आकृतिः 7.28

7.7 समकोणत्रिभुजेषु सर्वाङ्गसमता

द्वयोः समकोणत्रिभुजयोः स्थित्यां सर्वाङ्गसमतां यथायोग्यं विशेषध्यानं दातव्यं भवति । एतादृशयोः त्रिभुजयोः, द्वौ समकोणौ पूर्वमेव समानौ भवतः। अतः सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धं सरलं जायते।

किं भवन्तः एकं ΔABC निग्मातुं शक्नुवन्ति यस्मिन् $\angle B = 90°$ भवेत् (आकृतिः 7.29 मध्ये दर्शितम् अस्ति) यदि

(i) केवलम् एका भुजा BC ज्ञाता भवेत् ?

(ii) केवलम् ∠C ज्ञातं स्यात् ?

(iii) ∠A एवञ्च∠C अनयोः विषये ज्ञानं स्यात् ?

(iv) भुजा AB तथा च BC ज्ञातं स्यात् ?

(v) कर्णः AC एवञ्च AB अथवा BC मध्ये एका भुजा ज्ञाता स्यात् ?

अस्य प्रतिरूपाकृतेः निर्माणस्य प्रयासं कुर्वन्तु। भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् (iv) तथा च (v) त्रिभुजनिर्माणे भवतां साहाय्यं कुर्वतः । परन्तु स्थितिः (iv) साधारणतया SAS प्रतिबन्धमेव अस्ति । स्थितिः (v) किञ्चित् नवीना अस्ति। एतत् निम्नं प्रतिबन्धं प्रति अग्रसरं करोति।

RHS सर्वाङ्गसमतायाः प्रतिबन्धः

यदि एकस्य सुमेलनस्य अन्तर्गतं,कस्यचित् समकोणत्रिभुजस्य कर्णः एका च भुजा क्रमशः कस्यचित् अपरस्य समकोणत्रिभुजस्य कर्णस्य एकायाः च भुजायाः समानं स्यात्,तदा ते त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे स्तः। वयम् एतां 'RHS सर्वाङ्गसमता' इति किमर्थम् कथयामः ?अस्मिन् विषये विचारयन्तु।

उदाहरणम् 8 त्रिभुजानां युग्मानां केषाञ्चित् भागानां परिमाणाः अधः दत्ताः सन्ति । RHS सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धस्य प्रयोगं कृत्वा उच्यतां किम् एते त्रिभुजयुग्माः सर्वाङ्गसमाः सन्ति अथवा न। सर्वाङ्गसमत्रिभुजानां स्थित्याम्, उत्तरं सांकेतिकरूपे अपि लिखन्तु :

	ΔABC	ΔPQR
(i)	$\angle B = 90°$, AC = 8 से.मी. AB = 3 से.मी.	$\angle P = 90°$, PR = 3 से.मी. QR = 8 से.मी.
(ii)	$\angle A = 90°$, AC = 5 से.मी. BC = 9 से.मी.	$\angle Q = 90°$, PR = 8 से.मी. PQ = 5 से.मी.

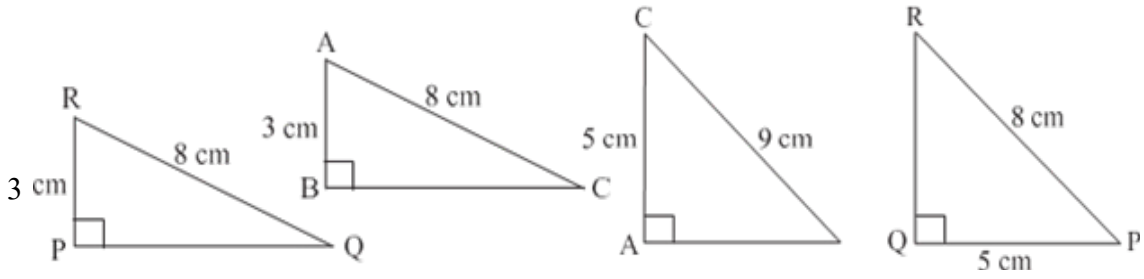
समाधानम्

(i) अत्र $\angle B = \angle P = 90°$,

कर्णः AC = कर्णः RQ (= 8 से.मी.) तथा च

भुजा AB = भुजा RP (= 3 से.मी.)

अतः $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ (RHS सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धस्य अन्तर्गतम्) [आकृतिः 7.30(i)]



(i) (ii)

आकृतिः 7.30

(ii) अत्र, $\angle A = \angle Q (= 90^\circ)$ तथा च

भुजा AC = भुजा PQ (= 5 से.मी.)

किन्तु कर्णः $\overline{BC} \neq$ कर्णः PR [आकृतिः 7.30 (ii)]

अतः त्रिभुजं सर्वाङ्गसमं नास्ति।

उदाहरणम् 9 आकृतिः 7.31मध्ये, DA ⊥ AB, CB ⊥ AB तथा च AC = BD अस्ति।

(a) ΔABC तथा च ΔDAB मध्ये समानान् त्रियुग्मान् वदन्तु।

(b) निम्नेषु कतमत् कथनं सत्यम् अस्ति ?

(i) ΔABC ≅ ΔBAD (ii) ΔABC ≅ ΔABD

समाधानम् समानभागानां त्रियुग्माः एते सन्ति।

$\angle ABC = \angle BAD (= 90^\circ)$

AC = BD (दत्तम् अस्ति)

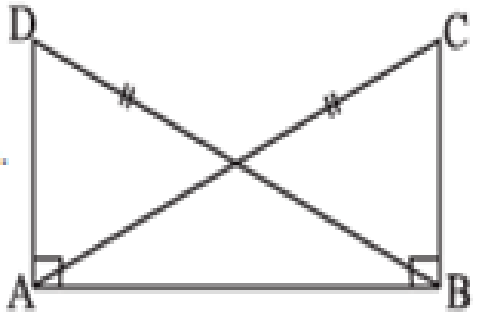
AB = BA (उभयनिष्ठभुजा)

अतः ΔABC ≅ ΔBAD

(RHS सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धेन)

अतः कथनम् (i) सत्यम् अस्ति।

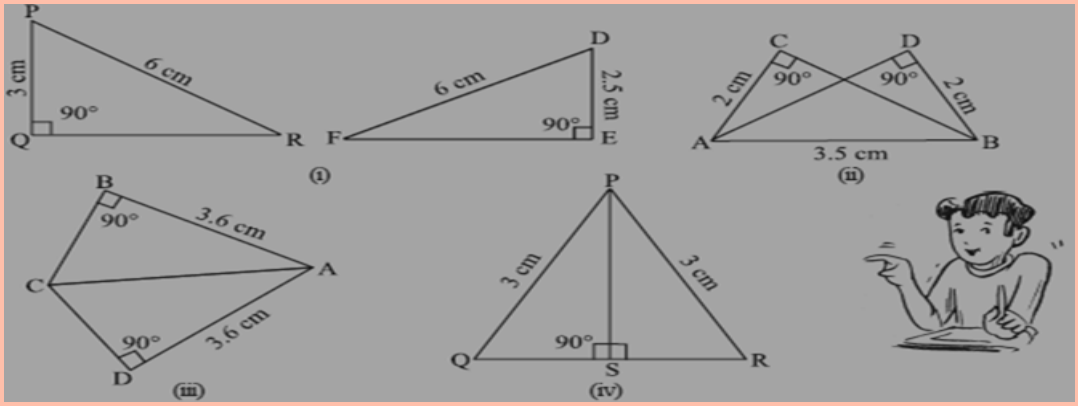
कथनम् (ii) सत्यं नास्ति यतोहि शीर्षेषु सुमेलनम् उचितं नास्ति।



आकृतिः 7.31

एतान् कुर्वन्तु

1.आकृतिः 7.32 मध्ये, त्रिभुजानां केषाञ्चित् भागानां परिमाणाः दत्ताः सन्ति। RHS सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धस्य प्रयोगं कृत्वा उच्यतां कतमाः त्रिभुजयुग्माः सर्वाङ्गसमाः सन्ति। सर्वाङ्गसमानां त्रिभुजानां स्थितौ, तान् सांकेतिकरूपेण अपि लिखन्तु।

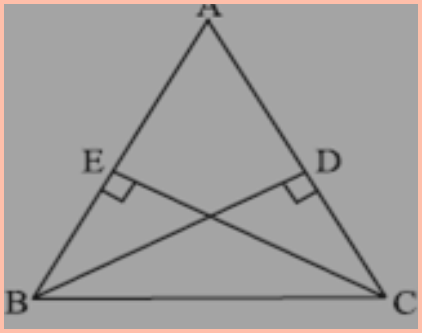


आकृतिः 7.32

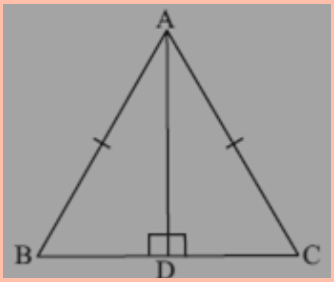
2. RHS सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धेन $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ स्थापनीयं वर्तते। यदि एतत् दत्तं भवेत् यत् $\angle B = \angle P = 90^\circ$ तथा च $AB = RP$ अस्ति तदा अन्यायाः कस्याः सूचनायाः आवश्यकता अस्ति ?

3. आकृतिः 7.33 मध्ये BD एवञ्च CE, ΔABC शीर्षे लम्बे (लम्बशीर्षे) स्तः तथा च $BD = CE$.
   (i) ΔCBD एवञ्च ΔBCE मध्ये समानान् त्रियुग्मान् निर्दिशन्तु
   (ii) किम् $\Delta CBD \cong \Delta BCE$ अस्ति ? किमर्थम् अथवा किमर्थं न ?
   (iii) किम् $\angle DCB = \angle EBC$ अस्ति ? किमर्थम् अथवा किमर्थं न ?

4. ABC, एकं समद्विबाहुत्रिभुजम् अस्ति यस्मिन् $AB = AC$ तथा च AD अस्य एकः शीर्षलम्बः अस्ति (आकृतिः7.34)।
   (i) ΔADB एवञ्च ΔADC मध्ये समानान् त्रियुग्मान् निर्दिशन्तु।
   (ii) किम् $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ अस्ति ? किमर्थम् अथवा किमर्थं न ?
   (iii) किम् $\angle B = \angle C$ अस्ति ? किमर्थम् अथवा किमर्थं न ?
   (iv) किम् $BD = CD$ अस्ति ? किमर्थम् अथवा किमर्थं न ?



आकृतिः 7.33



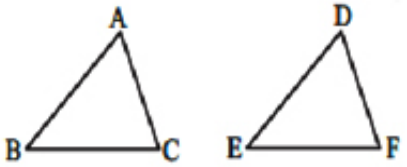
आकृतिः 7.34

अधुना वयम् एतावत्पर्यन्तं दृष्टप्रतिबन्धानाम् उपरि आधारितानि कानिचन उदाहरणानि काञ्चन च प्रश्नान् द्रक्ष्यामः।

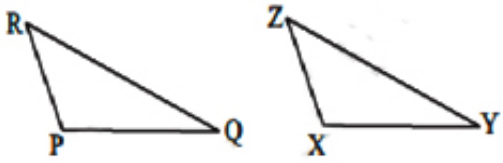
प्रश्नावली 7.2

1. निम्नेषु भवन्तः कतमतान् सर्वाङ्गमप्रतिबन्धान् प्रयोक्ष्यन्ति ?

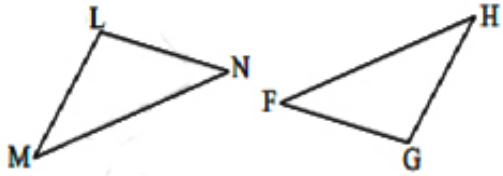
   (a) दत्तं वर्तते - $AC = DF$, $AB = DE$, $BC = EF$
   अतः $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



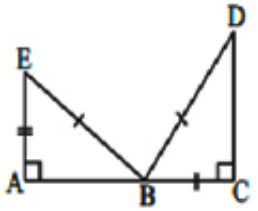
   (b) दत्तं वर्तते - $ZX = RP$, $RQ = ZY$
   $\angle PRQ = \angle XZY$
   अतः $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$



   (c) दत्तं वर्तते - $\angle MLN = \angle FGH$
   $\angle NML = \angle GFH$
   $ML = FG$
   अतः $\Delta LMN \cong \Delta GFH$



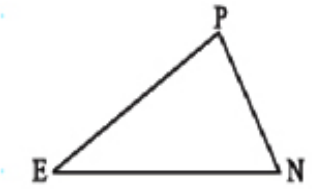
   (d) दत्तं वर्तते - $EB = DB$
   $AE = BC$
   $\angle A = \angle C = 90^\circ$
   अतः $\Delta ABE \cong \Delta CDB$



2. भवन्तः $\Delta ART \cong \Delta PEN$ दर्शयितुं वाञ्छन्ति,

(a) यदि भवन्तः SSS सर्वाङ्गसमतायाः प्रतिबन्धस्य प्रयोगं कुर्वन्ति तदा भवतां कृते दर्शयितुम् आवश्यकम् अस्ति -

(i) AR = (ii) RT = (iii) AT =



(b) यदि एतत् दत्तं स्यात् यत् $\angle T = \angle N$ एवञ्च भवद्भिः SAS प्रतिबन्धः प्रयोक्तव्यः वर्तते, तदा भवतां कृते आवश्यकम् अस्ति -

(i) RT = तथा च (ii) PN =

(c) यदि एतत् प्रदत्तं स्यात् यत् AT = PN एवञ्च भवद्भिः ASA प्रतिबन्धः प्रयोजनीयः अस्ति, तदा भवतां कृते आवश्यकम् अस्ति -

(i) ? = (ii)? =

3. भवद्भिः $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$ इति दर्शनीयम् अस्ति।

निम्नचरणेषु, रिक्तानि कारणानि पूरयन्तु

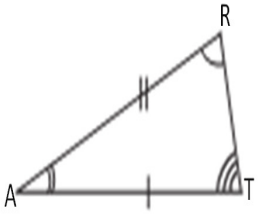
क्रमः	कारणानि
(i) PM = QM	(i) ...
(ii) $\angle PMA = \angle QMA$	(ii) ...
(iii) AM = AM	(iii) ...
(iv) $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$	(iv) ...

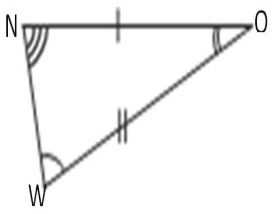
4. ΔABC मध्ये, $\angle A = 30°$, $\angle B = 40°$ एवञ्च $\angle C = 110°$

ΔPQR मध्ये, $\angle P = 30°$, $\angle Q = 40°$ तथा च $\angle R = 110°$

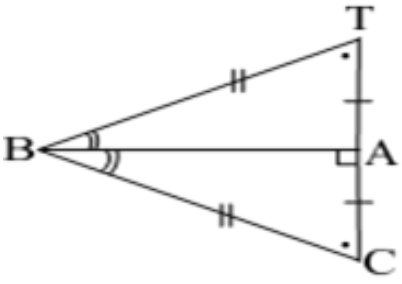
एकः विद्यार्थी वदति यत् AAA सर्वाङ्गसमताप्रबन्धेन $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ अस्ति। किम् एतत् कथनं सत्यम् अस्ति ? किमर्थम् अथवा किमर्थं न ?

5. आकृत्यां द्वे त्रिभुजे ART तथा च OWN सर्वाङ्गसमे स्तः ययोः संगतभागाः अङ्किताः सन्ति। वयं लिखितुं शक्नुमः $\Delta RAT \cong$?

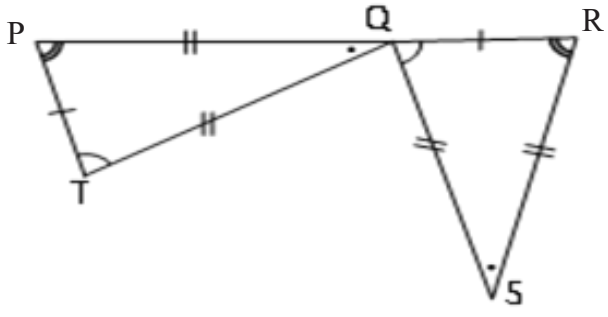




6. कथनानि पूरयन्तु :

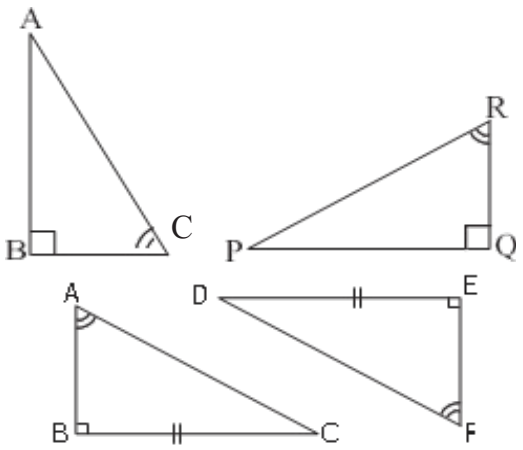


$\Delta BCA \cong$?



$\Delta QRS \cong$?

7. एकस्मिन् वर्गाङ्किते पटले, समानक्षेत्रफलयुते त्रिभुजे तथा निर्मान्तु यत्
   (i) त्रिभुजं सर्वाङ्गसमं भवेत् ।
   (ii) त्रिभुजं सर्वाङ्गसमं न भवेत् ।
   भवन्तः तयोः परिमापस्य विषये किं वक्तुं शक्नुवन्ति ?
8. आकृत्याम् एकं सर्वाङ्गसमभागानाम् अतिरिक्तं युग्मं निर्मान्तु येन ΔABC एवञ्च ΔPQR सर्वाङ्गसमे भवेताम् । भवद्भिः कः प्रतिबन्धः प्रयुक्तः?
9. चर्चयन्तु, किमर्थम् ?
   $\Delta ABC \cong \Delta FED$.



ज्ञानवर्धकः क्रियाकलापः (Enrichment Activity)

अस्माभिः दृष्टं यत् अध्यारोपणं तल-आकृतीनां सर्वाङ्गसमताम् अवेक्षितुम् एकः उपयोगी विधिः विद्यते । वयं रेखाखण्डानां,कोणानां त्रिभुजानां च सर्वाङ्गसमतायै प्रतिबन्धानां वर्णनं कृतम् । अधुना भवन्तः एतां सङ्कल्पनां वर्धयित्वा तलस्य अन्याकृतीनां कृते प्रयतितुं शक्नुवन्ति

1. पृथक् पृथक् परिमाणस्य वर्गान् (cutout) विचारयन्तु । अध्यारोपणविधेः प्रयोगः वर्गाणां सर्वाङ्गसमतायै प्रतिबन्धं ज्ञातुं क्रियन्ताम् । कथं सर्वाङ्गसमभागानां सङ्कल्पना सर्वाङ्गसमस्य अन्तर्गतम् उपयोगी भवति ? किम् अत्र संगतभुजाः सन्ति । किम् अत्र संगतविकर्णाः सन्ति ?
2. यदि भवन्तः वृत्तं स्वीकुर्वन्ति तदा किं भवति ? द्वयोः वृत्तयोः सर्वाङ्गसमतायै कः प्रतिबन्धः अस्ति ? किं, भवन्तः पुनः अध्यारोपणविधिं प्रयोक्तुं शक्नुवन्ति, ज्ञायताम् ।
3. एतां सङ्कल्पनाम् एधित्वा तलस्य अन्याकृत्यः, यथा समषट्भुजः इत्यादिभ्यः प्रयत्नं क्रियन्ताम् ।
4. एकस्य त्रिभुजस्य द्वे सर्वाङ्गसमप्रतिलिप्यौ स्वीकुर्वन्तु । कर्गदं मोटयित्वा ज्ञायतां यत् किं तयोः शीर्षलम्बाः समानाः सन्ति । किं तयोः मध्यिकाः समानाः सन्ति ? भवन्तः तयोः परिमापस्य क्षेत्रफलस्य च विषये किं वक्तुम् अर्हन्ति ?

अस्माभिः का चर्चा विहिता ?

1. सर्वाङ्गसमानि वस्तूनि परस्परं प्रतिलिप्यः जायन्ते ।
2. अध्यारोपणविधिः तलाकृतीनां सर्वाङ्गसमतायाः अवेक्षणं करोति ।
3. द्वे तलाकृत्यौ, कल्पन्ताम्, F_1 एवञ्च F_2 सर्वाङ्गसमे भवतः यदि F_1 इत्यस्य प्रतिरूप-प्रतिलिपिः F_2 इत्येतं पूर्णतया आवृणोति । वयम् एतत् $F_1 \cong F_2$ इत्यस्मिन् रूपे लिखामः।
4. द्वौ रेखाखण्डौ, कल्पन्ताम्, $\overline{AB}$ तथा च $\overline{CD}$, सर्वाङ्गसमौ भवतः यदि तयोः दीर्घता समाना स्यात्। वयम् एतत् $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ इत्यस्मिन् रूपे लिखामः । यद्यपि, साधारणताया एतत् $\overline{AB} = \overline{CD}$ इति लिखामः।
5. द्वौ कोणौ, कल्पन्ताम्, $\angle ABC$ तथा च $\angle PQR$ सर्वाङ्गसमौ भवतः यदि तयोः परिमाणः समानः स्यात् । वयम् एतत् $\angle ABC \cong \angle PQR$ अथवा $m\angle ABC = m\angle PQR$. इत्यस्मिन् रूपे लिखामः। यद्यपि, अभ्यासे एतं साधारणतया $\angle ABC = \angle PQR$ इति लिखामः ।
6. द्वयोः त्रिभुजयोः SSS सर्वाङ्गसमता -
   एकस्य दत्तसुमेलनस्य अन्तर्गतम्, द्वे त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे स्तः यदि एकस्य त्रिभुजस्य तिस्रः भुजाः कस्यचित् अन्यत्रिभुजस्य तिसृणां संगतभुजानां समानाः स्युः ।

7. द्वयोः त्रिभुजयोः SAS सर्वाङ्गसमता -
एकस्य दत्तसुमेलनस्य अन्तर्गतम्, द्वे त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे स्तः यदि एकस्य त्रिभुजस्य द्वे भुजे तयोः च अन्तर्गतः संगतकोणः, अन्यत्रिभुजस्य द्वयोः संगतभुजयोः तयोः च अन्तर्गतस्य संगतकोणस्य समानं स्यात्।

8. द्वयोः त्रिभुजयोः ASA सर्वाङ्गसमता -
एकस्य दत्तसुमेलनस्य अन्तर्गतम्, द्वे त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे स्तः यदि एकस्य त्रिभुजस्य द्वौ कोणौ तयोः च अन्तर्गता भुजा कस्यचित् अन्यत्रिभुजस्य द्वयोः संगतकोणयोः अन्तर्गतायाः च भुजायाः समानं स्यात्

9. द्वयोः त्रिभुजयोः RHS सर्वाङ्गसमता -
एकस्य प्रदत्तसुमेलनस्य अन्तर्गतम्,द्वे समकोणत्रिभुजे भवतः यदि कस्यचित् समकोणत्रिभुजस्य कर्णः एका च भुजा कस्यचित् अन्यस्य समकोणत्रिभुजस्य कर्णस्य एकायाः च भुजायाः समानं स्यात्।

10. द्वयोः त्रिभुजयोः AAA सर्वाङ्गसमता नास्ति
एतत् आवश्यकं नास्ति यत् समानसंगतकोणानां द्वे त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे स्तः। एतादृशेषु सुमेलनेषु, एतेषु एकः, अन्यस्य वर्धिता प्रतिलिपिः भवितुं शक्नोति (ते सर्वाङ्गसमे भविष्यतः यदि ते अन्योन्यं सदृश्यौ प्रतिलिप्यौ स्याताम्)।

अध्यायः 8

राशीनां तुलना

8.1 भूमिका

अस्माकं दैनिके व्यवहारे बहवः एतादृशाः अवसराः आयान्ति यदा वयं द्वयोः राश्योः तुलनां कुर्मः। कल्पनां कुर्वन्तु यत् वयं हीनायाः आमिरस्य च औन्नत्यस्य तुलनां कुर्मः। वयं प्राप्नुमः यत्

1. हीना आमिरात् द्विगुणिता उन्नता अस्ति।

अथवा

2. आमिरस्य औन्नत्यं हीनायाः औन्नत्यात् अर्धम् अस्ति।

एकस्मिन् अन्यस्मिन् उदाहरणे विचारयन्तु, यदा वयं विंशतिं (20) काचगुलिकाः, रीतायाः अमितस्य च मध्ये तेन प्रकारेण वण्टयामः यत् रीता 12 काचगुलिकाः अमितः च 8 काचगुलिकाः प्राप्नोति। वयं वक्तुं शक्नुमः -

150 से.मी. हीना

75से.मी आमिरः

1. रीतायाः पार्श्वे अमितात् $\frac{3}{2}$ गुणिताः काचगुलिकाः सन्ति।

अथवा

2. अमितस्यपार्श्वे, रीतायाः काचगुलिकानाम् $\frac{2}{3}$ भागः अस्ति।

एतादृशे एव एकस्मिन् अन्यस्मिन् उदाहरणे वयं व्याघ्रस्य एवं च एकस्य नरस्य गतेः तुलनां कुर्मः।

अत्र व्याघ्रस्य गतिः नरस्य गतितः षड्गुणिता वर्तते।

अथवा

नरस्य गतिः व्याघ्रस्य गतेः $\frac{1}{6}$ तमः भागः अस्ति।

व्याघ्रस्य गतिः
120 कि.मी. प्रतिहोरात्मिका

नरस्य गतिः
20 कि.मी. प्रतिहोरात्मिका

किं भवन्तः एतादृशीः अन्याः तुलनाः स्मरन्त ? षष्ठम्यां कक्ष्यायां वयं द्वयोः राश्योः तुलनाम् अधिगतवन्तः यदा अस्माभिः उक्तं यत् एकः राशिः द्वितीयस्मात् राशेः कियान् गुणितः अस्ति। अधुना वयं पश्यामः यत् कामपि तुलनां परिवर्त्य (उल्टा करके) एतत् वक्तुं शक्यते यत् द्वितीयः राशिः प्रथमराशेः कतमः भागः अस्ति।

उपर्युक्तेषु उदाहरणेषु वयं राशीन्यथा औन्नत्यानि अनुपातरूपेण अपि दर्शयितुं शक्नुमः । यथा हीनायाः औन्नत्यम् - आमिरस्य औन्नत्यम् = 150:75 अथवा 2:1 अस्ति ।

किं, अधुना भवन्तः अन्याः तुलनाः अपि अनुपातरूपैः अभिव्यक्तीकर्तुं शक्नुवन्ति ?

इमाः परस्परं तुलनाः सन्ति,याः द्वयोः विभिन्नस्थित्योः अपि समानाः भवितुम् अर्हन्ति ?

यदि हीनायाः औन्नत्यम् 150 सेण्टीमीटरमितं तथा च आमिरस्य औन्नत्यम् 100 सेण्टीमीटरमितं भवति, तदा तयोः औन्नत्यस्य अनुपातः भवति ।

हीनायाः औन्नत्यम् : आमिरस्य औन्नत्यम् = 150:100 = $\frac{150}{100} = \frac{3}{2}$ अथवा 3:2 अस्ति ।

अयं हि सः अनुपातः वर्तते यः रीतायाः अमितस्य च काचगुलिकासु आसीत्

अनेन प्रकारेण, वयं पश्यामः यत् यदा द्वयोः विभिन्नस्थित्योः तुलनां कुर्मः तदा एकः एव अनुपातः प्राप्तुं शक्यते । अवधानं दातव्यम् अस्ति यत् तुलनायाम् उभयोः राश्योः एककानि (इकाईयाँ) समानानि स्युः ।

उदाहरणम् 1 3 कि.मी. इत्यस्य 300 मी. इत्यनेन सह अनुपातः ज्ञायताम् ।

समाधानम् सर्वप्रथमम् उभयम् अपि समान-एककरूपेण लिखामः ।

अतः 3 कि.मी. = 3 × 1000 मी. = 3000 मी.

अनेन प्रकारेण अभीष्टानुपातः 3 कि.मी. :300 मी., अर्थात् 3000 मी. :300 मी. अथवा 10:1 इति अस्ति।

8.2 तुल्यः अनुपातः

विभिन्नाः अनुपाताः तुल्याः सन्ति अथवा न इति ज्ञातुं विभिन्नानुपातानां परस्परं तुलना कर्तुं शक्यते । एतत् कर्तुम् अस्माभिः पूर्वम् अनुपाताः भिन्नरूपैः लेखनीयाः भवन्ति पुनश्च तान् समानहरेषु भिन्नेषु परिवर्त्य तेषां तोलनां कुर्मः । यदि तानि भिन्नानि समानानि सन्ति तर्हि वयं वक्तुं शक्नुमः यत् दत्ताः अनुपाताः तुल्याः सन्ति।

उदाहरणम् 2 किम् 1: 2 इति अनुपातः 2: 3 इति अनुपातस्य तुल्यः अस्ति ?

समाधानम् परीक्षितुम् अस्माभिः द्रष्टव्यं भविष्यति यत् किम् 1/2 =2/3 अस्ति ?

वयं प्राप्नुमः $\frac{1}{2} = \frac{1\times3}{2\times3} = \frac{3}{6}$ तथा च $\frac{2}{3} = \frac{2\times2}{3\times2} = \frac{4}{6}$

वयं पश्यामः यत् $\frac{3}{6} < \frac{4}{6}$ अस्ति । अर्थात् $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ इति अस्ति ।

अतः, 1: 2 इति अनुपातः 2: 3 इति अनुपातस्य तुल्यः नास्ति ।

एतादृशीनां तुलनानाम् उपयोगः अधोदत्ते उदाहरणे द्रष्टुं शक्यते -

उदाहरणम् 3 कस्यचित् क्रिकेटदलस्य क्रीडितासु कासुचित् स्पर्धासु प्रदर्शनम् इत्थम् अस्ति -

	जयः	पराजयः
गतवर्षे	8	2
अस्मिन् वर्षे	4	2

कस्मिन् वर्षे प्रदर्शनं श्रेष्ठम् आसीत् ? एवं भवन्तः केन आधारेण वक्तुं शक्नुवन्ति ?

समाधानम् गतवर्षे, जयः : पराजयः = 8 : 2 = 4 : 1

अस्मिन् वर्षे, जयः : पराजयः = 4 : 2 = 2 : 1

स्पष्टं वर्तते 4 : 1 > 2 : 1 (भिन्ने रूपे 4/1>2/1)

अतः, वयं वक्तुं शक्नुमः यत् गतवर्षे दलस्य प्रदर्शनं समीचीनतरम् आसीत्।

षष्ठम्यां कक्ष्यायाम्, अस्माभिः दृष्टं यत् तुल्यानुपातः केन प्रकारेण महत्त्वपूर्णः अस्ति। यदि द्वौ अनुपातौ तुल्यौ स्याताम्, तदा तौ एकं समानुपातं निर्मातः। आयान्तु समानुपातं स्मरामः।

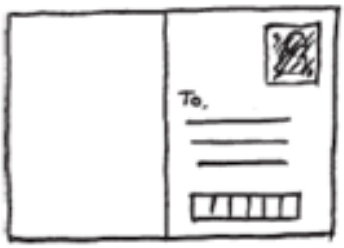
राशीनां समानुपाते निवेशनं समाधानस्य च प्राप्तिः

अरूणा स्वीय-भवनस्य रूपरेखां दृष्ट्वा तस्य एकं प्रतिरूपं कर्गदे निर्मितवती तथा च भवनेन सह निजमातरम् अपि स्थितां दर्शितवती। दृष्ट्वा मोना वदति यत् ''अस्मिन् चित्राङ्कने काचित् त्रूटिः दृश्यते'' भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् अस्मिन् चित्राङ्कने का त्रूटिः दृश्यते ?

भवन्तः एतादृशं कथं कथयितुं शक्नुवन्ति ?

अत्र चित्रे दर्शितानाम् औन्नत्यानाम् अनुपातः एवं च वास्तविकौन्नत्यानाम् अनुपातः समानः स्यात्।

$$\frac{\text{भवनस्य वास्तविकम् औन्नत्यम्}}{\text{मातुः वास्तविकम् औन्नत्यम्}} = \frac{\text{चित्रे भवनस्य औन्नत्यम्}}{\text{चित्रे मातुः औन्नत्यम्}}$$



यदि एवं वर्तते तदैव उचितः समानुपातः निर्मितः भविष्यति। प्रायः यदा उचिते समानुपाते किमपि चित्रं निर्मीयते, तदा एव एतत् दर्शने मनोहरम् आकर्षकं च जायते। एकम् अन्यम् उदाहरणं राष्ट्रिय-ध्वजस्य वर्तते।

किं भवन्तः जानन्ति विभिन्नदेशानां विभिन्नराष्ट्रिय-ध्वजानां निर्माणे उचित-समानुपातस्य एव प्रयोगः भवति। किन्तु प्रायः एषः अनुपातः1.5:1 अथवा 1.7:1 इति भवति।

वयम् अस्य अनुपातस्य मानं प्रायशः 3:2 स्वीकर्तुं शक्नुमः। प्रायशः एतत् एव मानं भारते प्रयुञ्जमाने डाकपत्रे अपि प्रयुक्तं भवति।

अधुना किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् 4.5 से.मी.लम्बमाने तथा च 3.0 सेमी. विस्तृते डाकपत्रे एषः एव परिमाणः अस्ति ? एततर्थं भवतां कृते अनुपातानां 4.5:3.0 तथा च 3:2 इत्यस्य तुल्यता द्रष्टव्या भविष्यति।

वयं पश्यामः यत् $4:5 :3.0 = \frac{4.5}{3.0} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2}$

अतः, वयं प्राप्नुमः यत् 4:5:3.0 तता च 3:2 तुल्यौ अनुपातौ स्तः।

वास्तविके जीवने समानुपातानां व्यापिनः उपयोगाः दृश्यन्ते। किं भवन्तः एतादृशीनां परिस्थितीनां विषये विचारयितुं शक्नुवन्ति ?

वयं गतकक्षासु ऐकिक-विधिना अपि प्रश्नानां समाधानं कथं करणीयम् इत्यपि अधिगतम्। अस्मिन् विधौ सर्वप्रथमं वयम् अनेकतः एकसंख्यायै पुनश्च वाञ्छितसंख्यायै मानं जानीमः।

आयान्तु, इदानीं पश्यामः यत् उभाभ्यां विधिभ्याम् एका एव समस्या कथं साध्यते।

उदाहरणम् 4 एकं मानचित्रं 1000 किलोमीटरमितम् अन्तरालं 2 सेण्टीमीटरमितेन अन्तरालेन दर्शयित्वा निर्मितम् अस्ति। यदि मानचित्रे द्वयोः स्थानयोः मध्यगता दूरता 2.5 सेण्टीमीटरमिता वर्तते, तदा तयोः मध्यगता वास्तविकी दूरता कियती भविष्यति ?

समाधानम्

अरूणः अस्य समाधानम् एवं कृतवान् - कल्पनां कुर्वन्तु अन्तरालः (दूरी) = xकि.मी. तदानीम् 1000 : x= 2 : 2.5 अथवा $\frac{1000}{x} = \frac{2}{2.5}$ अथवा $\frac{1000 \times x \times 2.5}{x} = \frac{2}{2.5} \times x \times 2.5$ अथवा 1000 ×2.5 =x×2 अथवाx=1250 वास्तविकः अन्तरालः =1250 कि.मी.	मीरा अस्य समाधानम् एवं कृतवती - 2 से.मी.दर्शयति 1000 कि.मी. इति अतः 1 से.मी. दर्शयति $\frac{1000}{2}$ कि.मी. इति अतः, 2.5 से.मी. दर्शयति $\frac{1000}{2} \times 2.5$ कि.मी. अतः, 2.5 से.मी. दर्शयति $\frac{1000}{2} \times 2.5$ कि.मी अर्थात् 1250 कि.मी.

अरूणः आदौ समानुपातं कृत्वा तत्पश्चात् समीकरणं प्राप्नोति समाधानं च करोति। मीरा पूर्वं1 से.मी.द्वारा प्रदर्शितम् अन्तरालं ज्ञातुं प्रयासं कृतवती। अनेन प्रकारेण, सा ऐकिक-विधेः प्रयोगं करोति।
आयान्तु ऐकिक-विधेः प्रयोगं कुर्वन्तः कासाञ्चित् अन्यासां समस्यानां समाधानं कुर्मः।

उदाहरणम् 5 यदि 6 कटोराणां मूल्यं नवतिरूप्यकात्मकं भवेत्, तदा तादृशीनाम् एव 10 कटोराणां मूल्यं किं भविष्यति ?

समाधानम् 6 कटोराणां मूल्यम्= 90 रू.

अतः 1 कटोरायाः मूल्यं = $\frac{90}{6}$ रू.

अतः,10 कटोराणां मूल्यम् = $\frac{90}{6}$ रू.×10=150 रू.

उदाहरणम् 6 मम कारयानं 25 लीटर् अश्मतैलेन 150 कि.मी.दूरं गच्छति। 30 लीटर् अश्मतैले (जीवाश्मतैले) तत् कियत् दूरं गमिष्यति ?

समाधानम् 25 लीटर् अश्मतैलेन गच्छति = 150 कि.मी. दूरम्

अतः,1 लीटर् अश्मतैलेन दूरं गमिष्यति = $\frac{150}{25}$ कि.मी. दूरम्

अतः, 30 लीटर् अश्मतैले दूरं गमिष्यति = $\frac{150}{25} \times 30$ कि.मी. = 180 कि.मी. दूरम्

अस्मिन् विधौ, पूर्वं वयम् एकस्य वस्तूनः मानं प्राप्नुमः अर्थात् ऐकिकं मानं प्राप्नुमः। एतत् द्वयोः विभिन्नगुणयोः तुलनां कृत्वा प्राप्यते। उदाहरणार्थं, वस्तूनां मूल्येन सह तुलनां कृत्वा एकस्य वस्तूनः मूल्यं ज्ञायते।

अथवा यदि अन्तरालम् (दूरत्वम्) एवञ्च समयः दत्तः वर्तते तर्हि एककसमये क्रमितान्तरालः ज्ञायते। अनेन प्रकारेण भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् 'प्रत्येकं' इति दर्शयितुं वयं प्रायः 'प्रति' इत्यस्य प्रयोगं कुर्मः। उदाहरणार्थं, किलोमीटर प्रतिघण्टां (km/h), विद्यार्थी प्रत्यध्यापकः, इत्यादि एकलम् अनुपातं(दर) प्रदर्शयति।

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

यदि एका पिपीलिका निजभारात् 50 गुणितं भारं वोढुं शक्नोति। यदि एतत् एव तथ्यं मानवस्य उपरि अपि प्रवर्तेत, तदानीं ज्ञायतां यत् भवन्तः कियन्तं भारं वक्ष्यन्ति ?

प्रश्नावली 8.1

1. अनुपातः ज्ञायताम् -
   (a) 5 रूप्यकस्य 50 पणकैः (b) 15 कि.ग्रा. इत्यस्य 210 ग्रामद्वारा
   (c) 9 मी.इत्यस्य 27 से.मी.द्वारा (d) 30 दिनानाम् 36 होराभिः
2. एकस्यां संगणक-प्रयोगशालायां षड्भ्यः विद्यार्थिभ्यः त्रीणि सङ्गणकानि भवेयुः। ज्ञायातां यत् चतुर्विंशत्यै (24) विद्यार्थिभ्यःकियन्ति सङ्गणकानि अपेक्षन्ते ?
3. राजस्थानस्य जनसंख्या = 570 लक्षं उत्तरप्रदेशस्य जनसंख्या = 1660 लक्षं, राजस्थानस्य क्षेत्रफलं = त्रिलक्षम् = कि.मी.^{2} उत्तरप्रदेशस्य क्षेत्रफलं = द्विलक्षम् = कि.मी.^{2} तदा ज्ञायताम्
   (i) अनयोः राज्ययोः प्रति कि.मी.^{2} कियन्तः जनाः सन्ति ?
   (ii) कस्मिन् राज्ये जनसंख्या अल्पसंघना अस्ति ?

8.3 प्रतिशतता-राशीनां तुलनायाः एकः अन्यः विधिः

अनीतायाः प्रतिवेदनम्
प्राप्ताङ्काः - 320/400
प्रतिशतम् - 80

रीतायाः प्रतिवेदनम्
प्राप्ताङ्काः » 300/360
प्रतिशतम् » 83.3

अनीता वदति यत् तस्याः परीक्षाफलम् अधिकं श्रेष्ठं वर्तते यतोहि सा 320 अङ्कान् प्राप्नोत् यद्यपि रीता केवलं 300 अङ्कान् प्राप्नोत्। किं भवन्तः तस्याः समर्थनं कुर्वन्ति ? भवतां विचारानुसारं कस्याः परीक्षाफलम् अधिकं श्रेष्ठम् अस्ति ?

मानसी वदति यत् केवलं प्राप्ताङ्कानां तुलनां कृत्वा एतद् वक्तुं न शक्यते यत् कस्याः परीक्षाफलम् अधिकं श्रेष्ठं वर्तते यतोहि अधिकतमाः अङ्काः समानाः न सन्ति।

सा वदति यत्प्रतिवेदनपत्रयोः दत्तेषु प्रतिशताङ्केषु भवत्यौ किमर्थं ध्यानं न दत्तम्। अनीतायाः प्रतिशतम् अङ्काः80 सन्ति अपरञ्च रीतायाः प्रतिशतम् अङ्काः 83.3 सन्ति। अनेन ज्ञायते रीतायाः परीक्षाफलम् अधिकं श्रेष्ठं वर्तते।

किं भवन्तः अनेन सम्मताः (सन्तुष्टाः) सन्ति ?

प्रतिशतं तेषां भिन्नानाम् अंशः भवति येषां हरः शतं भवति अन्यच्च यत्र परीक्षाफलानां तुलनायाम् एतत् कृतं स्यात्।

आयान्तु सम्प्रति एतादृशानि भिन्नानि विस्तरेण अवगन्तुं प्रयासं कुर्मः।

8.3.1 प्रतिशततायाः अर्थाः

'प्रतिशतम्' इति (percent) शब्दः लेटिन भाषायाः 'percentum'अस्मात् शब्दात् गृहीतः अस्ति यस्य अर्थः 'प्रत्येकम् एकशतम्' इति विद्यते।

प्रतिशतम् इति चिह्नद्वारा प्रदर्श्यते यस्यार्थः अस्ति शततमः।अर्थात् एकशततमः अर्थात् 1% अस्य अर्थः अस्ति शते एकः अथवा एकशततमः । एतत् अनेन प्रकारेण लिख्यते : $1\% = \frac{1}{100} = 0.01$। एतद् अवगन्तुम् अधोदत्तम् उदाहरणं विचारयामः।

रीना एकस्याः उत्पीठीकायाः ऊर्ध्वभागं निर्मातुं 100 भिन्न-भिन्नवर्णयुतानां 'टाइल' इत्येतेषां प्रयोगं करोति। सा पीतवर्णां, हरितवर्णां, रक्तवर्णां, नीलवर्णां च 'टाइल' इति इष्टिकाः पृथक्-पृथक् अगणयत् एकस्यां च तालिकायां निम्नप्रकारेण अलिखत्। किं भवन्तः एतां तालिकां पूरयितुं तस्याः सहायतां करिष्यन्ति ?

वर्णः	टाइलसंख्या	प्रतिशत-मानम् (दर)	भिन्नम्	एवं लिख्यते	एवं पठ्यते
पीता	14	14	14/100	14%	14 प्रतिशतम्
हरिता	26	26	26/100	26%	26 प्रतिशतम्
रक्ता	35	35	.....	.....	.....
नीला	25	.....	.....	.....	.....
योगः	100	.....			

एतान् कुर्वन्तु

1. निम्नदत्तांशेभ्यः विभिन्नौन्नत्यानां बालकानां प्रतिशतं ज्ञायताम्।

औन्नत्यम्	बालकानां संख्या	भिन्नरूपेण	प्रतिशतम्
110 से.मी.	22		
120 से.मी.	25		
128 से.मी.	32		
130 से.मी.	21		
योगः	100		

2. एकस्मिन् आपणे विभिन्नपरिमापाणाम् उपानहां युगलानां संख्या निम्न प्रकारेण अस्ति परिमापः 2 : 20 परिमापः 3 : 30 परिमापः 4 : 28 परिमापः 5 : 14 परिमापः 6 : 8 एतां सूचनां यथा उपरि वर्तते तथा एव एकस्यां तालिकायां लिखन्तु आपणे च उपलब्धानाम् उपानहां प्रति-परिमापं प्रतिशतरूपेण अपि ज्ञात्वा लिखन्तु।

प्रतिशतता ज्ञातव्या यदा योगः शतं न भवेत्।

उपर्युक्तेषु सर्वेषु उदाहरणेषु वस्तूनां संख्यानां योगः शतं जायते । उदाहरमार्थं रीनायाः पार्श्वे आहत्य 100 टाइल्-इष्टिकाः आसन्, बालकानां संख्या अपि शतम् अन्यच्च उपानहां संख्या अपि शतम् एव आसीत्। यदि वस्तूनाम् आहत्य संख्या शतं न भवेत् तदा प्रत्येकं वस्तूनः प्रतिशतरूपेण आकलनं कथं क्रियते ? एतादृश्यां स्थित्यां वयं प्रत्येकं भिन्नस्य तस्य एतादृशे तुल्यभिन्ने परिवर्तनं करणीयं भवति यस्य हरः शतं भवेत्। अधोदत्ते उदाहरणे विचारयन्तु । भवतः पार्श्वे कण्ठस्य एतादृशी माला अस्ति यस्यां द्वयोः वर्णयोः विंशतिः मणिकाः (Beads) सूत्रबद्धाः सन्ति ।

वर्णः	मणिकानां संख्या	भिन्नम्	100 हरयुतं तुल्यभिन्नम्	प्रतिशतम्
रक्ताः	8	$\frac{8}{20}$	$\frac{8}{20} \times \frac{100}{100} = \frac{40}{100}$	40%
नीलाः	12	$\frac{12}{20}$	$\frac{12}{20} \times \frac{100}{100} = \frac{60}{100}$	60%
योगः	20			

वयं पश्यामः यत् यदा वस्तूनां योगः शतं न वर्तते तदा प्रतिशततां ज्ञातुं वयम् एतान् त्रीन् विधीन् प्रयुञ्ज्महे। तालिकायां दर्शिते विधौ वयं $\frac{100}{100}$ द्वारा गुणयामः। इत्थं भिन्नस्य मानम् अपि न परिवर्तयति वयं च

एतादृशं भिन्नं प्राप्नुमः यस्य हरः100 इति भवति।

अनवरः रक्तमणिकानां प्रतिशतम् अनेन प्रकारेण ज्ञातं करोतिः
20 मणिकेषु रक्तमणिकानां संख्या 8 अस्ति,अतः
100 मणिकेषु रक्तमणिकानां संख्या
$= \frac{8}{20} \times 100 = 40$ (एकशते)= 40%

आशा, रक्तमणिकानां प्रतिशतम् अनेन प्रकारेण ज्ञातं करोति :

$\frac{8}{20} = \frac{8\times5}{20\times5} = \frac{40}{100} = 40\%$

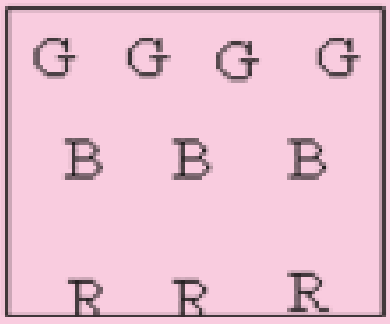
अनवरः ऐकिक-विधेः प्रयोगं कृतवान्। आशा हरे 100 प्राप्तुं तं $\frac{5}{5}$ इत्यनेन गुणां कृतवान्। भवद्भ्यः यः विधिः रोचते, तस्य प्रयोगं कर्तुं शक्नुवन्ति।एतत् सम्भवम् अस्ति यत् भवन्तः कमपि स्वकीयम् अन्यं विधिम् अपि विचारयितुं शक्नुवन्ति।

अनवरः यं विधिं प्रयुक्तवान् सः सर्वेभ्यः अनुपातेभ्यः प्रयोक्तुं शक्यते। किम्, आशा यं विधिं प्रयुक्तवती तस्य सर्वेभ्यः अनुपातेभ्यः उपयोगः कर्तुं शक्यते ? अनवरः कथयति यत् आशायाः विधिः तेषु एव भिन्नेषु उपयोक्तुं शक्यते येषां हरे एतादृशी संख्या भवेत् यां यदि कयाचित् प्राकृतसंख्यया गुणयामः तर्हि शतं प्राप्येत। यतोहि तस्याः विधौ, हरे 20 संख्या आसीत् यां सा 5 द्वारा गुणां कृत्वा आप्तवती। यदि हरे 6 संख्या भवेत् तदानीम् अस्य विधेः प्रयोगं सा नैव कर्तुंअशक्नोत्। किं भवन्तः अनेन सन्तुष्टाः सन्ति ?

एतान् कुर्वन्तु

1. विभिन्नवर्णानां 10 खण्डानां संग्रहः एवम् अस्ति -

वर्णः	संख्या	भिन्नम्	हरः शतम्	प्रतिशते
हरितः (G)				
नीलः (B)				
रक्तः (R)				
योगः				



तालिकां पूरयन्तु तथा च प्रत्येकं वर्णयुतानां खण्डानां प्रतिशतं ज्ञायताम्।

2. मालायाः पार्श्वे कङ्कणानाम् एकः सङ्ग्रहः अस्ति यस्मिन् 20 सुवर्णस्य 10 च रजतस्य कङ्कणानि सन्ति। प्रत्येकं प्रकारकाणां कङ्कणानां प्रतिशतं किम् अस्ति ? किं भवन्तः एतदर्थम् अपि तालिकां निर्मातुं शक्नुवन्ति यथोपरि निर्मिता अस्ति ?

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

अधोलिखितानि उदाहरणानि अवधानेन पश्यन्तु चर्चां च कुर्वन्तु यत् तेषु एकैकस्य कृते कः विधिः समीचीनतरः अस्ति ?

1. वातावरणे, 1 ग्राम-वायौ उपस्थिताः सन्ति :

.78 ग्राम नाइट्रोजन
.21 ग्राम ऑक्सीजन
.01ग्राम अन्यं वायुरूपद्रव्यम्

अथवा

78 % नाइट्रोजन
21 % ऑक्सीजन
1% अन्यं वायुरूपद्रव्यम्

2. कस्यचिद् युतकस्य वस्त्रे विद्यते -

60% सूती

40% पॉलिस्टर

$\frac{3}{5}$ सूती

$\frac{2}{5}$ पॉलिस्टर

8.3.2 भिन्नसंख्यानां प्रतिशतरूपेण परिवर्तनम्

भिन्नसंख्यासु हर-संख्याः विभिन्न-संख्या भवितुम् अर्हन्ति। तासां तुलनार्थं तासां हराणां सामान्यीकरणम् आवश्यकं वर्तते। वयं च दृष्टवन्तः स्मः यत् यदि तासु प्रत्येकं संख्यायाः हरः 100 भवेत् तदानीं तासां संख्यानां तुलना अतीव सरला जायते। अर्थात् वयं भिन्नानां परिवर्तनं प्रतिशतरूपेण कुर्वन्तः स्मः। आगच्छन्तु सम्प्रति वयं कानिचित् भिन्नानि प्रतिशतरूपेण परिवर्तयितुं प्रयासं कुर्म।

उदाहरणम् 7 $\frac{1}{3}$ इति प्रतिशतरूपेण लिखन्तु।

समाधानम् संख्याः सन्ति, $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{100}{100} = \frac{1}{3} \times 100\%$

$= \frac{100}{3}\% = 33\frac{1}{3}\%$

उदाहरणम् 8 25 विद्यार्थिनां कक्ष्यायां 15 बालिकाः सन्ति। बालिकानां प्रतिशतं किम् अस्ति ?

समाधानम् 25 विद्यार्थिषु 15 बालिकाः सन्ति।

अतः बालिकानां प्रतिशतं $= \frac{15}{25} \times 100 = 60$। अर्थात् कक्ष्यायां 60% बालिकाः सन्ति।

उदाहरणम् 9 $\frac{5}{4}$ इति प्रतिशतरूपेण परिवर्तयन्तु

समाधानम् संख्यायाम्, $\frac{5}{4} = \frac{5}{4} \times 100\% = 125\%$

एतेषु उदाहरणेषु वयं पश्यामः यत् एकम् उचितभिन्नं यदि प्रतिशतरूपेण परिवर्तयामः तर्हि शतात् (100 तः) न्यूनं प्रतिशतं तथा च यदि मिश्रभिन्नं प्रतिशतरूपेण परिवर्तयामः तर्हि शतात् (100 तः) अधिकं प्रतिशतं प्राप्यते।

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

(i) किं भवन्तः कस्यचित् 'मधुर-पिष्ठकस्य' 50% खादितुम् अर्हन्ति ?
किं भवन्तः कस्यचित् 'मधुर-पिष्ठकस्य' 100% खादितुं शक्नुवन्ति ?
किं भवन्तः कस्यचित् 'मधुर-पिष्ठकस्य' 150% खादितुम् अर्हन्ति ?

(ii) किं कस्यचित् वस्तूनः मूल्यं 50% वर्धितुं शक्यते ?
किं कस्यचित् वस्तूनः मूल्यं100% वर्धितुं शक्यते ?
किं कस्यचित् वस्तूनः मूल्यं150%वर्धितुं शक्यते ?

8.3.3 दशमलवभिन्नस्य प्रतिशतरूपेण परिवर्तनम्

अस्माभिः दृष्टं यत् साधारण-भिन्नानां प्रतिशतरूपेण परिवर्तनं कथं क्रियते। अधुना आयान्तु पश्यामः दशमलवभिन्नानाम् अपि प्रतिशतरूपेण परिवर्तनं कथं जायते ?

उदाहरणम् 10 प्रदत्त-दशमलवानां प्रतिशतरूपेण परिवर्तनं कुर्वन्तु -

(a) 0.75 (b) 0.09 (c) 0.2

समाधानम्

(a) $0.75 = 0.75 \times 100\ \% = \frac{75}{100} \times 100\ \% = 75\%$

(b) $0.09 = \frac{9}{100} = 9\ \%$ (c) $0.2 = \frac{2}{10} \times 100\% = 20\ \%$

प्रयासं कुर्वन्तु

1. निम्नलिखितानि भिन्नानि प्रतिशते परिवर्तयन्तु।

(a) $\frac{12}{16}$ (b) 3.5 (c) $\frac{49}{50}$

(d) $\frac{2}{2}$ (e) 0.05

2. (i) 32 विद्यार्थिषु 8 विद्यार्थिनः अनुपस्थिताः सन्ति। विद्यार्थिनां किं प्रतिशतम् अनुपस्थितम् अस्ति ?

(ii) 25 आकाशवाणीयन्त्रेषु 16 दूषितानि सन्ति। दूषितयन्त्राणां प्रतिशतं किम् अस्ति ?

(iii) एकस्मिन् आपणे 500 उपकरणानि सन्ति येषु 5 निरर्थकानि सन्ति। निरर्थकोपकरणानां प्रतिशतं किम् अस्ति ?

(iv) 120 मतदातृषु 90 मतदातारः 'आम्' इति वचनेन मतं दत्तवन्तः। कति प्रतिशतं मतदातारः 'आम्' इति वचनेन मतं दत्तवन्तः ?

8.3.4 प्रतिशतस्य साधारणभिन्ने अथवा दशमलवभिन्ने परिवर्तनम्

एतावत्-पर्यन्तम् अस्माभिः साधारण-भिन्नस्य अथवा दशमलवभिन्नस्य प्रतिशतरूपेण परिवर्तनं कृतम्। वयम् अस्माद् विपरीतम् अपि कर्तुम् अर्हामः । अर्थात् प्रदत्तं प्रतिशतं साधारणभिन्नरूपेण अथवा दशमलवभिन्नरूपेण अपि परिवर्तयितुं शक्यते। अधोदत्तां तालिकां सावधानं पूरयन्तु -

एतादृशानि कानिचित् अन्यानि उदाहरणानि निर्मान्तु तानि च समाधेयानि

प्रतिशतम्	1%	10%	25%	50%	90%	125%	250%
साधारणभिन्नम्	$\frac{1}{100}$	$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$					
दशमलवभिन्नम्	0.01	0.10					

कस्यचित् वस्तूनः सर्वे अपि भागाः मिलित्वा सदैव एकं संपूर्णं वस्तु निर्मान्ति। वर्णयुतेषु टाइलखण्डेषु, विद्यार्थिनाम् औन्नत्येषु वातावरणे च वायुद्रव्याणाम् उदाहरणेषु अस्माभिः दृष्टं यत् यदा वयं तेषां प्रतिशतं योजयामः तदा शतम् एव प्राप्यते। ते सर्वे अपि भागाः मिलित्वा एकं पूर्णं वस्तु निर्मान्ति। योजिते सति एकम् अथवा 100% यच्छन्ति। अतः यदि द्वयोः भागयोः एकः भागः दत्तः स्यात् तदा वयं द्वितीयभागं ज्ञातुं शक्नुमः।

अधोदत्तानि उदाहरणानि विचायन्तु -

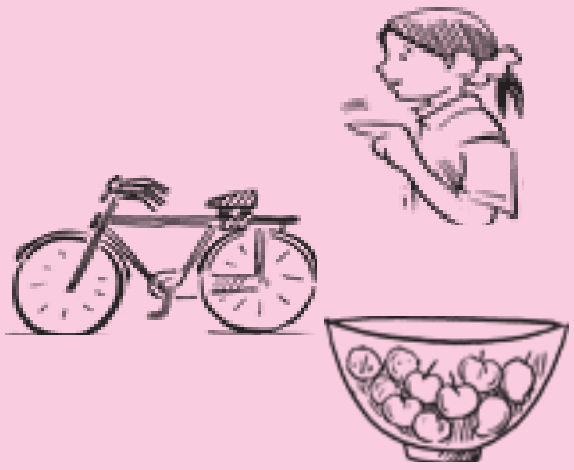
विद्यार्थिनां प्रदत्तायां संख्यायां 30% बालकाः सन्ति।

अस्य एषः अर्थः अस्ति यत् यदि 100 विद्यार्थिनः सन्ति तु तेषु 30 बालकाः सन्ति शेषाः बालिकाः भविष्यन्ति।

स्पष्टम् अस्ति यत् (100 - 30)% = 70% बालिकाः भविष्यन्ति।

प्रयासं कुर्वन्तु

1. 35% + _____% = 100%, 64% + 20% +_____ % = 100% 45% = 100% – ____ %, 70% = _____% – 30%
2. कस्याश्चित् कक्षायाः विद्यार्थिनां पार्श्वे 65% द्विचक्रिकाः सन्ति। कतिप्रतिशतं विद्यार्थिनां पार्श्वे द्विचक्रिकाः न सन्ति ?
3. अस्माकं पार्श्वे सेव-नारङ्ग-आम्रैः प्रपूरितम् एकं पात्रम् अस्ति। यदि तेषु 50% सेवफलानि तथा च 30% नारङ्गाणि सन्ति तदा आम्राणां प्रतिशतं कति अस्ति ?



विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

एकस्य परिधानस्य निर्माणे विहितं व्ययं पश्यन्तु।

'कढ़ाई' इत्यस्य उपरि 20%, वस्त्रोपरि 50%, सेवनोपरि 30%

किं भवन्तः एतादृशानि अन्यानि उदाहरणानि प्रस्तोतुं शक्नुवन्ति ?

8.3.5 अनुमानेन सह मनोरञ्जनम्

प्रतिशतता प्रदत्त-क्षेत्रफलस्य कस्यचित् भागस्य अनुमाने साहाय्यं करोति।

उदाहरणम् 11 अधोदत्तायाम् आकृतौ छायाङ्कित-भागः पूर्णस्य कतिप्रतिशतम् अस्ति ?

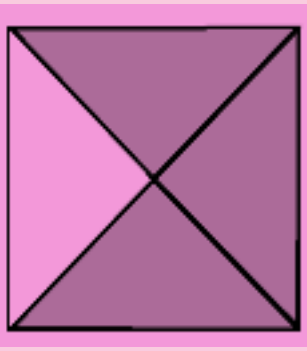
समाधानम् आदौ वयं पश्यामः यत् पूर्णाकृतेः कियान् भागः छायाङ्कितः अस्ति ? अनेन प्रकारेण प्राप्तभिन्नेन छायाङ्कित-भागस्य प्रतिशतता ज्ञातुं शक्यते। भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् पूर्णाकृतेः अर्धः भागः छायाङ्कितः अस्ति।

तथा च $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 100\% = 50\%$

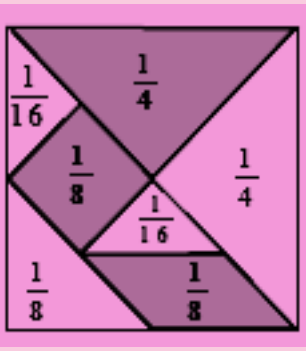
अनेन प्रकारेण, 50 % छायाङ्कितः अस्ति।

निम्नाकृत्योः कियत् प्रतिशतं छायाङ्कितम् अस्ति ?

(i)



(ii)



भवन्तः अनेन प्रकारेण काश्चन अन्याः आकृतीः निर्मातुं शक्नुवन्ति तथा च स्वीय-मित्राणि छायाङ्कितभागस्य विषये अनुमानं कर्तुं वदन्तु।

8.4 प्रतिशततायाः उपयोगः

8.4.1 प्रतिशततायाः व्याख्या

भवद्भिः दृष्टं यत् तुलनां कर्तुं प्रतिशतता कियती उपयोगिनी वर्तते। वयं साधारण-भिन्नानां तथा च दशमलव-भिन्नानां प्रतिशतरूपेण परिवर्तनं कथं क्रियते इति अधिगतवन्तः। अधुना वयं द्रक्ष्यामः यत् प्रतिशततायाः दैनिकजीवने केन प्रकारेण प्रयोगः कर्तुं शक्यते। एततर्थं वयम् अधोलिखित-कथनानां व्याख्यया आरम्भं कुर्मः।

– रविः स्वस्य आयस्य 5% रक्षति।

– रेखा प्रत्येकं पुस्तकस्य विक्रयेण 10% लाभं प्राप्नोति।

– मीरायाः 20% वस्त्राणि नीलवर्णस्य सन्ति।

एषु कथनेषु प्रत्येकं कथनात् भवन्तः कं निष्कर्षं प्राप्तुं शक्नुवन्ति ?

5% इत्यनेन अस्माकम् आशयः शतात् (100तः) पञ्च भागाः तथा च वयम् एतत् $\frac{5}{100}$ इति रूपेण लिखामः। अस्यार्थः अस्ति यत् रविः अर्जितेषु प्रत्येकं शत-रूप्यकेषु पञ्च रूप्यकाणि रक्षति। अनेनैव प्रकारेण भवन्तः उपरि दत्तानां कथनानाम् अर्थ-विषये विचारयन्तु।

8.4.2 प्रतिशततया संख्या-ज्ञानम्

अधोलिखितानि उदाहरणानि सावधानं पश्यन्तु ।

उदाहरणम् 12 40 बालकानां सर्वेक्षणेन ज्ञातं यत् 25% पादकन्दुकं क्रीडितुम् इच्छन्ति । ज्ञायतां यत् एषु बालकेषु कति बालकाः पादकन्दुक-क्रीडनं क्रीडितुम् इच्छन्ति स्म ?

समाधानम् अत्र बालानां संख्या 40 अस्ति। एषु बालेषु 25% पादकन्दुकं क्रीडितुम् इच्छन्ति । मीना अनवरः च एतादृशानां बालानां संख्यां ज्ञातुम् अधोलिखितौ विधी प्रयुक्तवन्तौ । भवन्तः एतादृशानां प्रश्नानां समाधानाय एतयोः विध्योः कं विधिं प्रयोक्तुं शक्नुव

अरुणः अनेन प्रकारेण समाधानं कृतवान्

शत-बालकेषु पादकन्दुकं क्रीडितुम् इच्छन्ति = 25

अतः, 40 बालकेषु पादकन्दुकं क्रीडितुम् इच्छन्ति

$= \frac{25}{100} \times 40 = 10$

मीरा अनेन प्रकारेण समाधानं कृतवती

40 इत्यस्य 25% $= \frac{25}{100} \times 40$

$= 10$

अनेन प्रकारेण 40 बालेषु 10 बालाः पादकन्दुकं क्रीडितुम् इच्छन्ति।

प्रयासं कुर्वन्तु

1. ज्ञायताम् :
   (a) 164 इत्यस्य 50% (b) 12 इत्यस्य 75% (c) 64 इत्यस्य 12 1/2%
2. 25 छात्राणाम् एकस्यां कक्षायां 8% छात्रेभ्यः वृष्टौ क्लेदनं रोचते । वर्षासु येभ्यः क्लेदनं रोचते तेषां छात्राणां संख्या ज्ञायताम् ।

उदाहरणम् 13 यदा 25% मूल्यापहारः दीयमानः आसीत् तदा राहुलः एकम् स्वेदकम् अक्रणीत् तथा च विंशतिं रूप्यकाणि संरक्षितवान् । मूल्यापहारात् पूर्वं स्वेदकस्य मूल्यं किम् आसीत् ?

समाधानम् राहुलः 20 रक्षितवान् यदा मूल्यापहारः 25% आसीत् । अर्थात् मूल्ये 25% न्यूनताकारणात् राहुलः विंशतिं रूप्यकाणि रक्षितवान् । आयान्तु पश्यामः यत् मोहनः अब्दुलः च स्वेदककस्य प्रारम्भिकं मूल्यं कथं ज्ञातवन्तौ ?

मोहनस्य समाधानम्

वास्तविक-मूल्यस्य 25% = 20 रू.

कल्पनां कुर्वन्तु मूल्यं P इति अस्ति

अतः P इत्यस्य 25% = 20

अर्थात् $\frac{25}{100} \times P = 20$

अर्थात् $\frac{P}{4} = 20$ अथवा $P = 20 \times 4$

अतः P = 80 रूप्यकाणि

अब्दुलस्य समाधानम्

प्रत्येकं 100 रूप्यकेषु 25 रूप्यकाणि रक्षति तदा 20 रूप्यकाणां रक्षणम् अस्मिन् राशौ भविष्यति

$= \frac{100}{25} \times 20 = 80$ रूप्यकाणि

उभौ एव स्वेदकस्य वास्तविकं मूल्यं 80 रूप्यकाणि ज्ञातवन्तौ ।

प्रयासं कुर्वन्तु

1. 9 कस्याः संख्यायाः 25% अस्ति ? 2. 15 कस्याः संख्यायाः 75% अस्ति ?

प्रश्नावली 8.2

1. प्रदत्त-भिन्नसंख्यानां प्रतिशतरूपेण परिवर्तनं कुर्वन्तु।

   (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{5}{4}$ (c) $\frac{3}{40}$ (d) $\frac{2}{7}$

2. प्रदत्त-दशमलव-भिन्नानां प्रतिशतरूपेण परिवर्तनं कुर्वन्तु।

   (a) 0.65 (b) 2.1 (c) 0.02 (d) 12.35

3. अनुमानं कुर्वन्तु यत् आकृतेः कियान् भागः वर्णितः अस्ति तथा च ज्ञायतां यत् कति प्रतिशतं वर्णितम् अस्ति ?

(i)

(ii)

(iii)

4. ज्ञायताम् :

   (a) 250 इत्यस्य15% (b) 1 घण्टानाम् 1%

   (c) 2500 इत्यस्य 20% (d) 1 कि.ग्रा. इत्यस्य 75%

5. सम्पूर्णः राशिः ज्ञायतां यदि

   (a) अस्य 5%, 600 अस्ति। (b) अस्य 12%, 1080 अस्ति।

   (c) अस्य40%, 500 कि.मी. अस्ति। (d) अस्य 70% 14 निमेषानि सन्ति

   (e) अस्य 8%, 40 लीटर् अस्ति।

6. प्रदत्तं प्रतिशतं साधारणभिन्नेषु दशमलवभिन्नेषु च परिवर्तयन्तु तथा च स्वीयम् उत्तरं सरलतमरूपेण लिखन्तु।

   (a) 25% (b) 150% (c) 20% (d) 5%

7. एकस्मिन् नगरे 30% महिलाः सन्ति, 40% पुरूषाः सन्ति शेषाः च शिशवः सन्ति। शिशूनां प्रतिशतं कियत् अस्ति ?

8. कस्यचित् क्षेत्रस्य 15,000 मतदातृषु 60% मतदातारः मतदाने भागम् गृहीतवन्तः। ज्ञायतां यत् कियत् प्रतिशतं मतदाने भागं नाग्रहीत्। किम् अधुना ज्ञातुं शक्यते यत् वास्तविकरूपेण कति मतदातारः मतदानं न अकुर्वन् ?

9. मीता निजवेतनात् 400 रूप्यकाणि रक्षति।यदि एतत् तस्या वेतनस्य 10% अस्ति, तदा तस्याः वेतनं कियत् अस्ति ?

10. एकः स्थानीयं क्रिकेटदलम् एकस्मिन् सत्रे 20 स्पर्धाः अक्रीडत्। एतासु तेन दलेन 25% स्पर्धाः जिताः। जीतानां स्पर्धानां संख्या कति आसीत् ?

8.4.3 अनुपातैः प्रतिशतम्

यदाकदा कस्यचित् वस्तुनः अथवा राशेः भागाः अनुपातरूपेण प्रदत्ताः वर्तन्ते तथा च अस्माभिः तेषां प्रतिशतरूपेण परिवर्तनं करणीयं भवति। अधोदत्तानि उदाहरणानि सावधानं पश्यन्तु।

उदाहरणम् 14 रीनायाः माता सूचयति यत् 'इडली' इति खाद्यं निर्मातुम् एकः भागः माषद्विदलस्य तथा च द्वौ भागौ तण्डुलस्य आवश्यकाः भवन्ति। इडली इत्यस्य एतादृशे मिश्रणे माषद्विदलस्य तण्डुलस्य च प्रतिशतं ज्ञायताम्।

समाधानम् मिश्रणस्य अनुपातः अनेन प्रकारेण लेखिष्यते

तण्डुलानि : माषद्विदलम् = 2 : 1

इदानीम्, सम्पूर्णभागः अस्ति 2 + 1= 3 अर्थात् मिश्रणे $\frac{2}{3}$ भागः तण्डुलानि $\frac{1}{3}$ भागः च माषद्विदलम् अस्ति।

अतः, तण्डुलानां प्रतिशतं भविष्यति $\frac{2}{3} \times 100\% = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}$ % इति

तथा च माषद्विदलस्य प्रतिशतं भविष्यति $\frac{1}{3} \times 100\ \% = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$ % इति

उदाहरणम्15 रवि-राजु-रायाणां मध्ये 250 रूप्यकाणि अनेन प्रकारेण वण्टितानि यत् रविं भागद्वयम्, राजूः भागत्रयम्, रायः च भागपञ्चकम् प्राप्नोत्। अस्मिन् वण्टने एकैकः कियत् धनम् प्राप्नोत् तेषां च प्रतिशतं कियत् आसीत् ?

समाधानम् प्रत्येकं भागः अनुपातरूपेण अनेन प्रकारेण लेखिष्यते 2 : 3 : 5 सर्वेषां भागानां योगः अभवत् 2 + 3 + 5 = 10.

सम्पूर्ण-राशौ एकैकस्य प्रतिशतम्	एकैकेन प्राप्तः राशिः
रवि प्राप्नोत् $\frac{2}{10} \times 100\ \% = 20\ \%$	$\frac{2}{10} \times 250$ रू.=50रू.
राजूः प्राप्नोत् $\frac{3}{10} \times 100\ \% = 30\ \%$	$\frac{3}{10} \times 250$ रू.=75रू.
रायः प्राप्नोत् $\frac{5}{10} \times 100\ \% = 50\ \%$	$\frac{5}{10} \times 250$ रू.=125 रू.

प्रयासं कुर्वन्तु

1. पञ्चदश मिष्ठान्नानि मनुः तथा च सोमुः इत्यनयोः मध्ये अनेन प्रकारेण वण्टयन्तु यत् तौ सम्पूर्णस्य क्रमशः 20 % एवञ्च 80 % प्राप्नुयाताम्।
2. यदि कस्यचित् त्रिभुजस्य कोणेषु 2 : 3 : 4 इति अनुपातः वर्तते तदा तस्य प्रत्येकं कोणस्य परिमापः कः भविष्यति?

8.4.4 प्रतिशतरूपेण वर्धनम् अथवा व्यवकलनम्

नैकेषु अवसरेषु वयं कस्मिंश्चित् राशौ संजातं वर्धनम् अथवा व्यवकलनं प्रतिशतरूपेण ज्ञातुम् आवश्यकताम् अनुभवामः। उदाहरणार्थम्, यदि कस्यचित् प्रदेशस्य जनसंख्या 5,50,000 तः वर्धित्वा 6,05,000 मिता जाता तदा एतादृश्यां स्थित्यां जनसंख्यावृद्धेः प्रतिशतरूपेण ज्ञानम् अधिकं सरलतया जायते, यथा कथयामः यत् प्रदेशस्य जनसंख्या दशप्रतिशतं (10%) वर्धिता।

वयं कस्यचित् राशेः वर्धनम् अथवा व्यवकलनम् सम्पूर्णराशेः प्रतिशतरूपेण कथं प्रकटयितुं शक्नुमः ? आयान्तु अधोलिखितानि उदाहरणानि पश्यामः।

उदाहरणम् 16 कस्यचित् विद्यालयस्य दलेन अस्मिन् वर्षे षट्सु क्रीडासु विजयः प्राप्तः अपरञ्च गतवर्षे चतसृषु क्रीडासु एव विजयः प्राप्तः। गतवर्षस्य तुलनायां विजयः कियत्-प्रतिशतं वर्धितः?

समाधानम् विजयस्य संख्यायां वृद्धिः $= 6 - 4 = 2$.

$$\frac{\text{प्रतिशतवृद्धिः वृद्धिः}}{\text{आधारवर्षे विजयः}} = \times 100$$

$$= \frac{\text{विजयसंख्यायां वृद्धिः}}{\text{गतवर्षे विजयस्य संख्या}} \times 100 = \frac{2}{4} \times 100 = 50$$

अर्थात् विजये पञ्चाशत्-प्रतिशतं वृद्धिः अभवत्।

उदाहरणम् 17 कस्मिंश्चित् देशे गतदश-वर्षेषु अशिक्षितानां संख्या 150 लक्षात् न्यूनीभूय 100 लक्षमिता अभवत्।

व्यवकलनस्य प्रतिशतं किम् आसीत् ?

समाधानम् प्रारम्भिक-राशिः = प्रारम्भे अशिक्षितानां संख्या = 150 लक्षम्

प्रारम्भिकराशौ परिवर्तनम् = अशिक्षितानां संख्यायां न्यूनता = 150 – 100 = 50 लक्षम्

अतः प्रतिशतव्यवकलनम्

$$= \frac{\text{राशौपरिवर्तनम्}}{\text{प्रारम्भिकराशिः}} \times 100 = \frac{50}{150} \times 100 = 33\frac{1}{3}\ \%$$

अतः व्यकलनस्य प्रतिशतम् $33\frac{1}{3}\ \%$ इति अस्ति।

प्रयासं कुर्वन्तु

1. वर्धनस्य अथवा व्यकलनस्य प्रतिशतं ज्ञायताम्।
   – युतकस्य मूल्यं 80 रूप्यकेभ्यः न्यूनीभूय 60 रूप्यकाणि अभवत्।
   – कस्याञ्चित् परीक्षायां प्राप्ताङ्काः 20 ततः वर्धित्वा 30 अभवन्।
2. मम माता वदति यत् तस्याः शैशवे अश्मतैलस्य मूल्यं 1 रूप्यकप्रतिलीटरमितम् आसीत् तथा च अद्यत्वे एतत् 52 रूप्यकप्रतिलीटरमितं वर्तते। अश्मतैलस्य मूल्ये कियत्-प्रतिशतवृद्धिः अभवत्?

8.5 केनचित् वस्तुना सम्बन्धितं मूल्यम् अर्थात् क्रयः विक्रयः च

अहम् एतत् 600 रूप्यकैः अक्रीणाम्।

अहम् एतत् 610 रूप्यकैः विक्रेष्यामि।

येन मूल्येन किमपि वस्तु क्रीयते तत् तस्य क्रयमूल्यम् (cost price) इति कथ्यते,एतत् संक्षेपेण क्र.मू.(C.P.) इति लिख्यते। येन मूल्येन किमपि वस्तु विक्रीयते तत् तस्य **विक्रयमूल्यम् (selling price)** इति कथ्यते तथा च एतत् संक्षेपेण वि.मू. (S.P.) इति लिख्यते।

भवतां मतेन किम् अधिकं श्रेष्ठं भविष्यति यदि किमपि वस्तु क्रयमूल्येन एव अथवा तस्मात् न्यूनमूल्येन अथवा तस्मात् अधिकमूल्येन विक्रीयेत ?

क्रयमूल्यस्य विक्रयमूल्यस्य च आधारेण भवन्तः निर्णयं कर्तुं शक्नुवन्ति यत् किमपि वस्तु विक्रीय लाभः प्राप्तः अथवा न।

यदि क्रयमूल्यम्(CP) <विक्रयमूल्यम् (SP)। तदा लाभः = वि.मू. – क्र.मू.(SP – CP)

यदि क्रयमूल्यं विक्रयमूल्यस्य तुल्यम् अस्ति तदा न लाभः भवति न हानिः

यदि क्रयमूल्यम् (CP) >विक्रयमूल्यम् (SP)। तदा हानिः= क्रयमूल्यं -विक्रयमूल्यम् (CP – SP)।

आयान्तु केषाञ्चन वस्तूनां क्रय-विक्रय-मूल्यानि दृष्ट्वा कथनानि अवगन्तुं प्रयासं कुर्मः।

- एकं क्रीडनकं 72 रूप्यकैः क्रीतम् अथ च 80 रूप्यकैः विक्रीतम्।

- एकं युतकं 120 रूप्यकैः क्रीतम् अथ च 100 रूप्यकैः विक्रीतम्।
- एका द्विचक्रिका 800 रूप्यकैः क्रीता 940 रूप्यकैः च विक्रीता।

इदानीं प्रथमं कथनं पश्यामः। अत्र क्रयमूल्यम् 72 रू. अस्ति विक्रयमूल्यं च 80 रूप्यकाणि अस्ति। अतः विक्रयमूल्यम् अधिकम् अस्ति, क्रयमूल्यात्।

अतः लाभः = वि.मू. – क्र.मू.= 80 रू. – 72 रू. = 8 रू.

अधुना भवन्तः अन्यस्य कथनद्वयस्य विषये एवमेव विचार्य्य व्याख्यां कुर्वन्तु।

8.5.1 लाभः अथवा हानिः प्रतिशतरूपेण

लाभः अथवा हानिः प्रतिशतरूपेण ज्ञातुं शक्यते। सावधानेन भवितव्यं यत् एतत् सदैव क्रयमूल्यम् आधारीकृत्य एव परिकल्यते। आयान्तु क्रीडनकस्य उदाहरणं स्वीकुर्मः। अत्र क्रयमूल्यं 72 रूप्यकात्मकम् अस्ति विक्रयमूल्यं च 80 रूप्यकात्मकम् अस्ति अतः लाभः 8 रूप्यकात्मकः वर्तते। लाभप्रतिशतं ज्ञातुं नेहा शेखरः च अधोलिखितौ विधी प्रयुक्तवन्तौ।

नेहा अनेन प्रकारेण समाधानम् अकरोत्

$$\text{लाभप्रतिशतम्} = \frac{\text{लाभः}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$$

$$= \frac{8}{72} \times 100$$

$$= \frac{1}{9} \times 100 = 11\frac{1}{9}$$

अतः लाभ %= $11\frac{1}{9}$

शेखरः अनेन प्रकारेण समाधानं कृतवान्

72 रूप्यकेषु 08 रूप्यकाणां लाभः प्राप्यते

अतः 100 रूप्यकेषु लाभः = $\frac{8}{72} \times 100$

अतः लाभ % = $11\frac{1}{9}$

अनेन प्रकारेण भवन्तः द्वितीयप्रश्ने अपि हानिप्रतिशतं ज्ञातुं शक्नुवन्ति।

अत्र CP = 120 रू., SP = 100 रूप्यकाणि सन्ति।

अतः हानिः = 120 रू. – 100 रू = 20 रू.

हानिप्रतिशतम् $= \frac{\text{हानिः}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$

$= \frac{20}{120} \times 100$

$= \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$ प्रतिशतम्

अतः हानिः $= 16\frac{2}{3}$ % इति वर्तते

120 अस्य उपरि हानिः = 20 रू.

अतः 100 रूप्यकेषु हानिः

$= \frac{20}{120} \times 100 = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$

अतः हानिप्रतिशतम् $16\frac{2}{3}$ इति वर्तते

अधुना भवन्तः द्विचक्रिकायाः उदाहरणस्य समाधानं कृत्वा पश्यन्तु।

अत्र वयम् एतद् अपि पश्यामः यत् केनचित् वस्तुना सम्बन्धितेषु क्रयमूल्यम्, विक्रयमूल्यम् अथ च लाभः अथवा हानिः इत्येषु त्रिषु राशिषु कौचिद् अपि द्वौ राशी ज्ञातौ स्यातां तदा तृतीयः राशिः ज्ञातुं शक्यते।

उदाहरणम् 18 एकस्याः पुष्पाधान्याः मूल्यम् 120 रूप्यकात्मकम् अस्ति। यदि आपणिकः इमां 10% हानौ विक्रीणीते तदा तस्याः विक्रयमूल्यं ज्ञायताम्।

समाधानम् सर्वप्रथमं प्रदत्त-राशीनां प्रत्यभिज्ञानं कुर्मः। प्रदत्तं क्रयमूल्यम् = 120 रूप्यकात्मकम् अथ च हानिप्रतिशतम् अस्ति 10 रूप्यकात्मकं तथा च अस्माभिः विक्रयमूल्यं ज्ञातव्यम् अस्ति।

सोहनः अस्य समाधानम् अनेन प्रकारेण कृतवान्

10 % हानेः अर्थः अस्ति यदि क्र.मू.= 100 रू.

तदा हानिः= 10 रू.

अतः विक्रयमूल्यम् = (100 – 10)रू. = 90 रू.

यदा क्र.मू. = 100 रू., तदा विक्रयमूल्यम् = 90 रू.

अतः यदा क्र.मू. = 120 रूप्यकाणि अस्ति,तदा

विक्रयमूल्यम् $= \frac{90}{100} \times 120 = 108$रू.

आनन्दी अस्य समाधानम् एवम् अकरोत्

हानिः= क्रयमूल्यस्य 10%

=120 अस्य 10%

$= \frac{10}{100} \times 120 = 12$ रूप्यकाणि

अतः विक्रयमूल्यम् = क्रयमूल्यम् – हानिः

= 120 रू. – 12 रू. = 108 रूप्यकाणि

द्वाभ्यां विधिभ्यां विक्रयमूल्यम् 108 रूप्यकात्मकं प्राप्यते।

उदाहरणम् 19 कस्यचित् क्रीडनक-कारयानस्य विक्रयमूल्यं 540 रूप्यकात्मकम् आसीत्। एकः आपणिकः तत् 20% लाभे व्यक्रीणीत। क्रीडनकस्य क्रयमूल्यं किमासीत्?

समाधानम् वयं जानीमः यत् विक्रयमूल्यम् = 540 रू. लाभः च = 20%, अस्माभिः क्रयमूल्यं ज्ञातव्यम् अस्ति।

अमीना अनेन प्रकारेण अस्य समाधानम् अकरोत्:

20% लाभस्य अर्थः अस्ति यत् क्रयमूल्यम् 100 रू. भवेत् तदा लाभः 20 रू.

तदा विक्रयमूल्यं 100 + 20 = 120 रूप्यकाणि भविष्यति।

अर्थात् 120 रू. विक्रयमूल्ये सति, क्रयमूल्यम् = 100 रू.

अतः 540 रूप्यकात्मके विक्रयमूल्ये सति, क्रयमूल्यम्$= \frac{100}{120} \times$ 540 रू.=450 रूप्यकात्मकं भविष्यति

अरूणः अस्य प्रश्नस्य अनेन प्रकारेण समाधानं कृतवती

लाभः = क्रयमूल्यस्य 20% तथा च विक्रयमूल्यं = क्रयमूल्यम्+ लाभः

अतः 540 = क्रयमूल्यम् + क्रयमूल्यस्य 20%

अथवा $540 = \text{क्रयमूल्यम्} + \frac{20}{100} \times \text{क्रयमूल्यम्} = \left[1+\frac{1}{5}\right]$ क्रयमूल्यम्

$= \frac{6}{5}$ क्रयमूल्यम् अतः, $540 \times \frac{5}{6} =$ क्रयमूल्यम्

अथवा 450 रू. = क्रयमूल्यम्

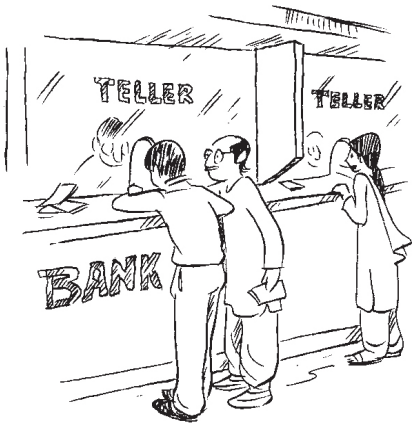
अनेन प्रकारेण विधिद्वयेन क्रयमूल्यम् 450 रूप्यकात्मकम् अस्ति।

प्रयासं कुर्वन्तु

1. एकः आपणिकः एकम् आसन्दम् 375 रूप्यकैः अक्रीणात् 400 रूप्यकैः व्यक्रीणीत। तस्य लाभप्रतिशतं ज्ञायताम्।
2. एकं वस्तु 50 रूप्यकैः क्रीतं तथा च 12 प्रतिशतलाभे विक्रीतम्। तस्य वस्तुनः विक्रयमूल्यं ज्ञायताम्।
3. एकं वस्तु 250 रूप्यकैःविक्रीतं तथा च 5 प्रतिशतलाभः प्राप्तः। तस्य क्रयमूल्यं किम् आसीत्?
4. एकं वस्तु 5 प्रतिशतहानिना 540 रूप्यकैःविक्रीतम्। तस्य क्रयमूल्यं किम् आसीत्?

8.6 गृहीतर्णस्य (गृहीतस्य ऋणस्य) उपरि शुल्कम् अर्थात् साधारण-कुसीदम्

सोहनी सूचितवती यत् ते नूतनं स्कूटरयानं क्रेतुं गच्छन्तः सन्ति। मोहनः अपृच्छत् यत् किं तेषां पार्श्वे एतदर्थं पर्याप्तं धनम् अस्ति? सोहनी प्रत्यवदत् यत् तस्याः जनकः एदतर्थं वित्तकोशात् ऋणम् ग्रहीष्यति। ऋणरूपेण स्वीकृतं धनं **'मूलधनम्'** इति उच्यते।



एतस्य धनस्य प्रत्यर्पणात् पूर्वम् ऋणग्रहीता जनः किञ्चित् कालं यावत् अस्य धनस्य उपयोगं करोति। सः धनस्य विनिमिये किञ्चिद् अतिरिक्तं धनं वित्तकोशाय ददाति। एतत् अतिरिक्तं धनं **कुसीदम्** इति कथ्यते।

एकनिश्चितावधेः अन्तरं भवद्भिः मूलधनं कुसीदं च इति उभे संयोज्य सम्पूर्णमेव धनं प्रत्यर्पणीयं भवति यच्च **मिश्रधनम्** इति कथ्यते।

अर्थात् **मिश्रधनम् = मूलधनम् + कुसीदम्**

कुसीदम् एकेन निश्चितमानेन परिकल्यते यः प्रायः प्रत्येकं शताय रूप्यकेभ्यः एकवर्षस्य कृते निर्धारितः भवति। एतत् अनेन प्रकारेण लेखितुं शक्यते दशप्रतिशतं प्रतिवर्षम् अथवा दशप्रतिशतं वार्षिकम्।

दशप्रतिशतवार्षिकस्य अर्थः अस्ति यत् ऋणरूपेण स्वीकृतेभ्यः शताय रूप्यकेभ्यः प्रतिवर्षान्तरम् दश रूप्यकाणि कुसीदरूपेण अतिरिक्तानि देयानि भविष्यन्ति।

एकम् उदाहरणं स्वीकृत्य पश्यन्तु यत् कुसीदं कथं परिकल्यते ?

उदाहरणम् 20 अनीता पञ्चसहस्रस्य (5000) रूप्यकाणाम् ऋणं 15 प्रतिशत-वार्षिक-मानेन कुसीदरूपेण स्वीकरोति। ज्ञायतां यत् एकवर्षानन्तरं सा आहत्य कियत् धनं प्रत्यर्पयिष्यति ?

समाधानम् कुसीदरूपेण स्वीकृतः राशिः = 5000 रू.

कुसीदस्य मानं (दर) = 15 प्रतिशतं प्रतिवर्षम् / वार्षिकम्

अस्य अर्थः अस्ति यत् यदि सा शतस्य (100) रूप्यकाणाम् ऋणं स्वीकरोति तर्हि सा एकवर्षात् पश्चात् पञ्चदश (15) रूप्यकाणि कुसीदरूपेण दास्यति।

अतः 5000 रूप्यकाणाम् ऋणे सा एकवर्षात् पश्चात् $\frac{15}{100}$ ×5000 रू. = 750 रूप्यकाणि दास्यति

अर्थात् एकवर्षस्य अनन्तरं सा कुसीदं मेलयित्वा 5000 रू, + 750 रू. = 5750 इति मिश्रधनं दास्यति

एकवर्षस्य कुसीदं परिज्ञातुं वयम् एकं सम्बन्धम् अथवा सूत्रम् अपि प्राप्तुं शक्नुमः।

वयं मूलधनं P द्वारा तथा च मानम् (दर) R % वार्षिकं R द्वारा प्रदर्शयामः।

तदा अस्माभिः प्रत्येकं 100 रूप्यकेभ्यः एकस्य वर्षस्य Rरू.कुसीदं दातव्यं भविष्यति।

अतःP रूप्यकस्य ऋणं स्वीकृत्य एकवर्षस्य कुसीदम् (I)

$$\text{कुसीदम्} = \frac{\text{मूलधनम्}\times\text{मानम्}}{100} \quad \text{अथवा } I = \frac{R\times P}{100} = \frac{P\times R}{100}$$

8.6.1 अनेकवर्षाणां कृते कुसीदम्

यदि धनम् एकवर्षाधिक-कालं यावद् ऋणरूपेण स्वीक्रियते तर्हि कुसीदम् अपि सम्पूर्णसमयस्य कृते परिकल्यते यावतः समयस्य कृते धनं गृहीतम् आसीत्। उदाहरणार्थं यदि अनीता तत् धनं तेनैव मानेन वर्षद्वयानन्तरं प्रत्यर्पयति तदा तया कुसीदम् अपि द्विगुणितं देयं भविष्यति अर्थात् 750 रूप्यकाणि प्रथमवर्षस्य कृते तथा च 750 रूप्यकाणि द्वितीयवर्षस्य कृते। मूलधनं तथैव तिष्ठति न किञ्चिदपि परिवर्तते तथ च कुसीदम् अपि प्रत्येकं वर्षस्य कृते समानम् एव वर्तते। एतादृशं कुसीदं साधारणकुसीदम् (साधारण ब्याज) इति कथ्यते। यथा यथा संवत्सराणां संख्या वर्धते तथैव कुसीदराशिः अपि वर्धते। वर्षत्रयस्य कृते 18% इति वार्षिक-मानेन शतस्य रूप्यकाणाम् ऋणे स्वीकृते सति वर्षत्रयानन्तरं 18 + 18 + 18 = 3 × 18 = 54 इति चतुःपञ्चाशत् रूप्यकाणि कुसीदरूपेण दातव्यानि भविष्यन्ति।

वयम् एकवर्षात् अधिकं समयाय अपि साधारणकुसीदं परिज्ञातुं सूत्रं प्राप्तुं शक्नुमः।

वयं दृष्टवन्तः यत् P रूप्यकेभ्यः R % वार्षिकानुपातेन एकवर्षानन्तरं कुसीदः दातव्यः भवति $\frac{R\times P}{100}$। अतःT वर्षेभ्यः प्रदत्तं कुसीदम् (I) भविष्यति -

$$\text{कुसीदम्} = \frac{\text{समयः}\times\text{मानम्}\times\text{मूलधनम्}}{100} = \frac{\text{समयः}\times\text{मानम्}\times\text{मूलधनम्}}{100} \text{ अथवा } \frac{\text{मू.}\times\text{मा.}\times\text{स}}{100}$$

एवञ्च T वर्षानन्तरं मिश्रधनं A भविष्यति : A = P + I

प्रयासं कुर्वन्तु

1. 10,000 रूप्यकाणि 5 प्रतिशतेन वार्षिकानुपातेन उपनिहितानि क्रियन्ते। वर्षानन्तरं कियत् कुसीदं प्राप्तं भविष्यति ?
2. 3500 रूप्यकाणि 7 प्रतिशतेन वार्षिकानुपातेन ऋणरूपेण दीयन्ते। वर्षद्वयानन्तरं कियत् साधारणं कुसीदं देयं भविष्यति ?
3. 6050 रूप्यकाणि 6.5 प्रतिशतं वार्षिकानुपातेन ऋणरूपेण स्वीक्रियन्ते। 3 वर्षानन्तरं कियत् कुसीदं तथा च कियत् मिश्रधनं देयं भविष्यति ?
4. 7000 रूप्यकाणि 3.5 प्रतिशतेन वार्षिकानुपातेन वर्षद्वयस्य कृते ऋणरूपेण स्वीक्रियन्ते। वर्षद्वयानन्तरं कियत् मिश्रधनं देयं भविष्यति ?

यथा भवन्तः क्रय-विक्रयमूल्यानां समस्यासु दृष्टवन्तः तथैव

कुसीदम् = $\frac{\text{मूलधनम्} \times \text{समयः} \times \text{मानम्}}{100}$ इति सूत्रद्वारा यदि चतुःषु राशिषु केचन अपि त्रयः राशयः ज्ञाताः स्युः तर्हि चतुर्थः राशिः ज्ञातुं शक्यते।

उदाहरणम् 21 4500 रूप्यकाणाम् ऋणस्य उपरि वर्षद्वयानन्तरं मनोहरः 750 रूप्यकाणि साधारणकुसीदरूपेण ददाति। कुसीदस्य मानं प्रतिशतरूपेण ज्ञायताम्।

समाधानम्1

कुसीदम् = $\frac{\text{मूलधनम्} \times \text{समयः} \times \text{मानम्}}{100}$

अतः $750 = \frac{4500 \times 2 \times R}{100}$

अथवा $\frac{750}{45 \times 2} = R$

अतः कुसीदस्य मानम् = $8\frac{1}{3}$ %

वार्षिकम् इति भविष्यति।

समाधानम् 2

द्वयोः वर्षयोः कुसीदम् अस्ति =750 रूप्यकाणि

अतः एकस्य वर्षस्य कुसीदः भविष्यति = $\frac{750}{2} = 375$ रूप्यकाणि

अधुना 4500 रूप्यकेषु कुसीदम् =375 रूप्यकाणि

अतः 100 रूप्यकेषु कुसीदम् = $\frac{375 \times 100}{4500} = 8\frac{1}{3}$ %

अतः कुसीदस्य मानम् = $8\frac{1}{3}$% वार्षिकम् इति भविष्यति।

प्रयासं कुर्वन्तु

1. भवतः वित्तकोषलेखायाम् 2400 रूप्यकाणि उपनिहितानि सन्ति तथा च कुसीदस्य मानं पञ्चप्रतिशतं वार्षिकम् अस्ति। कतिवर्षानन्तरं कुसीदराशिः 240 रूप्यकात्मकः भविष्यति ?
2. कस्यचित् धनस्य पञ्चप्रतिशत-वार्षिकमानेन वर्षत्रयस्य कुसीदं 450 रूप्यकात्मकं भवति। तत् धनं ज्ञायताम्।

प्रश्नावली 8.3

1. क्रय-विक्रययोः अधोलिखितेषु विनिमयेषु हानिः लाभः वा ज्ञायताम्। प्रत्येकं दशायां हानिलाभयोः प्रतिशतता अपि ज्ञायताम्।
   (a) औद्यानिक-कार्येषु प्रयुज्यमाना कर्तरी 250 रूप्यकैः क्रीता तथा च 325 रूप्यकैः च विक्रीता।
   (b) एकः शीतकः (रेफ्रीज़रेटर) 12000 रूप्यकैः क्रीतः 13500 रूप्यकैः च विक्रीतः।
   (c) एका कपाटिका 2500 रूप्यकैः क्रीता 3000 रूप्यकैः च विक्रीता।
   (d) एकम् अधोवस्त्रम् (स्कर्ट) 250 रूप्यकैः क्रीतम् 150 रूप्यकैः च विक्रीतम्।
2. प्रदत्तस्य प्रत्येकम् अनुपातस्य उभयोः पदयोः प्रतिशतरूपेण परिवर्तनं कुर्वन्तु।
   (a) 3:1 (b) 2:3:5 (c) 1:4 (d) 1:2:5

3. कस्यचित् नगरस्य जनसंख्या 25000 तः न्यूनीभूय 24500 मिता अभवत् । न्यूनतायाः प्रतिशतं ज्ञायताम् ।
4. अरूणः एकं कारयानम् 3, 50,000 रूप्यकैः अक्रीणात् । आगामि-वर्षे तस्य मूल्यं वर्धित्वा 3,70,000 रूप्यकात्मकम् अभवत् । कारयानस्य मूल्ये कियती प्रतिशतं वृद्धिः अभवत् इति ज्ञायताम् ।
5. अहम् एकं दूरदर्शनम् 10,000 रूप्यकैः क्रीत्वा 20 प्रतिशतलाभेन विक्रीतवान् । विक्रयेण अहं कियत् धनम् प्राप्तवान् ?
6. जूही एकं वस्त्रक्षालनयन्त्रं 13,500 रूप्यकैः विक्रीतवती तथा च विंशतिप्रतिशतं हानिं निरवहत् । सा तद् यन्त्रं कियता धनेन अक्रीणात् ।
7. (i) सुधाखण्ड-चूर्णे कैल्शियम, कार्बन्, ऑक्सीजन् इति एतेषाम् अनुपातः 10:3:12 इति रूपेण विद्यते । अस्मिन् कार्बन् इत्यस्य मात्रा प्रतिशतरूपेण ज्ञायताम् ।
   (ii) यदि एकस्यां कार्बन्-यष्टौ कार्बन्-मात्रा 3 gm मिता अस्ति तदा तस्याः सम्पूर्णः भारः कियान् अस्ति ?
8. अमीना एकं पुस्तकं 275 रूप्यकैः क्रीत्वा तत् 15 प्रतिशतहानौ विक्रीणीते । पुस्तकस्य विक्रयमूल्यं ज्ञायताम् ।
9. प्रत्येकस्यां दशायाम् वर्षत्रयानन्तरं कियत् मिश्रधनं देयं भविष्यति ?
   (a) मूलधनम् = 1200 रूप्यकाणि मानं च 12% वार्षिकम्
   (b) मूलधनम्= 7500 रूप्यकाणि मानं च 5% वार्षिकम्
10. 56000 रूप्यकेषु द्विवर्षानन्तरं केन मानेन 280 रूप्यकाणां साधारणकुसीदं देयं भविष्यति ?
11. मीना नवप्रतिशत-वार्षिकमानेन एकवर्षानन्तरं पञ्चचत्वारिंशत् (45) रूप्यकाणि कुसीदरूपेण अयच्छत् । सा कियत् धनम् ऋणरूपेण अगृह्णात् ?

अस्माभिः का चर्चा कृता?

1. स्वकीये दैनिकजीवने वयं प्रायः द्वयोः राश्योः मध्ये तुलनां कुर्मः एव । इमे राशयः औन्नत्यम्, भारः, वेतनम्, प्राप्ताङ्काः इत्यादिरूपैः भवितुं शक्नुवन्ति ।
2. ययोः औन्नत्यं 150 सेण्टटीमीटरमितम् अथ च 75 सेण्टीमीटरमितम् अस्ति तयोः द्वयोः व्यक्तित्वयोः तुलनां कृत्वा वयम् एतद् औन्नत्यम् 150 : 75 अथवा 2 :1 इति अनुपातरूपेण लिखामः ।
3. द्वयोः अनुपातयोः तुलना तौ समानहरेषु भिन्नेषु परिवर्त्य कर्तुं शक्यते । यदि उभे समानहरभिन्ने समाने स्तः तदा वयं वक्तुं शक्नुमः यद् उभौ अनुपातौ अपि तुल्यौ अनुपातौ स्तः ।
4. यदि द्वौ अनुपातौ तुल्यौ स्तः तदानीं तयोः चत्वारि पदानि एकं समानुपातं निर्मान्ति । उदाहरणार्थं द्वौ अनुपातौ 8:2 एवञ्च 16:4 तुल्यौ स्तः, अतः 8, 2, 16 तथा च 4 एते समानुपाते सन्ति ।
5. प्रतिशतम् अपि तुलनायाः एकः विधिः अस्ति । भिन्नानि येषां हरे शतम् (100) अस्ति तेषाम् अंशाः प्रतिशतं प्रकटयन्ति ।
   प्रतिशतम् इत्यस्य अर्थः भवति प्रत्येकं शतम् अधिकृत्य ।
6. भिन्नानां प्रतिशतरूपेण परिवर्तनं कर्तुं शक्यते प्रतिशतं च भिन्नेषु परिवर्तयितुं शक्यते ।
   उदाहरणार्थम् 1/4=1/4×100%=25% तथा, 75%=75/100=3/4 इति

7. दशमलवभिन्नस्य अपि प्रतिशतरूपेण परिवर्तनं कर्तुं शक्यते प्रतिशतं च दशमलवे परिवर्तयितुं शक्यते।

$0.25 = 0.25 \times 100\% = = 25\%$ इति

8. प्रतिशतम् अस्माकं दैनिकजीवने व्यापकतया उपयुज्यते -

(a) यदा वयं कस्यचित् राशेः प्रतिशतं जानीमः तदा वयं तं सम्पूर्णराशिं ज्ञातुं शक्नुमः।

(b) यदि अस्माकं पार्श्वे कस्यचित् राशेः अनुपातः भागेषु दत्तः स्यात् तदा वयं तेषां प्रतिशतरूपेण अपि परिवर्तनं कर्तुं शक्नुमः ।

(c) कस्यचिद् राशेः व्यववृद्धिः अभिवृद्धिः च प्रतिशतरूपेण दर्शयितुं शक्यते ।

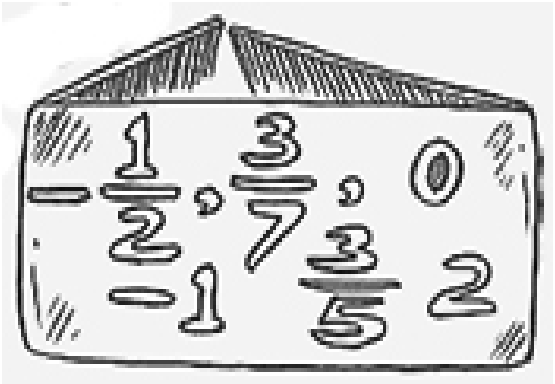
(d) कस्यचित् वस्तुनः क्रये विक्रये च सञ्जातं लाभं हानिम् वा अपि प्रतिशतरूपेण दर्शयितुं शक्नुमः ।

(e) ऋणरूपेण गृहीतस्य धनस्य कुसीदं परिकलयितुं तस्य मानं प्रतिशतरूपेण एव दीयते । उदाहरणार्थम् 800 रूप्यकाणि वर्षत्रयस्य कृते द्वादश-प्रतिशतकुसीदमानेन ऋणरूपेण स्वीकृतानि ।

परिमेयसङ्ख्याः

अध्यायः 9

9.1 भूमिका



भवद्भिः सङ्ख्यानाम् अध्ययनं स्वीयपरिवेशस्य वस्तूनां गणनात् प्रारब्धम्। अस्मिन् कार्ये प्रयुक्ताः सङ्ख्याः गणनसङ्ख्याः (countingnumbers) अथवा प्राकृतसङ्ख्याः (natural numbers) इति कथिताः। 1, 2,3,4, --- इति एताः प्राकृतसंख्याः सन्ति। प्राकृतसङ्ख्यासु शून्ये (0) सम्मेलिते सति अस्माभिः 0,1,2,3,--- इति पूर्णसङ्ख्याः (whole numbers) प्राप्ताः। तत्पश्चात् पूर्णाङ्कम् (integers) प्राप्तुं पूर्णसङ्ख्यासु प्राकृत-सङ्ख्यानाम् ऋणात्मकाः (negatives) सम्मेलिताः - 3,-2,-1, 0,-1,-2,- 3 --- इत्येते पूर्णाङ्काः सन्ति। अनेन प्रकारेण वयं सङ्ख्यापद्धतेः (number system) प्राकृतसङ्ख्यातः पूर्णसङ्ख्यापर्यन्तं पूर्णसङ्ख्यातः च पूर्णाङ्कपर्यन्तं विस्तारं कृतवन्तः।

भवतां परिचयः भिन्नैः सह अपि कारितः। इमाः $\frac{\text{अंशः}}{\text{हरः}}$ $\left(\frac{\text{numerator}}{\text{denominator}}\right)$ इति प्रकारकाः संख्याः भवन्ति यत्र अंशः शून्यम् अथवा एकः धनात्मकः पूर्णाङ्कः भवति तथा च हरः एकः धनात्मकः पूर्णाङ्कः भवति। भवन्तः द्वयोः भिन्नयोः तुलनां कृतवन्तः। तयोः समतुल्यानि भिन्नानि अपि ज्ञातानि तानि आधारीकृत्य च योगः, व्यवकलनम्, गुणनम् एवं च विभाजनम् इति चतसृणाम् आधारभूत-संक्रियाणाम् अध्ययनं कृतम्।

अस्मिन् अध्याये वयं संङ्ख्यापद्धतेः इतोऽपि विस्तारं करिष्यामः। वयं परिमेयसङ्ख्यानां (rational numbers) परिचयं दत्त्वा ताः आधारीकृत्य योगः, व्यवकलनम्, गुणनम् अथ च विभाजनम् इति सङ्क्रियाणाम् अध्ययनं करिष्यामः।

9.2 परिमेयसङ्ख्यानाम् आवश्यकता

वयं पूर्वमेव दृष्टवन्तः स्मः यत् केन प्रकारेण सङ्ख्याभिः सम्बद्धाः विपरीत-स्थितीः अभिव्यक्तीकर्तुं पूर्णाङ्कानां प्रयोगः कर्तुं शक्यते। उदाहरणार्थं यदि कस्यचित् स्थानस्य दक्षिणभागीयः 3 किलोमीटरमितः अन्तरालः 3 इति अङ्कद्वारा व्यक्तीक्रियेत तदा तस्मात् एव स्थानात् वामभागीयः 5 किलोमीटरमितः अन्तरालः -5 इत्यनेन व्यक्तीकर्तुं शक्यते।

यदि150 रूप्यकाणां लाभः 150 द्वारा व्यक्तीक्रियेत तदा 100 रूप्यकाणां हानिः –100 इत्यनेन व्यक्तीकर्तुं शक्यते।

एवम्भूताः अनेकाः स्थितयः भवन्ति याभिः भिन्नात्मक-सङ्ख्याः (भिन्नानि) सम्बद्धाः भवन्ति। किं वयं समुद्रतलात् उपरितनं 750 मीटरमितम् औन्नत्यं $\frac{3}{4}$ किलोमीटरद्वारा व्यक्तीकर्तुं शक्नुमः ? किं वयं

समुद्रतलात् अधस्तनीं 750 मीटरमितां गहनतां किलोमीटरद्वारा व्यक्तीकर्तुं शक्नुमः ? किं वयं समुद्रतलस्य अधतनीं $\frac{3}{4}$ किलोमीटरमितां गहनतां $\frac{3}{4}$ द्वारा व्यक्तीकर्तुं शक्नुमः ? वयं द्रष्टुं शक्नुमः यत् $\frac{3}{4}$ इति नैव तु एकः पूर्णाङ्कः अस्ति नैव च एकं भिन्नम् अस्ति। एतादृशीः संख्याः सम्मेलयितुम् एतद् आवश्यकम् अस्ति यद् वयं सङ्ख्यापद्धतेः विस्तारं करवाम।

9.3 परिमेय-सङ्ख्या नाम किम् अस्ति ?

'परिमेय' (rational) इति शब्दः 'अनुपात' (ratio) इत्यस्मात् पदात् उत्पन्नः। 3:2 इत्येतद् $\frac{3}{2}$ इति रूपेण

अपि लेखितुं शक्यते। अत्र 3 तथा च 2 इति प्राकृतसङ्ख्ये स्तः।

अनेन एव प्रकारेण p तथा च q इति द्वयोः पूर्णाङ्कयोः $(q \neq 0)$ p :q इति अनुपातः $\frac{p}{q}$ इति रूपेण अपि लेखितुं शक्यते। एतत् तत् एव रूपम् अस्ति यस्मिन् परिमेयसङ्ख्याः व्यक्तीक्रियन्ते।

एका परिमेयसंख्या एतादृश्याः संख्यायाः रूपेण परिभाष्यते या $\frac{p}{q}$ इत्यनेन रूपेण व्यक्तीकर्तुं शक्येत, यत्र p तथा च q इति पूर्णाङ्कौ स्तः तथा च $q \neq 0$ इति वर्तते।

अनेन प्रकारेण $\frac{4}{5}$ एका परिमेयसङ्ख्या अस्ति। यत्र $p = 4$ एवञ्च $q= 5$ इति अस्ति।

किम् $\frac{-3}{4}$ अपि एका परिमेयसङ्ख्या अस्ति ? आम्, यतोहि $p = -3$ तथा च $q= 4$ पूर्णाङ्कः अस्ति।

भवद्भिः $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}$, $1\frac{2}{3}$ इत्यादीनि अनेकानि भिन्नानि दृष्टानि। सर्वाणि भिन्नानि एव परिमेयसङ्ख्याः

भवन्ति। किं भवन्तः अस्य कारणं वक्तुं शक्नुवन्ति ? 0.5, 2.3,0.333 इत्यादि-दशमलवसङ्ख्यानां विषये किं कथयितुं शक्यते ? एवंविधा प्रत्येकं सङ्ख्या एकसामान्यभिन्नरूपेण लेखितुं शक्यते अतश्च इमाः परिमेयसङ्ख्याः सन्ति। उदाहरणार्थम्, $0.5 = \frac{5}{10}$, $2.3 = \frac{23}{10}$, $0.333 = \frac{333}{1000}$ इत्यादि।

अंशः हरः च

$\frac{p}{q}$ इत्यत्र पूर्णाङ्कः p अंशः अस्ति पूर्णाङ्कः च $q(q\neq0)$ हरः अस्ति।

प्रयासं कुर्वन्तु

1. 1. किं 2/(-3) इति एका परिमेयसङ्ख्या अस्ति ? अस्मिन् विषये विचारयन्तु।

2. दशपरिमेयसङ्ख्यानाम् एकां सूचीं निर्मान्तु।

अनेन प्रकारेण, $\frac{-3}{7}$ इत्यत्र -3 इति अंशः अस्ति अथ च 7 इति हरः अस्ति।

एतादृशीः पञ्च परिमेयसङ्ख्याः लिखन्तु, यासु एकैकस्याः

(a) अंशः एकः ऋणात्मकः पूर्णाङ्कः स्यात् हरः च एकः धनात्मकः पूर्णाङ्कः भवेत्।

(b) अंशः एकः धनात्मकः पूर्णाङ्कः स्यात् हरः च एकः ऋणात्मकः पूर्णाङ्कः भवेत्।

(c) अंशः हरः च उभौ अपि ऋणात्मकौ पूर्णाङ्कौ भवेताम्।

(d) अंशः हरः च उभौ अपि धनात्मकौ पूर्णाङ्कौ भवेताम्।

- किं पूर्णाङ्काः अपि परिमेयसङ्ख्याः सन्ति ?

कोऽपि पूर्णाङ्कः एकपरिमेयसङ्ख्या मन्तुं शक्यते। उदाहरणार्थं पूर्णाङ्कः –5 एका परिमेयसङ्ख्या अस्ति,यतोहि भवन्तः एताम् $\frac{-5}{1}$ इत्यनेन रूपेण लेखितुं शक्नुवन्ति। पूर्णाङ्कं शून्यम् (0) अपि $0 = \frac{0}{2}$ अथवा $\frac{0}{7}$ इत्यादिरूपेण लेखितुं शक्यते। अतः एषा अपि एका परिमेयसङ्ख्या अस्ति।

अनेन प्रकारेण, परिमेयसङ्ख्यासु पूर्णाङ्काः भिन्नाः च सम्मिलिताः भवन्ति।

समतुल्याः परिमेय-सङ्ख्याः

एकां परिमेयसङ्ख्यां पृथक्-पृथक् अंशानां हराणां च प्रयोगं कुर्वन्तः लेखितुं शक्नुमः।

उदाहरणार्थम्, $\frac{-2}{3}$ इति परिमेयसङ्ख्यां विचारयन्तु।

$\frac{-2}{3} = \frac{-2\times2}{3\times2} = \frac{-4}{6}$। वयं पश्यामः यत् $\frac{-2}{3}$ इति तत् एव अस्ति यत् $\frac{-4}{6}$ इति अस्ति।

सममेव $\frac{-2}{3} = \frac{(-2)\times(-5)}{(3\times(-5)} = \frac{10}{-15}$ अस्ति। अतः $\frac{-2}{3}$ तत् एव अस्ति यत् $\frac{10}{-15}$ इति अस्ति।

अनेन प्रकारेण, $\frac{-2}{3} = \frac{-4}{6} = \frac{10}{-15}$ इति अस्ति। एतादृश्यः परिमेयसङ्ख्याः याः परस्परं समानाः स्युः परस्परं समतुल्याः (equivalent) अथवा तुल्याः इति कथ्यन्ते।

पुनः, $\frac{10}{-15} = \frac{-10}{15}$ (कथम् ?)

प्रयासं कुर्वन्तु

रिक्तस्थानानि पूरयन्ताम् :

(i) $\frac{5}{4} = \frac{}{16} = \frac{25}{} = \frac{-15}{}$

(ii) $\frac{-3}{7} = \frac{}{14} = \frac{9}{} = \frac{-6}{7}$

यदि कस्याश्चित् परिमेयसङ्ख्यायाः अंशं हरं च एकेनैव शून्येतरेण पूर्णाङ्केन गुणयामः तर्हि वयं प्रदत्तायाः परिमेयसङ्ख्यायाः समतुल्याम् (अथवा तुल्याम्) परिमेयसङ्ख्यां प्राप्नुमः। एतत् प्रायशः यथा समतुल्यभिन्नं प्राप्यते तद्वद् एव अस्ति।

गुणनेन इव एकेनैव शून्येतरेण पूर्णाङ्केन अंशं हरं च विभाज्य अपि समतुल्याः परिमेयसङ्ख्याः प्राप्यन्ते।

उदाहरणार्थम्,

$\frac{10}{-15} = \frac{10\div(-5)}{-15\div(-5)} = \frac{-2}{3}$, $\frac{-12}{24} = \frac{-12\div12}{(24\div12)} = \frac{-1}{2}$

वयम् $\frac{-2}{3}$ इत्येतम् $\frac{-2}{3}, \frac{-10}{15}$ इत्येतम् $-\frac{10}{15}$ इत्यादिरूपेण लिखामः।

9.4 धनात्मिकाः ऋणात्मिकाः च परिमेयसङ्ख्याः

$\frac{2}{3}$ परिमेयसङ्ख्यां विचारयन्तु। अस्याः सङ्ख्यायाः अंशः हरः च उभौ धनात्मकौ पूर्णाङ्कौ स्तः। एतादृशी परिमेयसङ्ख्या एका धनात्मिका परिमेयसङ्ख्या इति उच्यते।

प्रयासं कुर्वन्तु

1. किम् 5 एका धनात्मिका परिमेयसङ्ख्या अस्ति ?
2. पञ्च अन्याः धनात्मिकाः परिमेयसङ्ख्याः लिखन्तु।

अतः, $\frac{3}{8}, \frac{5}{7}, \frac{2}{9}$ इत्यादयः धनात्मिकाः परिमेयसङ्ख्याः सन्ति।

$\frac{-3}{5}$ इत्यस्य अंशः एकः ऋणात्मकः पूर्णाङ्कः अस्ति अपरञ्च अस्य हरः एकः धनात्मकः पूर्णाङ्कः अस्ति। एतादृशी परिमेयसङ्ख्या **ऋणात्मिका-परिमेयसङ्ख्या** इति कथ्यते।

अतः $\frac{-5}{7}, \frac{-3}{8}, \frac{-9}{5}$ इत्यादयः ऋणात्मिकाः परिमेयसङ्ख्याः सन्ति।

प्रयासं कुर्वन्तु

1. किम् -8 एका ऋणात्मिका परिमेयसङ्ख्या अस्ति।
2. पञ्च अन्याः ऋणात्मिकाः परिमेयसङ्ख्याः लिखन्तु।

- किम् $\frac{8}{-3}$ इति एका ऋणात्मिका सङ्ख्या अस्ति ? वयं जानीमः यत् $\frac{8}{-3} = \frac{8\times(-1)}{-3\times(-1)}$ $= \frac{-8}{3}$ इति अस्ति, तथा च $\frac{-8}{3}$ एका ऋणात्मिका परिमेयसङ्ख्या अस्ति। अतः $\frac{8}{-3}$ एका ऋणात्मिका परिमेयसङ्ख्या अस्ति।
- अनेन प्रकारेण, $\frac{5}{-7}, \frac{6}{-5}, \frac{2}{-9}$ इत्यादयः सर्वाः **ऋणात्मिकाः परिमेयसङ्ख्याः** सन्ति। ध्यानं यच्छन्तु यत् एतासाम् अंशाः धनात्मकाः सन्ति तथा च हराः ऋणात्मकाः सन्ति।
- सङ्ख्या 0 न तु एका धनात्मिका परिमेयसङ्ख्या अस्ति न च एका ऋणात्मिका परिमेयसङ्ख्या अस्ति।
- $\frac{-3}{-5}$ अस्य विषये किं वक्तुं शक्यते ?

भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् $\frac{3}{5} = \frac{3\times(1)}{5\times(1)} = \frac{3}{5}$ अस्ति। अतः, $\frac{3}{5}$ एका धनात्मिका परिमेयसङ्ख्या अस्ति।

अनेन प्रकारेण $\frac{2}{5}, \frac{5}{3}$ इत्यादयः परिमेयसङ्ख्याः सन्ति।

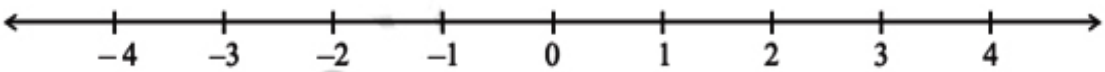
प्रयासं कुर्वन्तु

निम्नलिखितासु कतमाः सङ्ख्याः ऋणात्मिकाः परिमेयसङ्ख्याः सन्ति ?

(i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{5}{7}$ (iii) $\frac{3}{5}$ (iv) 0 (v) $\frac{6}{11}$ (vi) $\frac{2}{9}$

9.5 एकस्यां रेखायां परिमेयसङ्ख्याः

भवन्तः एतत् तु जानन्ति एव यत् कस्याञ्चित् सङ्ख्यारेखायां पूर्णाङ्काः कथं निरूप्यन्ते। आयान्तु एतादृशीम् एकां रेखाम् आलिखामः।



शून्यस्य दक्षिणस्थान् बिन्दून् + इति चिह्नेन व्यक्तीकुर्मः एते च बिन्दवः धनात्मकान् पूर्णाङ्कान् दर्शयन्ति।

शून्यस्य वामस्थान् बिन्दून् – इति चिह्नेन व्यक्तीकुर्मः तथा च एते बिन्दवः ऋणात्मकान् पूर्णाङ्कान् दर्शयन्ति। सङ्ख्यारेखायां भिन्नानां निरूपणं कथं क्रियते इति एतद् अपि भवन्तः जानन्ति।

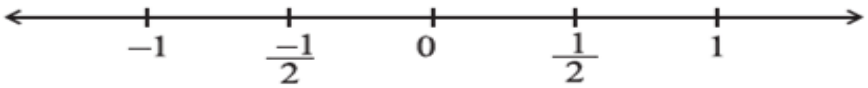
आयान्तु अधुना पश्याम यत् परिमेयसङ्ख्यानां सङ्ख्यारेखायां निरूपणं कथं कर्तुं शक्यते ?

आगच्छन्तु सङ्ख्यारेखायां $-\frac{1}{2}$ इत्येतां सङ्ख्यां निरूपयामः।

यथाहि धनात्मक-पूर्णाङ्कानां स्थितिविषये कृतम् आसीत् तथैव धनात्मक-परिमेयसङ्ख्यानां निरूपणं शून्यस्य दक्षिणभागे करिष्यते तथा च ऋणात्मक-परिमेयसङ्ख्यानां निरूपणं शून्यस्य वामभागे करिष्यते। भवन्तः $-\frac{1}{2}$ इत्यस्य निरूपणं शून्यस्य कस्यां दिशि करिष्यन्ति ? यतो हि एषा ऋणात्मिका परिमेयसङ्ख्या वर्तते इति कारणेन एषा शून्यात् वामदिशं प्रति अङ्क्यिष्यन्ते।

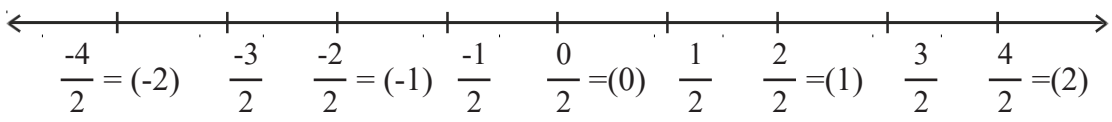
भवन्तः जानन्ति यत् सङ्ख्यारेखायां पूर्णाङ्कानाम् निरूपणकाले उत्तरोत्तराः पूर्णाङ्काः समानान्तरालेन अङ्क्यन्ते। सममेव 1 तथा च - 1 इति सङ्ख्ययोः युग्मः शून्य-सङ्ख्यातः समदूरस्थः वर्तते। अनेन प्रकारेण 2 तथा च –2 अन्यच्च 3 तथा च –3 अपि समदूरस्थाः युग्माः सन्ति।

तेन एव प्रकारेण, $\frac{1}{2}$ तथा च $-\frac{1}{2}$ इति परिमेयसङ्ख्ये अपि शून्यात् समदूरस्थे भविष्यतः। वयं जानीमः यत् $\frac{1}{2}$ इति परिमेयसङ्ख्या केन प्रकारेण सङ्ख्यारेखायाम् अङ्क्यते। एषा परिमेयसङ्ख्या तस्मिन् बिन्दौ अङ्क्यते, यः 0 तथा च 1 इति एताभ्यां समानान्तराले (मध्ये) वर्तते अर्थात् शून्यस्य एकस्य च अर्धान्तराले अस्ति। अतः, $-\frac{1}{2}$ इत्यस्य अङ्कनं 0 तथा च -1 इत्येताभ्याम् अर्धान्तराले करिष्यते।



वयं जानीमः यत् $\frac{3}{2}$ इति सङ्ख्यारेखायां कथम् अङ्क्यते। एषा संख्या शून्यस्य दक्षिणं प्रति 1 तथा च 2 इत्येतयोः मध्ये अर्धान्तराले अङ्क्यते। आगच्छन्तु इदानीं सङ्ख्यारेखायाम् $\frac{-3}{2}$ इति अङ्कयामः। एतत् शून्यस्य वामं प्रति तावत् दूरम् अङ्कयिष्यते यावान् 0 तथा च $\frac{3}{2}$ मध्ये अन्तरालः अस्ति।

अवरोहिक्रमे $\frac{-1}{2}$, $\frac{-2}{2}$ (=-1), $\frac{-3}{2}$, $\frac{-4}{2}$ (=-2) इति प्राप्ताः सन्ति। अनेन प्रदर्शितं भवति यत् $\frac{-3}{2}$ इति -1 एवञ्च -2 इत्येतयोः मध्ये अर्धान्तराले स्थितम् (अङ्कितम्) भविष्यति।



एवमेव, $\frac{-5}{2}$ तथा च $\frac{-7}{2}$ इति सङ्ख्यारेखायाम् अङ्कयन्तु।

अनेन प्रकारेण, $-\frac{1}{3}$ इति संख्या सङ्ख्यारेखायाम् शून्यस्य वामतः तावति अन्तराले एव

भविष्यति यावान् अन्तरालः शून्यस्य दक्षिणभागे वर्तते।

अतः यथा उपरि कृतम्, $-\frac{1}{3}$ इत्येतत् सङ्ख्यारेखायां निरूपितुं शक्यते।

एकवारं यदि वयम् $-\frac{1}{3}$ इति संख्यायाः सङ्ख्यारेखायां निरूपणं कथं क्रियते इति अधिगच्छामः तर्हि वयम् $-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}$, ... इत्यादिसंख्यानां निरूपणं सङ्ख्यारेखायां कर्तुं शक्नुमः। विभिन्न-हरैः युक्ताः अन्याः परिमेयसङ्ख्याः अपि अनेन एव प्रकारेण सङ्ख्यारेखायां निरूपयितुं शक्नुमः।

9.6 मानकरूपेण परिमेयसङ्ख्याः

अधोलिखिताः परिमेयसङ्ख्याः पश्यन्तु

$$\frac{3}{5}, \frac{-5}{8}, \frac{2}{7}, \frac{-7}{11}$$

एतासां सर्वासां परिमेयसङ्ख्यानां हराः धनात्माकाः पूर्णाङ्काः सन्ति तथा च अंशानां हराणाम् अथ च मध्ये केवलम् एकः सार्वगुणनखण्डः (common factor) अस्ति। सममेव ऋणात्मकचिह्नम् (-) केवलम् अंशे एव स्थितम् अस्ति। एतादृशः परिमेयसङ्ख्याः मानकरूपेण व्यक्ताः परिमेयसङ्ख्याः इति कथ्यन्ते।

यदि कस्यश्चित परिमेयसंख्यायाः हरः धनात्मकः पूर्णाङ्कः भवेत् तथा च तस्याः अंशे हरे च 1 तः अतिरिक्तः कश्चन सार्वगुणनखण्डः न स्यात् तर्हि सा परिमेयसङ्ख्या मानकरूपेण व्यक्ताः इति कथ्यते यदि कापि परिमेयसंख्या मानकरूपेण नास्ति तदा सा तस्याः मानकरूपेण व्यक्तीकर्तुं शक्यते।

स्मरन्तु यत् भिन्नानि तदीय-न्यूनतमरूपैः अभिव्यक्तीकर्तुम् अस्माभिः तेषाम् अंशाः एवं च हराः एकेनैव शून्येतरेण पूर्णाङ्केन विभाजिताः आसन्। वयम् अस्य विधेः प्रयोगं परिमेयसङ्ख्यानां तदीय-मानकरूपैः अभिव्यक्त्यर्थं करिष्यामः।

उदाहरणम् 1 $\frac{-45}{30}$ इति मानकरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु (व्यक्तं कुर्वन्तु)

समाधानम् अस्माकं पार्श्वे अस्ति $\frac{-45}{30} = \frac{-45\div3}{30\div3} = \frac{-15}{10} = \frac{-15\div5}{10\div5} = \frac{-3}{2}$

वयं वारद्वयं भागं दत्तवन्तः। प्रथमवारं 3 इति संख्यया पुनश्च 5 इति संख्यया। अस्य समाधानम् अधोनिर्दिष्ट-विधिना अपि कर्तुं शक्यते स्म -

$$\frac{-45}{30} = \frac{-45\div15}{30\div15} = \frac{-3}{2}$$

अस्मिन् उदाहरणे पश्यन्तु यत् अत्र 15 इति संख्या 45 तथा च 30 इति संख्ययोः महत्तम-समापवर्तिका अस्ति।

अनेन प्रकारेण कामपि परिमेयसङ्ख्यां मानकरूपेण व्यक्तिकर्तुं वयं तस्याः अंशं हरं च तयोः महत्तमसमापवर्तकेण यदि किमपि ऋणचिह्नं भवेत् तस्य अवधानं विना विभाजयाम। (ऋणचिह्नविषये किमर्थम् अवधानं न दातव्यम् इति कारणं वयम् आगामिकक्ष्यासु ज्ञास्यामः।) यदि ऋणचिह्नं हरे अस्ति तर्हि –म.स.द्वारा भागं यच्छन्तु)

उदाहरणम् 2 मानकरूपेण परिवर्तयन्तु

(i) $\frac{36}{-24}$ (ii) $\frac{-3}{-15}$

समाधानम्

(i) 36 तथा च 24 एतयोः महत्तमः समापवर्तकः 12 अस्ति।

अतः यदि अंशं हरं च –12 द्वारा विभक्तीकुर्मः तर्हि मानकरूपं प्राप्स्यामः।

अनेन प्रकारेण, $\frac{36}{-24} = \frac{36\div(-12)}{24\div(-12)} = \frac{-3}{2}$

(ii) 3 तथा च 15 एतयोः महत्तमः समापवर्तकः 3 अस्ति।

अनेन प्रकारेण, $\frac{-3}{-15} = \frac{-3\div(-3)}{(-15\div(-3)} = \frac{1}{5}$

प्रयासं कुर्वन्तु

मानकरूपं ज्ञायताम् (i) $\frac{-18}{45}$ (ii) $\frac{-12}{18}$

9.7 परिमेयसङ्ख्यानां तुलना

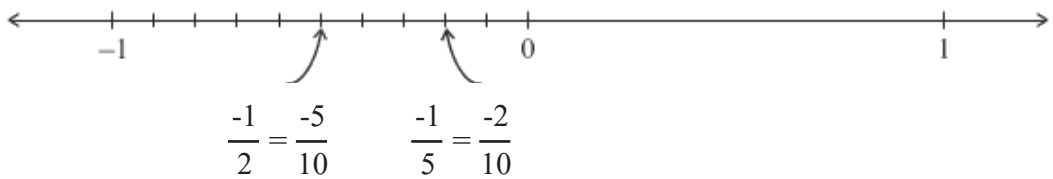
वयम् एतत् जानीमः यत् द्वयोः पूर्णाङ्कयोः द्वयोः च भिन्नयोः तुलना कथं क्रियते तथा च एतदपि जानीमः यत् एतयोः कः गुरूतरः अस्ति कः च लघुतरः वर्तते। आयान्तु इदानीं परिमेयसङ्ख्यानां तुलना कथं कर्तुं शक्यते इति पश्याम।

- $\frac{2}{3}$ तथा च $\frac{5}{7}$ सदृश्योः द्वयोः धनात्मक-परिमेयसंख्ययोः तुलना अपि तेनैव प्रकारेण कर्तुं शक्यते येन प्रकारेण वयं भिन्नानां स्थितीनां विषये पूर्वमेव अधीतवन्तः स्मः।

- सङ्ख्यारेखायाः प्रयोगं कुर्वती मेरी $-\frac{1}{2}$ तथा च $-\frac{1}{5}$ इत्येतयोः द्वयोः ऋणात्मक-परिमेयसङ्ख्ययोः तुलनां कृतवती। सा जानाति स्म यत् द्वयोः पूर्णाङ्कयोः सः पूर्णाङ्कः गुरूतरः आसीत् यः अपरस्य पूर्णाङ्कस्य दक्षिणे स्थितः आसीत्।

  उदाहरणार्थम्, सङ्ख्यारेखायाः उपरि 5 इति पूर्णाङ्कः 2 इति पूर्णाङ्कस्य दक्षिणे स्थितः अस्ति तथा च $5 > 2$ अस्ति। सङ्ख्यारेखायां –2 इति पूर्णाङ्कः - 5 इति पूर्णाङ्कस्य दक्षिणे स्थितः अस्ति तथा च $-2 > -5$ अस्ति।

  सा अस्य विधेः प्रयोगं परिमेयसङ्ख्यानां कृते अपि अकरोत्। सा जानाति स्म यत् सङ्ख्यारेखायां परिमेयसङ्ख्याः कथं निरूप्यन्ते। सा $-\frac{1}{2}$ एवञ्च $-\frac{1}{5}$ इति अधः प्रदर्शितानुसारम् अङ्कितवती।



$\frac{-1}{2} = \frac{-5}{10}$ $\frac{-1}{5} = \frac{-2}{10}$

किं सा बिन्दुद्वयं सम्यक् प्रकारेण अङ्कितवती ? सा कथं किमर्थं च $-\frac{1}{2}$ इत्यस्य $\frac{-5}{10}$ इति रूपेण तथा च $-\frac{1}{5}$ इत्यस्य $\frac{-2}{10}$ इति रूपेण परिवर्तनं कृतवती ?

सा ज्ञातवती यत् $-\frac{1}{5}$ इति परिमेयसङ्ख्या $-\frac{1}{2}$ इति परिमेयसङ्ख्यायाः दक्षिणे अस्ति । अनेन प्रकारेण, $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{2}$ अस्ति अथवा $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{5}$ अस्ति ।

किं भवन्तः $-\frac{3}{4}$ एवञ्च $-\frac{2}{3}$ इत्येतयोः तथा च $-\frac{1}{2}$ एवञ्च- $\frac{1}{5}$ इत्येतयोः तुलनां कर्तुम् अर्हन्ति ?

वयं भिन्नानां स्वकीयाध्ययनेन एतत् जानीमः यत् $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ इति अस्ति । सममेव मेरी $-\frac{1}{2}$ तथा च $-\frac{1}{5}$ एतयोः कृते किं प्राप्तवती ? किम् एतत् अस्य साक्षात् विपरीतं नासीत् ।

भवन्तः पश्यन्ति यत् $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$ अस्ति, परन्तु $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{5}$ अस्ति ।

किं भवन्तः $-\frac{3}{4}$ एवञ्च $-\frac{2}{3}$ तथा च $-\frac{1}{2}$ एवञ्च- $\frac{1}{5}$ इति एतेषां कृते अपि एतादृशम् एव परिणामं पश्यन्ति ?

मेरी स्मरति यत् सा पूर्णाङ्केषु अपठत् यत् $4 > 3$ अस्ति, किन्तु $-4 < -3$ अस्ति $5 > 2$ इति अस्ति परन्तु $-5 < -2$ इत्यादिः ।

- ऋणात्मक-परिमेयसङ्ख्यानां युग्मानां स्थितिः अपि एवमेव अस्ति । द्वयोः ऋणात्मक-परिमेयसङ्ख्ययोः तुलनार्थम्, वयं तयोः तुलनां तदीय-चिह्नानि परित्यजन्तः कुर्मः तत्पश्चात् असमिकायाः (inequality) चिह्नं परिवर्तयामः।

उदाहरणार्थम्, $-\frac{7}{5}$ एवञ्च $-\frac{5}{3}$ एतयोः तुलनार्थम् आदौ वयम् $\frac{7}{5}$ एवञ्च $\frac{5}{3}$ इत्येतयोः तुलनां कुर्मः।

अस्माकं कृते $\frac{7}{5} < \frac{5}{3}$ इति प्राप्तं भवति अस्माच्च वयं निष्कर्षं प्राप्नुमः यत् $\frac{7}{5} > \frac{5}{3}$ इति अस्ति।

एतादृशानि पञ्च अन्यानि युग्मानि स्वीकुर्वन्तु पुनश्च तेषां तुलनां कुर्वन्तु ।

किं गुरूतरम् अस्ति $-\frac{3}{8}$ अथवा $-\frac{2}{7}$?; $-\frac{4}{3}$ अथवा $-\frac{3}{2}$?

कस्याश्चित् ऋणात्मिकायाः धनात्मिकायाः च परिमेयसङ्ख्यायाः तुलना सुस्पष्टा अस्ति । सङ्ख्यारेखायाम्, एका ऋणात्मक-परिमेयसङ्ख्या शून्यस्य वामभागे स्थिता भवति एका च धनात्मक-परिमेयसङ्ख्या शून्यस्य दक्षिणभागे स्थिता विद्यते । अतः एका ऋणात्मक-परिमेयसङ्ख्या सदैव धनात्मक-परिमेयसङ्ख्यातः ह्रस्वा भवति ।

इत्थमेव $\frac{2}{7} < \frac{1}{2}$ अस्ति ।

- $\frac{-3}{-5}$ एवञ्च $\frac{-2}{-7}$ इति परिमेयसङ्ख्ययोः तुलनार्थं प्रथमं तयोः परिमेयसङ्ख्ययोः मानकरूपेण परिवर्तनं कुर्वन्तु तत्पश्चात् तयोः तुलनां कुर्वन्तु।

उदाहरणम् 3 किम् $\frac{4}{-9}$ तथा च $\frac{-16}{36}$ इति एकामेव परिमेयसङ्ख्यां निरूपयतः ?

समाधानम् आम्, यतोहि $\frac{4}{-9} = \frac{4\times(-4)}{-9\times(-4)} = \frac{-16}{36}$ अथवा $\frac{-16}{36} = \frac{-16\div-4}{36\div-4} = \frac{4}{-9}$ इति अस्ति।

9.8 द्वयोः परिमेयसङ्ख्ययोः मध्ये परिमेयसङ्ख्याः

रेशमा 3 तथा च 10 इत्यनयोः मध्ये पूर्णसङ्ख्याः गणयितुम् इच्छति स्म। सा गतकक्ष्यासु एतत् ज्ञातवती आसीत् यत् 3 एवञ्च 10 इत्यनयोः मध्ये षट् पूर्णसङ्ख्याः भविष्यन्ति। अनेन एव प्रकारेण सा - 3 तथा च 3 इत्यनयोः मध्यस्थान् पूर्णाङ्कान् अपि ज्ञातुम् इच्छति स्म। -3 तथा च 3 इत्यनयोः मध्यस्थाः पूर्णाङ्काः -2,-1, 0, 1 तथा च 2 इति सन्ति। एवमेव -3 तथा च 3 मध्ये निश्चितरूपेण पञ्च (5) पूर्णाङ्काः सन्ति। किम् -3 तथा च -2 इत्यनयोः मध्ये कश्चन पूर्णाङ्कः अस्ति ? नहि - 3 तथा च – 2 इत्यनयोः मध्ये कश्चन अपि पूर्णाङ्कः नास्ति। द्वयोः क्रमागत-पूर्णाङ्कयोः मध्ये पूर्णाङ्कसङ्ख्या शून्या (0) भवति।
अनेन प्रकारेण वयं प्राप्नुमः यत् द्वयोः पूर्णाङ्कयोः मध्ये पूर्णाङ्कसङ्ख्या सीमिता परिमिता वा भवति।
किम् एतत् परिमेयसङ्ख्यानां स्थितौ अपि भविष्यति ?

रेशमा $\frac{-3}{5}$ तथा च $\frac{-1}{3}$ इति द्वे परिमेयसङ्ख्ये स्वीकृतवती।

सा एतयोः संख्ययोः परिवर्तनं समानहर-परिमेयसङ्ख्ययोः कृतवती।

अतः, $\frac{-3}{5} = \frac{-9}{15}$ तथा च $\frac{-1}{3} = \frac{-5}{15}$ इति अस्ति।

अस्माभिः प्राप्तम् अस्ति यत् $\frac{-9}{15} < \frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15} < \frac{-5}{15}$ अस्ति अथवा $\frac{-3}{5} < \frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15} < \frac{-1}{3}$ अस्ति।

एवम्प्रकारेण सा $\frac{-3}{5}$ तथा च $\frac{-1}{3}$ इत्येतयोः मध्यस्थाः परिमेयसङ्ख्याः $\frac{-8}{15}, \frac{-7}{15}, \frac{-6}{15}$ ज्ञातवती।

किम् $\frac{-3}{5}$ तथा च $\frac{-1}{3}$ इत्यनयोः मध्ये केवलमात्रम् $\frac{-8}{15}, \frac{-7}{15}, \frac{-6}{15}$ एतावत्यः एव परिमेयसङ्ख्याः वर्तन्ते ?

$\frac{-3}{5} = \frac{-18}{30}$ तथा च $\frac{-8}{15} = \frac{-16}{30}$ इति अस्माकं पार्श्वे अस्ति।

सममेव $\frac{-18}{30} < \frac{-17}{30} < \frac{-16}{30}$ अस्ति। अर्थात् $\frac{-3}{5} < \frac{-17}{30} < \frac{-8}{15}$ अस्ति।

अतः $\frac{-3}{5} < \frac{-17}{30} < \frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15} < \frac{-1}{3}$ इति अस्ति।

अनेन प्रकारेण $\frac{-1}{3}$ तथा च $\frac{-3}{5}$ इत्यनयोः मध्ये वयम् एकाम् अन्यां परिमेयसङ्ख्यां परिज्ञातुं सफलाः अभवाम।

एतं विधिं प्रयुज्य भवन्तः द्वयोः परिमेयसङ्ख्ययोः मध्ये यावतीः इच्छामः तावतीः परिमेयसङ्ख्याः ज्ञातुं शक्नुवन्ति।

उदाहरणार्थम्, $\frac{-3}{5}=\frac{-3\times30}{5\times30}=\frac{-90}{150}$ तथा च $\frac{-1}{3}=\frac{-1\times50}{3\times50}=\frac{-50}{150}$ इति अस्ति।

वयम् $\frac{-90}{150}$ तथा च $\frac{-50}{150}$ इत्यनयोः मध्ये अर्थात् $\frac{-3}{5}$ एवञ्च $\frac{-1}{3}$

इत्यनयोः मध्ये एकोनचत्वारिंशत् 39

परिमेयसङ्ख्याः $\frac{-89}{150}, \frac{-88}{150}, \frac{-87}{150}, \ldots\ldots\ldots \frac{-51}{150}$ इति प्राप्नुमः।

प्रयासं कुर्वन्तु

$\frac{-5}{7}$ तथा च $\frac{-3}{8}$ इत्यनयोः मध्ये पञ्च परिमेयसङ्ख्याः ज्ञातुं प्रयासं कुर्वन्तु ।

भवन्तः ज्ञास्यन्ति यत् एषा सूची कदापि समाप्ता न भविष्यति।

किं भवन्तः $\frac{-5}{7}$ तथा च $\frac{-8}{7}$ इत्यनयोः मध्येस्थिताः पञ्च परिमेयसङ्ख्याः लेखितुं शक्नुवन्ति ?

वयं द्वयोः परिमेयसङ्ख्ययोः मध्ये असीमिताः (अथवा अपरिमितरूपेण नैकाः) परिमेयसङ्ख्याः ज्ञातुं शक्नुवन्ति।

उदाहरणम् 4 – 2 तथा च – 1 इत्यनयोः मध्ये तिस्रः परिमेयसङ्ख्याः लिखन्तु।

समाधानम् आयान्तु –1 तथा च –2 इत्येते पञ्चहरपरिमेयसङ्ख्या-रूपैः लिखामः।

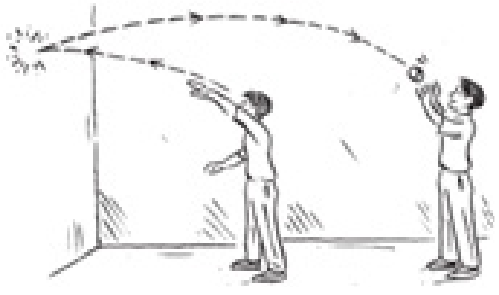
अस्माकं पार्श्वे अस्ति $-1=\frac{-5}{5}$ एवञ्च $-2=\frac{-10}{5}$ (-10)/5

अतः, $\frac{-10}{5}<\frac{-9}{5}<\frac{-8}{5}<\frac{-7}{5}<\frac{-6}{5}<\frac{-5}{5}$ इति अस्ति, अथवा $-2<\frac{-9}{5}<\frac{-8}{5}<\frac{-7}{5}<\frac{-6}{5}<-1$

– 2 तथा च –1 इत्यनयोः मध्ये तिस्रः परिमेयसङ्ख्याः $\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}$ इति भविष्यन्ति।

(भवन्तः $\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}$ तथा च $\frac{-6}{5}$ इत्येतासु याः काः अपि तिस्रः परिमेयसङ्ख्याः स्वीकर्तुं शक्नुवन्ति।)

उदाहरणम् 5 अधोलिखत-प्रतिरूपवत् अन्याः चतस्रः सङ्ख्याः लिखन्तु -



$\frac{-1}{3}, \frac{-2}{6}, \frac{-3}{9}, \frac{-4}{12}, \ldots\ldots$

समाधानम् अस्माभिः लब्धम्

$\frac{-2}{6}=\frac{-1\times2}{3\times2}, \frac{-3}{9}=\frac{-1\times3}{3\times3}, \frac{-4}{12}=\frac{-1\times4}{3\times4}$

अथवा $\frac{-1\times1}{3\times1}=\frac{-1}{3}, \frac{-1\times2}{3\times2}=\frac{-2}{6}, \frac{-1\times3}{3\times3}=\frac{-3}{9}, \frac{-1\times4}{3\times4}=\frac{-4}{12}$

अनेन प्रकारेण, वयम् एतासु सङ्ख्यासु एकं प्रतिरूपं पश्यामः।

$\frac{-1\times5}{3\times5}=\frac{-5}{15}, \frac{-1\times6}{3\times6}=\frac{-6}{18}, \frac{-1\times7}{3\times7}=\frac{-7}{21}$ इति अन्याः सङ्ख्याः भविष्यन्ति।

प्रश्नावली 9.1

1. अधोलिखित-परिमेयसङ्ख्यानां मध्ये पञ्च परिमेयसङ्ख्याः लिखन्तु

   (i) –1 तथा च 0 (ii) –2 तथा च –1 (iii) (-4)/5 एवञ्च (-2)/3 (iv) - 1/2 तथा च 2/3

2. अधोलिखित-प्रतिरूपेषु प्रत्येकस्मिन् अन्याः चतस्रः परिमेयसङ्ख्याः लिखन्तु

   (i) $\frac{-3}{5}, \frac{-6}{10}, \frac{-9}{15}, \frac{-12}{20}, \ldots\ldots$ (ii) $\frac{-1}{4}, \frac{-2}{8}, \frac{-3}{12}, \ldots\ldots\ldots$

   (iii) $\frac{-1}{6}, \frac{2}{-12}, \frac{3}{-18}, \frac{-4}{-24}, \ldots\ldots\ldots$ (iv) $\frac{-2}{3}, \frac{2}{-3}, \frac{4}{-6}, \frac{6}{-9}, \ldots\ldots\ldots$

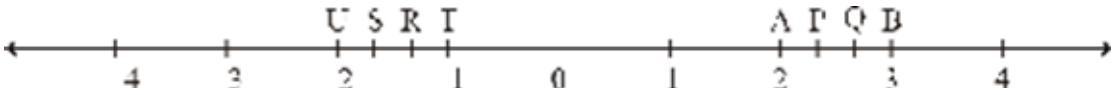
3. निम्नलिखतानां समतुल्याः चतस्रः परिमेयसङ्ख्याः लिखन्तु

   (i) $\frac{-2}{7}$ (ii) $\frac{5}{-3}$ (iii) $\frac{4}{9}$

4. एकां सङ्ख्यारेखाम् आलिखन्तु तस्याः उपरि निम्नलिखिताःपरिमेयङ्ख्याःलिखन्तु

   (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{-5}{8}$ (iii) $\frac{-7}{4}$ (iv) $\frac{7}{8}$

5. एकस्यां सङ्ख्यारेखायाम् P, Q, R, S, T, U, A तथा च B इति रेखाबिन्दवः अनेन प्रकारेण सन्ति यत् TR = RS = SU तथा च AP = PQ = QB इति अस्ति। P, Q, R तथा च S इत्येतैः द्वारा निरूपिताः परिमेयसङ्ख्याः लिखन्तु।



6. निम्नलिखतेषु कतमतानि युग्मानि एकामेव परिमेयसङ्ख्यां निरूपयन्ति ?

   (i) $\frac{-7}{21}$ तथा च $\frac{3}{9}$ (ii) $\frac{-16}{20}$ तथा च $\frac{20}{-25}$ (iii) $\frac{-2}{-3}$ तथा च $\frac{2}{3}$

   (iv) $\frac{-3}{5}$ तथा च $\frac{-12}{20}$ (v) $\frac{8}{-5}$ तथा च $\frac{-24}{15}$

   (vi) $\frac{1}{3}$ तथा च $\frac{-1}{9}$ (vii) $\frac{-5}{-9}$ तथा च $\frac{5}{-9}$

7. अधोलिखिताः परिमेयसङ्ख्याः तदीय-सरलतमरूपैः लिखन्तु

   (i) $\frac{-8}{6}$ (ii) $\frac{25}{45}$ (iii) $\frac{-44}{72}$ (iv) $\frac{-8}{10}$

8. >, <, तथा च = इति सङ्केतेषु उचितं सङ्केतं चित्वा रिक्तस्थानानि पूरयन्तु

   (i) $\frac{-5}{7} \square \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{-4}{5} \square \frac{-5}{7}$ (iii) $\frac{-7}{8} \square \frac{14}{-16}$

   (iv) $\frac{-8}{5} \square \frac{-7}{4}$ (v) $\frac{1}{-3} \square \frac{-1}{4}$ (vi) $\frac{5}{-11} \square \frac{-5}{11}$

   (vii) $0 \square \frac{-7}{6}$

9. अधोलिखितेषु प्रत्येकं परिमेयसङ्ख्यासु कतमा गुर्वी सङ्ख्या अस्ति ?

(i) $\frac{2}{3}, \frac{5}{2}$ (ii) $\frac{-5}{6}, \frac{-4}{3}$ (iii) $\frac{-3}{4}, \frac{2}{-3}$

(iv) $\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}$ (v) $-3\frac{2}{7}, -3\frac{4}{5}$

10. अधोलिखिताः परिमेयसङ्ख्याः आरोहिक्रमेण लिखन्तु

(i) $\frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}$ (ii) $\frac{1}{3}, \frac{-2}{9}, \frac{-4}{3}$ (iii) $\frac{-3}{7}, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{4}$

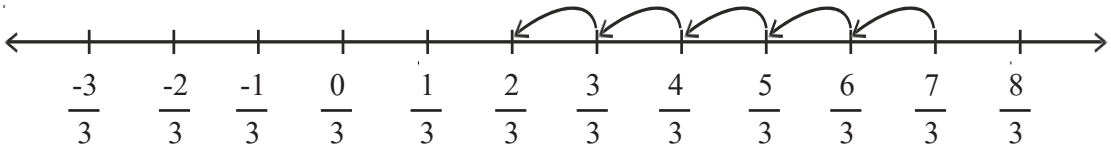
9.9 परिमेयसङ्ख्यासु सङ्क्रियाः

भवन्तः जानन्ति यत् पूर्णाङ्कानां भिन्नानां योजनम्, व्यवकलनम्, गुणनं भजनं (भागः) च कथं क्रियते। आयान्तु आसाम् आधारभूतानां सङ्क्रियाणां परिमेयसङ्ख्यासु अध्ययनं कुर्मः।

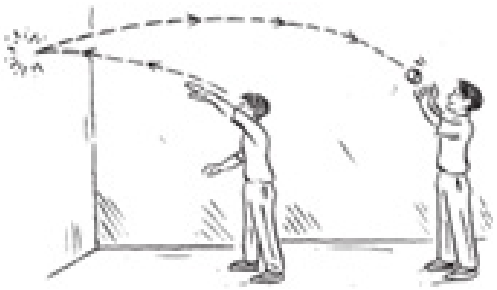
9.9.1 योगः

- आयान्तु समानहरयुते द्वे परिमेयसङ्ख्ये,कल्पनां कुर्वन्तु $\frac{7}{3}$ तथा च $\frac{-5}{3}$ इत्येते परिमेयसङ्ख्ये योजयामः। वयम् $\frac{7}{3}+\left(\frac{-5}{3}\right)$ ज्ञातुं प्रयासं कुर्मः।

सङ्ख्यारेखायाम्, अस्माभिः प्राप्यते -



क्रमागत-बिन्दुद्वयस्य मध्ये अन्तरालः $\frac{1}{3}$ अस्ति। अतः, $\frac{7}{3}$ मध्ये $\frac{-5}{3}$ इति योजनस्य अर्थः अस्ति यत् $\frac{7}{3}$ इत्यस्य वामं प्रति 5 पदानि सरन्तु। वयं कुत्र प्राप्तवन्तः? वयम् $\frac{2}{3}$ इति प्राप्नुमः। अतः $\frac{7}{3}+\frac{-5}{3}=\frac{2}{3}$ इति अस्ति।



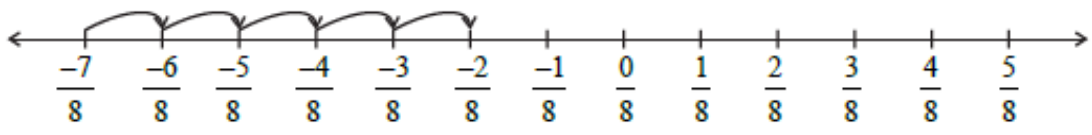
आगच्छन्तु एतम् अनेन विधिना कर्तुं प्रयतामहे :

$$\frac{7}{3}+\frac{(-5)}{3}=\frac{7+(-5)}{3}=\frac{2}{3}$$

अस्माभिः तत् एव उत्तरं प्राप्यते।

$\frac{6}{5}+\frac{(-2)}{5}, \frac{3}{7}+\frac{(-5)}{7}$ इत्यपि उपर्युक्तविधिना ज्ञातुं प्रयासं कुर्वन्तु अवेक्षणं च कुर्वन्तु यत् किम् उत्तरद्वयं समानम् अस्ति।

अनेन एव प्रकारेण $\frac{(-7)}{8}+\frac{5}{8}$ इति अधोलिखितवत् भविष्यति -



अस्माभिः किं प्राप्यते ?

सममेव $\frac{-7}{8}+\frac{5}{8}=\frac{-7+5}{8}$? किं द्वयोः मानं समानम् अस्ति ?

प्रयासं कुर्वन्तु

$\frac{-13}{7}+\frac{6}{7}$ तथा च $\frac{19}{5}+\frac{-7}{5}$ इति ज्ञायताम् ।

अनेन प्रकारेण, वयं पश्यामः यत् समानहर-परिमेयसङ्ख्यानां योजनसमये वयं हरं तत्रैव स्थापयन्तः अंशान् योजयामः।

अनेन प्रकारेण, $\frac{-11}{5}+\frac{7}{5}=\frac{-11+7}{5}=\frac{-4}{5}$ इति अस्ति ।

- वयं पृथक् - पृथक् हरवत्यौ द्वे परिमेयसङ्ख्ये कथं योजयामः ? भिन्नानाम् इव वयं प्रथमम् एतेषां हराणां लघुतमसमापवर्तकं ज्ञातुं प्रयासं कुर्मः ततः परं वयम् एतादृशीः समतुल्याः परिमेयसङ्ख्याः ज्ञातुं प्रयासं कुर्मः यासां हराः एते लघुतमसमापवर्तकाः स्युः । तत्पश्चात् वयम् एते परिमेयसङ्ख्ये योजयामः।

उदाहरणार्थम्, आगच्छन्तु $\frac{-7}{5}$ एवञ्च $\frac{-2}{3}$ इति योजयामः । 5 तथा च 3 इत्यनयोः लघुतमसमापवर्तकं 15 इति अस्ति ।

अतः, $\frac{-7}{5}=\frac{-21}{15}$ तथा च $\frac{-2}{3}=\frac{-10}{15}$ अस्ति ।

अनेन प्रकारेण $\frac{-7}{5}+\frac{-2}{3}=\frac{-21}{15}+\frac{-10}{15}=\frac{-31}{15}$ इति अभवत् ।

प्रयासं कुर्वन्तु

ज्ञायताम् :

(i) $\frac{-3}{7}+\frac{2}{3}$

(ii) $\frac{-5}{6}+\frac{-3}{11}$

योज्यप्रतिलोमः

$\frac{-4}{7}+\frac{4}{7}$ इति कस्य समानं भविष्यति ?

$\frac{-4}{7}+\frac{4}{7}=\frac{4+4}{7}=0$ इति अस्ति।सममेव $\frac{-4}{7}+\frac{-4}{7}=0$ इति अस्ति ।

अनेन प्रकारेण, $\frac{-2}{3}+\frac{2}{3}=0=\frac{2}{3}+\frac{-2}{3}$ इति अस्ति।

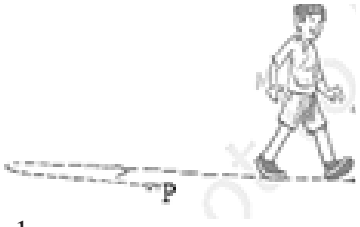
किं भवन्तः स्मरन्ति यत् पूर्णाङ्केषु –2 इत्यस्य योज्यप्रतिलोमः 2 इति अस्ति तथा च 2 इति – 2 इति पूर्णाङ्कस्य योज्यः प्रतिलोमः भवति । परिमेयसङ्ख्याभ्यः, वयं वदामः यत् $\frac{-4}{7}$ इति परिमेयसङ्ख्या $\frac{4}{7}$ अस्याः योज्यः प्रतिलोमः अस्ति तथा च $\frac{4}{7}$ परिमेयसङ्ख्या $\frac{-4}{7}$ अस्याः योज्यः प्रतिलोमः अस्ति । अनेन प्रकारेण, $\frac{-2}{3}$ इति परिमेयसङ्ख्या $\frac{2}{3}$ इत्यस्याः योज्यः प्रतिलोमः अस्ति तथा च $\frac{2}{3}$ इति परिमेयसङ्ख्या $\frac{-2}{3}$ इत्यस्याः योज्यः प्रतिलोमः अस्ति ।

उदाहरणम् 6 सतपालः P इति कस्माच्चित् स्थानात् पूर्वदिशायाम् $\frac{2}{3}$ कि.मी. चलति ततश्च पुनः पश्चिमदिशायां $1\frac{5}{7}$ कि.मी. चलति अधुना सः P स्थानात् कुत्र अस्ति ?

समाधानम् आयान्तु पूर्वदिशायाम् अतिक्रमितम् अन्तरालं धनात्मकचिह्नेन व्यक्तीकुर्मः । अतः, पश्चिमदिशायाम् अतिक्रमितम् अन्तरालम् ऋणात्मकचिह्नेन व्यक्तीकुर्मः अनेन प्रकारेण, P बिन्दुतः सतपालस्य विप्रकृष्टता किलोमीटरमानेन भविष्यति ।

$$\frac{2}{3}+\left(-1\frac{5}{7}\right)=\frac{2}{3}+\frac{(-12)}{7}=\frac{2\times7}{3\times7}+\frac{(-12)\times3}{7\times3}$$

$$=\frac{14-36}{21}=\frac{(-22)}{21}=-1\frac{1}{21}$$



यतो हि एतत् विप्रकृष्टत्वम् ऋणात्मकम् अस्ति,अतः सतपालः पश्चिमदिशं $1\frac{1}{21}$ मितकिलोमीटरदूरं वर्तते ।

प्रयासं कुर्वन्तु

$\frac{-3}{9}$, $\frac{-9}{11}$ तथा च $\frac{5}{7}$ योज्यप्रतिलोमः कः अस्ति ?

9.9.2 व्यवकलनम्

सविता $\frac{5}{7}$ तथा च $\frac{3}{8}$ इति द्वयोः परिमेयसङ्ख्योः अन्तरम् अनेन विधिना ज्ञातवती -

$$\frac{5}{7}-\frac{3}{8}=\frac{40-21}{56}=\frac{19}{56}$$

फरीदा जानाति स्म यत् a तथा च b इति द्वयोः पूर्णाङ्कयोः कृते $a - b = a + (- b)$ इति लेखितुं शक्यते । सा एवं परिमेयसङ्ख्यानां कृते अपि अकरोत् ज्ञातवती च यत् $\frac{5}{7}-\frac{3}{8}=\frac{5}{7}+\frac{-3}{8}=\frac{19}{56}$ इति अस्ति ।

उभे (फरीदा सविता च) एकमेव (समानम्) अन्तरं लब्धवत्यौ ।

द्वाभ्यां विधिभ्याम्, $\frac{7}{8}-\frac{5}{9}$, $\frac{3}{11}-\frac{8}{7}$ इति ज्ञातुं प्रयत्नं कुर्वन्तु । किं भवन्तः समानानि उत्तराणि प्राप्नुवन्ति ? अतः वयं कथयामः यत् द्वयोः परिमेयसङ्ख्ययोः व्यवकलनसमये व्यवकल्यमानायाः सङ्ख्यायाः योज्य-प्रतिलोमः अन्यपरिमेय-सङ्ख्यया सह योजनीयः ।

अनेन प्रकारेण $1\frac{2}{3}-2\frac{4}{5}=\frac{5}{3}-\frac{14}{5}=\frac{5}{3}+\frac{14}{5}$ इत्यस्य योज्यः प्रतिलोमः

$=\frac{5}{3}+\frac{(-14)}{5}=\frac{(-17)}{15}=-1\frac{2}{15}$ इति अस्ति ।

$\frac{2}{7}-\left(\frac{-5}{6}\right)$ इत्यस्य किं भविष्यति ? $\frac{2}{7}-\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{2}{7}+\left(\frac{-5}{6}\right)$ इत्यस्य योज्य-प्रतिलोमः $=\frac{2}{7}+\frac{5}{6}=\frac{47}{42}=1\frac{5}{42}$ इति भविष्यति ।

प्रयासं कुर्वन्तु

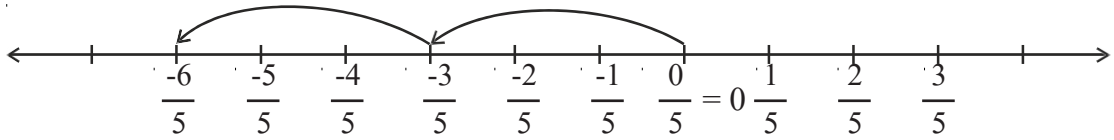
ज्ञायताम्

(i) $\frac{7}{9}-\frac{2}{5}$

(ii) $2\frac{1}{5}-\frac{(-1)}{3}$

9.9 .3 गुणनम्

आयान्तु $\frac{-3}{5}$ इति परिमेयसङ्ख्यां 2 इति संख्यया गुणयाम अर्थात् वयम् $\frac{-3}{5}\times2$ इति ज्ञातुं प्रयासं कुर्मः । सङ्ख्यारेखायाम् अस्य अर्थः भविष्यति यत् $\frac{3}{5}$ इत्यस्य वामं प्रतिपदद्वयं गमनम् इति ।



वयं कुत्र प्राप्नुमः ? वयं $\frac{-6}{5}$ इति प्राप्नुमः । आगच्छन्तु वयम् एतत् भिन्नेन विधिना जानीमः

$\frac{-3}{5} \times 2 = \frac{-3\times2}{5} = \frac{-6}{5}$

वयं ताम् एव परिमेयसङ्ख्यां प्राप्नुमः । उभयोः विध्योः प्रयोगं कुर्वन्तः $\frac{-4}{7} \times 3$ तथा च $\frac{-6}{5} \times 4$ इति ज्ञायताम् । भवन्तः किं पश्यन्ति ?

अतः अस्माभिः एतत् ज्ञायते यत् यदि एकां परिमेयसङ्ख्यां केनचित् धनात्मकपूर्णाङ्केन गुणयामः तर्हि वयम् अंशं तेन पूर्णाङ्केन गुणयामः तथा च हरं तत्रैव स्थापयामः।

आयान्तु इदानीम् एकां परिमेयसङ्ख्याम् एकेन ऋणात्मकपूर्णाङ्केन गुणयामः।

$\frac{-2}{9} \times (-5) = \frac{-2\times(-5)}{9} = \frac{10}{9}$

स्मरन्तु यत् -5 इति $\frac{-5}{1}$ इति रूपेण अपि लेखितुं शक्यते ।

अतः $\frac{-2}{9} \times \frac{-5}{1} = \frac{10}{9} = \frac{-2\times(-5)}{9\times1}$ इति अस्ति ।

प्रयासं कुर्वन्तु

अधोलिखितानां गुणनफलं किं भविष्यति?

(i) $\frac{-3}{5} \times 7$ (ii) $\frac{-6}{5} \times (-2)$

अनेन प्रकारेण $\frac{3}{11} \times (-2) = \frac{3\times(-2)}{11} = \frac{-6}{11}$ इति अस्ति ।

उपर्युक्त-प्रेक्षणानाम् आधारेण अस्माभिः ज्ञायते यत् $\frac{-3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{-3\times5}{8\times7} = \frac{-15}{56}$ इति अस्ति ।

यथा वयं भिन्नानां स्थितौ कृतवन्तः तथैव वयं द्वे परिमेयसङ्ख्ये अधोलिखितविधिना गुणयामः ।

चरणः 1 उभयोः परिमेयसङ्ख्ययोः अंशान् गुणयन्तु ।

चरणः 2 उभयोः परिमेयसङ्ख्ययोः हरान् गुणयन्तु ।

चरणः 3 $\frac{\text{प्रथमचरणे लब्धः परिणामः}}{\text{द्वितीयचरणे लब्धः परिणामः}}$ इति रूपेण गुणनफलं लिखन्तु ।

अनेन प्रकारेण $\frac{-3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{-3\times2}{5\times7} = \frac{-6}{35}$ इति अस्ति ।

सममेव $\frac{-5}{8} \times \frac{-9}{7} = \frac{(-5)\times(-9)}{8\times7} = \frac{45}{56}$ इति अस्ति ।

प्रयासं कुर्वन्तु

ज्ञायताम्

(i) $\frac{-3}{4} \times \frac{1}{7}$

(ii) $\frac{2}{3} \times \frac{-5}{9}$

9.9.4 विभाजनम्

भिन्नानां व्युत्क्रम-विषये वयं पूर्वमेव पठितवन्तः स्म । $\frac{2}{7}$ इत्यस्य व्युत्क्रमः कः अस्ति ? अयम् $\frac{7}{2}$ इति अस्ति । वयम् इमाम् अवधारणां परिमेयसङ्ख्यानां व्युत्क्रमाणां कृते अपि प्रवर्तयितुं शक्नुमः । अनेन प्रकारेण $\frac{-2}{7}$ इत्यस्य व्युत्क्रमः $\frac{7}{-2}$, अर्थात् (-7)/2 इति भविष्यति तथा च $\frac{-3}{5}$ इत्यस्य व्युत्क्रमः $\frac{-5}{3}$ इति भविष्यति ।

प्रयासं कुर्वन्तु

$\frac{-6}{11}, \frac{-8}{5}$ इत्यनयोः

व्युत्क्रमौ किं भविष्यतः?

परिमेयसङ्ख्यायाः तदीय-व्युत्क्रमेण गुणनफलम्

कस्याश्चित् सङ्ख्यायाः तस्याः व्युत्क्रमेण गुणनफलं सदैव 1 इति भवति।

उदाहरणार्थम् $\frac{-4}{9} \times \frac{(-4)}{9}$ इत्यस्य व्युत्क्रमः)

$= \frac{-4}{9} \times \frac{(-9)}{4} = 1$ इति अस्ति।

अनेन प्रकारेण $\frac{-6}{13} \times \frac{-13}{6} = 1$ इति अस्ति।

कानिचित् अन्यानि उदाहरणानि स्वीकृत्य अस्य प्रेक्षणस्य पुष्टिं कुर्वन्तु।

सविता $\frac{4}{9}$ इति एकस्याः परिमेयसङ्ख्यायाः $\frac{-5}{7}$ इति अन्यया परिमेयसङ्ख्यया अनेन प्रकारेण विभाजनं कृतवती यत्

$$\frac{4}{9} \div \frac{-5}{7} = \frac{4}{9} \times \frac{7}{-5} = \frac{-28}{45}$$

सा भिन्नानाम् इव व्युत्क्रमस्य अवधारणायाः प्रयोगं कृतवती।

अर्पितः आदौ $\frac{4}{9}$ इत्यस्य विभाजनं $\frac{5}{7}$ द्वारा कृतवान् तथा च $\frac{28}{45}$ इति प्राप्नोत्।

अन्ते, सः अवदत् यत् $\frac{4}{9} \div \frac{-5}{7} = \frac{-28}{45}$ इति अस्ति। सः एतत् कथं प्राप्नोत्?

सः ऋणात्मक-चिह्नानि परित्यजन् ताः भिन्नानि इव विभाजितवान् तत्पश्चात् प्राप्त-परिणामेन सह ऋणात्मकचिह्नम् योजितवान्।

उभौ (सविता अर्पितः च) $\frac{-28}{45}$ इति एकमेव मानं प्राप्तवन्तौ। $\frac{2}{3}$ इत्यस्य $\frac{-5}{7}$ इत्यनेन द्वाभ्यां विधिभ्यां विभाजनं कृत्वा पश्यन्तु यत् किं भवन्तः एकमेव उत्तरं प्राप्नुवन्ति।

उपर्युक्त-वर्णनेन एतत् प्रदर्शितं भवति यत् एकां परिमेयसङ्ख्यां कयाचित् अन्यपरिमेयसङ्ख्यया विभक्तीकर्तुं वयं तां परिमेयसङ्ख्याम् अन्यपरिमेयसङ्ख्यायाः व्युत्क्रमेण गुणयामः। अनेन प्रकारेण $\frac{6}{-5} \div \frac{-2}{3} = \frac{6}{-5} \times \frac{-2}{3}$ इत्यस्य व्युत्क्रमः $= \frac{6}{-5} \times \frac{3}{-2} = \frac{18}{10}$ इति अस्ति।

प्रयासं कुर्वन्तु

ज्ञायताम् : (i) $\frac{2}{3} \times \frac{-7}{8}$ (ii) $\frac{-6}{7} \times \frac{5}{7}$

प्रश्नावली 9.2

1. योगः ज्ञायताम्

(i) $\frac{5}{4}+\left(\frac{-11}{4}\right)$ (ii) $\frac{5}{3}+\frac{3}{5}$ (iii) $\frac{-9}{10}+\frac{22}{15}$

(iv) $\frac{-3}{11}+\frac{5}{9}$ (v) $\frac{-8}{19}+\frac{(-2)}{57}$ (vi) $\frac{-2}{3}+0$

(vii) $-2\frac{1}{3}+4\frac{3}{5}$

2. ज्ञायताम्

(i) $\frac{7}{24}-\frac{17}{36}$ (ii) $\frac{5}{63}-\left(\frac{-6}{21}\right)$ (iii) $\frac{-6}{13}-\left(\frac{-7}{15}\right)$

(iv) $\frac{-3}{8}-\frac{7}{11}$ (v) $-2\frac{1}{9}-6$

3. गुणनफलं ज्ञायताम्

(i) $\frac{9}{2}\times\left(\frac{-7}{4}\right)$ (ii) $\frac{3}{10}\times(-9)$ (iii) $\frac{-6}{5}\times\frac{9}{11}$

(iv) $\frac{3}{7}\times\left(\frac{-2}{5}\right)$ (v) $\frac{3}{11}\times\frac{2}{5}$ (vi) $\frac{3}{-5}\times\frac{-5}{3}$

4. अधोलिखितानां मानानि ज्ञायन्ताम्

(i) $(-4)\div\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{-3}{5}\div 2$ (iii) $\frac{-4}{5}\div(-3)$

(iv) $\frac{1}{8}\div\frac{3}{4}$ (v) $\frac{-2}{13}\div\frac{1}{7}$ (vi) $\frac{-7}{12}\div\left(\frac{-2}{13}\right)$

(vii) $\frac{3}{13}\div\left(\frac{-4}{65}\right)$

अस्माभिः का चर्चा कृता ?

1. कापि सङ्ख्या याम् $\frac{p}{q}$ इत्यनेन रूपेण व्यक्तीकर्तुं शक्नुमः यत्र p एवञ्च q पूर्णाङ्कौ स्तः तथा च $q \neq 0$ इति अस्ति, परिमेयसङ्ख्या इति कथ्यते। $\frac{-2}{7}$, $\frac{3}{8}$, 3 प्रभृतयः सङ्ख्याः परिमेयसङ्ख्याः सन्ति।

2. सर्वे पूर्णाङ्काः परिमेयसङ्ख्याः सन्ति।

3. यदि कस्याश्चित् परिमेयसङ्ख्यायाः अंशहरौ एकेन एव शून्येतरेण पूर्णाङ्केन गुण्येते अथवा विभक्तीक्रियेते तदा अस्माभिः एका सङ्ख्या प्राप्यते या प्रदत्तायाः परिमेयसङ्ख्यायाः समतुल्या परिमेयसङ्ख्या भवति। उदाहरणार्थम्, $\frac{-3}{7}=\frac{-3\times2}{7\times2}=\frac{-6}{14}$ इति अस्ति। अतः वयं कथयामः यत् $\frac{-6}{14}$

इति सङ्ख्या $\frac{-3}{7}$ इति संख्यायाः एकं समतुल्यं रूपम् अस्ति। सममेव अवधानं यच्छन्तु यत् $\frac{-6}{14} = \frac{-6\div2}{14\div2} = \frac{-3}{7}$ इति अस्ति।

4. परिमेयसङ्ख्यानां वर्गीकरणं धनात्मक-ऋणात्मक-परिमेयसङ्ख्यानां रूपैः क्रियते। यदा अंशः हरः च उभौ एव धनात्मकपूर्णाङ्कः भवेत् अथवा ऋणात्मकपूर्णाङ्कः भवेत् तदा सा परिमेयसङ्ख्या धनात्मक-परिमेयसङ्ख्या इति कथ्यते। यदा अंशहरयोः मध्ये एकः ऋणात्मकपूर्णाङ्कः भवेत् सा परिमेयसङ्ख्या एका ऋणात्मकपरिमेयसङ्ख्या इति कथ्यते।

उदाहरणार्थम्, $\frac{3}{8}$ एका धनात्मक-परिमेयसङ्ख्या अस्ति तथा च $\frac{-8}{9}$ इति एका ऋणात्मक-परिमेयसङ्ख्या अस्ति।

5. शून्य-सङ्ख्या (0) न तु धनात्मक-परिमेयसङ्ख्या अस्ति नैव च ऋणात्मक-परिमेयसङ्ख्या अस्ति।
6. काचिदपि परिमेयसङ्ख्या स्वीयमानकरूपे तदा मन्यते यदा तस्याः हरः धनात्मकपूर्णाङ्कः भवेत् तथा च अंशहरयोः च 1 तः अतिरिच्य कश्चन सार्वगुणनखण्डः न भवेत्। $\frac{-1}{3}$, $\frac{2}{7}$ प्रभृतयः सङ्ख्याः मानकरूपेण सन्ति।
7. द्वयोः परिमेयसङ्ख्ययोः मध्ये असीमिताः परिमेयसङ्ख्याः भवन्ति।
8. द्वयोः समानहरयोः परिमेयसङ्ख्ययोः योगं ज्ञातुं तासाम् अंशाः योजयितुं शक्यन्ते तथा च हरं तत्रैव स्थापयित्वा योगः ज्ञातुं शक्यते। विभिन्नहरयुते द्वे परिमेयसङ्ख्ये योजयितुम् आदौ उभयोः हरयोः लघुतमसमापवर्तकं ज्ञायते ततः परं च उभे परिमेयसङ्ख्ये ल.स. इत्यस्य समानयहरयोः द्वयोः समतुल्य-परिमेयसङ्ख्ययोः परिवर्त्य योज्यते।

उदादरणार्थम्, $\frac{-2}{3} + \frac{3}{8} = \frac{-16}{24} + \frac{9}{24} = \frac{-16+9}{24} = \frac{-7}{24}$ इति अस्ति। अत्र 3 एवञ्च 8 इत्यनयोः लघुतमसमापवर्तकं 24 इति अस्ति।

9. द्वयोः परिमेयसङ्ख्ययोः व्यवकलनार्थं वयं व्यवकल्यमानायाः परिमेयसङ्ख्यायाः योज्य-प्रतिलोमं अन्यपरिमेयसङ्ख्यया सह योजयामः।

अनेन प्रकारेण, $\frac{7}{8} - \frac{2}{3} = \frac{7}{8} + \frac{2}{3}$ इत्यस्याः योज्य-प्रतिलोमः $= \frac{7}{8} + \frac{-2}{3} = \frac{21+(-16)}{24} = \frac{5}{24}$ इति अस्ति।

10. द्वयोः परिमेयसङ्ख्ययोः गुणनार्थं वयम् एतयोः अंशान् हरान् च पृथक् – पृथक् गुणयामः पुनश्च गुणनफलम् अंशानां गुणनफलम्/हराणां गुणनफलम् इति रूपेण लिखामः।

11. एकां परिमेयसङ्ख्यां कयाचित् अन्यशून्येतरया परिमेयसङ्ख्यया विभक्तीकर्तुं वयं प्रथमां परिमेयसङ्ख्याम् अन्यपरिमेयसङ्ख्यायाः व्युत्क्रमेण गुणयामः। अनेन प्रकारेण $\frac{-7}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{-7}{2} \times$ ($\frac{4}{3}$ इत्यस्य व्युत्क्रमः) $\frac{-7}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{-21}{8}$ इति अस्ति।

प्रायोगिकी ज्यामितिः

अध्यायः 10

10.1 भूमिका

भवतां बहुविधैः आकारैः सह परिचयः अस्ति । भवन्तः स्वीय-गतकक्ष्यासु एतेषु आकारेषु केषाञ्चित् आकाराणां निर्माणं कथं क्रियते इति अधिगतवन्तः । उदाहरणार्थम् इदानीं भवन्तः प्रदत्तदीर्घतायाः रेखाखण्डः, कस्मिंश्चित् रेखाखण्डे लम्बरेखा, कोणः, कोणस्य समद्विभाजकम्, वृत्तम् इत्यादीनां रचनां कर्तुं शक्नुवन्ति । अधुना भवन्तः समान्तररेखाणां तथा च केषाञ्चित् त्रिभुजानाम् आलेखनविषये अधिगमिष्यन्ति ।

10.2 कस्याश्चित् प्रदत्तरेखायाः समान्तरं तस्माद् बिन्दुतः भूत्वा कस्याश्चित् रेखायाः आकर्षणं यः बिन्दुः तस्यां रेखायां स्थितः नास्ति -

आयान्तु गतिविधेः माध्यमेन आरम्भं कुर्मः । (आकृतिः 10.1)

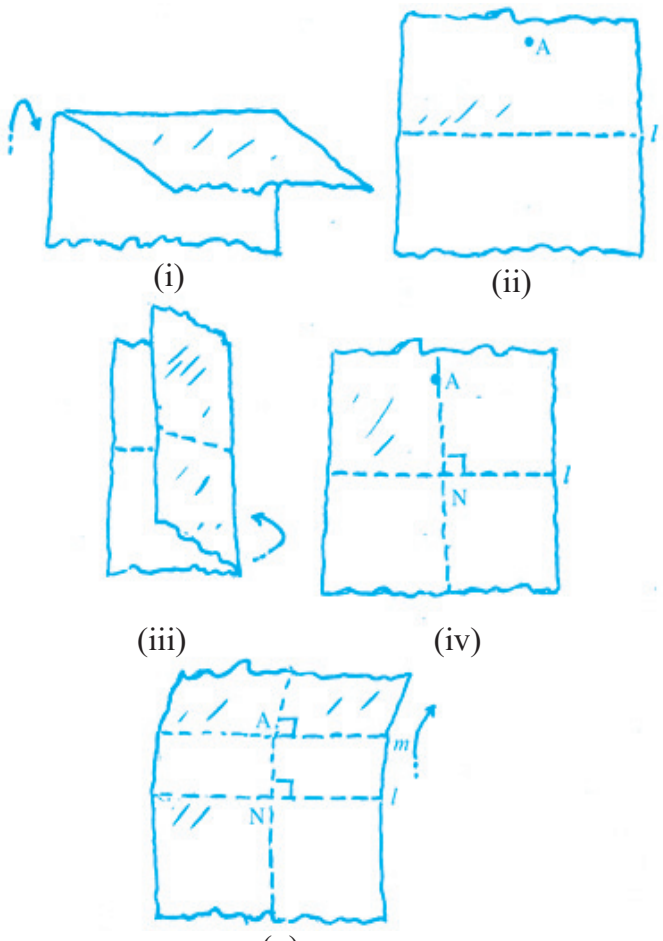
(i) एकं कर्गदपत्रं स्वीकुर्वन्तु एतत् च वक्रीकृत्य एकं चिह्नं निर्मान्तु । एतद् वलयचिह्नम् एकां l इति रेखां निरूपयति ।

(ii) कर्गदपत्रम् उद्घाटयन्तु अस्मिन् कर्गदपत्रे l इति रेखायाः बहिः एकम् A इति बिन्दुम् अङ्कयन्तु ।

(iii) A बिन्दुतः गम्यमानस्य तथा च l इति रेखायां लम्बस्य एकवलयस्य चिह्नम् आकृतिः 10.1 निर्मान्तु । अस्य लम्बकस्य AN इति नामकरणं कुर्वन्तु ।

(iv) अधुना A इति बिन्दुतः भूत्वा अस्य लम्बस्य लम्बमानस्य एकवलयस्य चिह्नं निर्मान्तु । अस्याः नूतनलम्बमानायाः रेखायाः m इति नाम कुर्वन्तु । अधुना l || m इति अस्ति । किं भवन्तः द्रष्टुम् अर्हन्ति यत् एवं किमर्थम् अस्ति ?

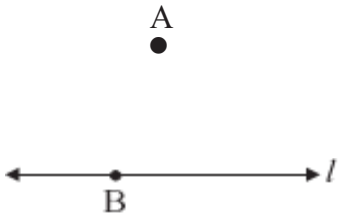
अत्र समान्तररेखाणां कतमः गुणः अथवा कतमाः गुणाः अस्मिन् कथने सहायतां कर्तुं शक्नुवन्ति यत् l तथा च m इति रेखे समान्तरे स्तः ?



आकृतिः 10.1

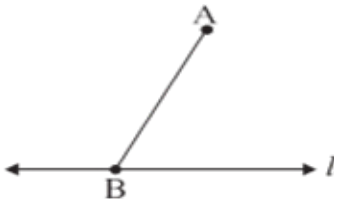
भवन्तः तिर्यग्-रेखाभिः तथा च समान्तररेखाभिः सम्बन्धितेषु गुणेषु कस्यापि गुणस्य प्रयोगं कृत्वा एतां रचनां केवलं मापिकां (रूलर) तथा च वृत्तकरीम् (परकार) उपयुज्य कर्तुं शक्नुवन्ति।

चरणः 1 'l' इति एकां रेखां तस्याः च बहिः स्थितं कञ्चन 'A' इति बिन्दुं स्वीकुर्वन्तु [आकृतिः 10.2(i)] ।



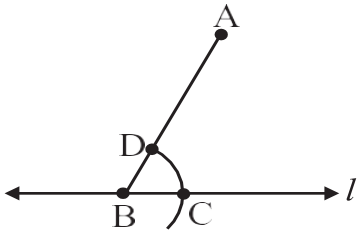
(i)

चरणः 2 l इति एकां रेखां तथा च कञ्चन B इति बिन्दुं स्वीकुर्वन्तु एवञ्च A इति बिन्दुं B इत्यनेन बिन्दुना सह मेलयन्तु [आकृतिः10.2(ii)]।



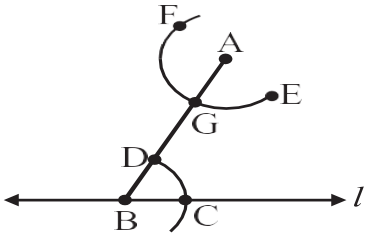
(ii)

चरणः 3 B इति बिन्दुं केन्द्रं मत्वा एवञ्च सौकर्य्यानुसारं कामपि त्रिज्यां स्वीकृत्य, l इति रेखायाः C इत्यस्मिन् बिन्दौ एवञ्च BA इति रेखयोः D इत्यस्मिन् बिन्दौ प्रतिच्छेदं कुर्वन्तम् एकं चापम् आलिखन्तु। [आकृतिः10.2(iii)]।



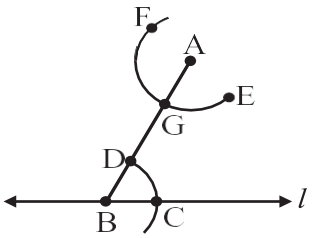
(iii)

चरणः4 अधुना A इति बिन्दुं केन्द्रं मत्वा एवञ्च तृतीय-चरणस्य एव चापं स्वीकृत्य AB इति रेखयोः G इत्यस्मिन् बिन्दौ प्रतिच्छेदं कुर्वन्तं EF इति एकं चापम् आलिखन्तु [आकृतिः10.2 (iv)]।



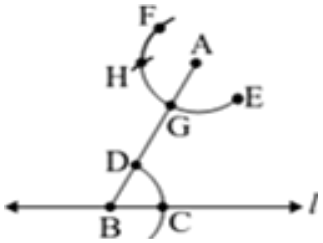
(iv)

चरणः 5 वृत्तकार्याः तीक्ष्णशिरः C इत्यस्मिन् बिन्दौ स्थापयन्तु तथा च एताम् उद्घाट्य अनेन प्रकारेण समायोजयन्तु यत् अङ्कन्याः अग्रभागः D इत्यस्य उपरि भवेत् [आकृतिः10.2 (v)]।



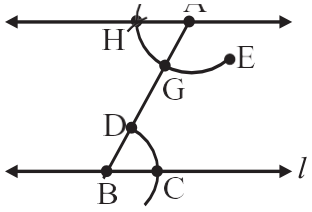
(v)

चरण: 6 G इति बिन्दुं केन्द्रं मत्वा एवञ्च वृत्तकार्याः प्रसारं पञ्चमचरणस्य एव स्वीकृत्य H इति बिन्दौ प्रतिच्छेदं कुर्वन्तं EF इति एकं चापम् आलिखन्तु यत् EF इति चापम् H इत्यस्मिन् बिन्दौ छिन्द्यात्। [आकृतिः10.2 (vi)]।



(vi)

चरण:7 अधुना AH इति मेलयित्वा m इति रेखाम् आलिखन्तु [आकृतिः10.2 (vii)]।



(vii)

अवधानं कुर्वन्तु यत् ∠ABC तथा च ∠BAH इति एकान्तरौ अन्तःकोणौ वर्तेते यौ परस्परं तुल्यौ स्तः। अतः $m \parallel l$ इति अस्ति।

आकृतिः10.2 (i)-(vii)

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

1. उपर्युक्तायां रचनायां किं भवन्तः A इति बिन्दुतः भूत्वा गम्यमानाम् एकाम् अन्यां रेखाम् आलेखितुं शक्नुवन्ति या l इति रेखायाः समान्तरा स्यात्?
2. किं भवन्तः अस्यां रचनायाम् एतादृशं परिवर्तनं कर्तुं शक्नुवन्ति येन समानस्य एकान्तरस्य अन्तःकोणस्य स्थाने समानः सङ्गतकोणः निर्मितः भवेत्?

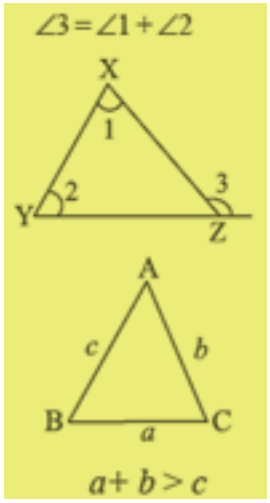
प्रश्नावली 10.1

1. AB इति एकां रेखाम् आलिखन्तु तस्याः च बहिः स्थितं कञ्चित् C इति बिन्दुं स्वीकुर्वन्तु। केवलं मापिकायाः एवं च वृत्तकार्याः उपयोगं कुर्वन्तः C इति बिन्दुतः भूत्वा AB इत्यस्याः रेखायाः समान्तराम् एकां रेखाम् आलिखन्तु।

2. एकाम् l इति रेखाम् आलिखन्तु तथा च l इत्यस्याः उपरि स्थिते कस्मिञ्चित् अपि बिन्दौ l इति लम्बं आलिखन्तु। अस्यां लम्बरेखायाम् X इति एकं बिन्दुं स्वीकुर्वन्तु यः l इत्यस्मात् 4 सेण्टीमीटरमिते दूरे स्थितः भवेत् । X बिन्दुतः l इत्यस्य समान्तराम् m इति एकां रेखाम् आलिखन्तु।

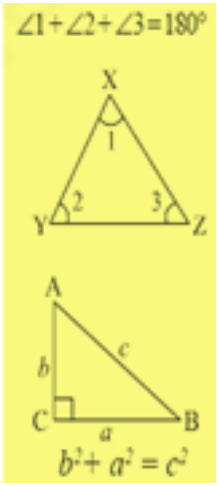
3. चिन्तनं कुर्वन्तु यत् *l* इति एका रेखा अस्ति तथा च P इति एकः बिन्दुः अस्ति । अयं च P बिन्दुः l रेखायां स्थितः नास्ति। P बिन्दुतः भूत्वा l रेखायाः समान्तराम् एकां m इति रेखाम् आलिखन्तु। अधुना P बिन्दुं l रेखायाः Q इति केनचित् बिन्दुना सह मेलयन्तु। m रेखायां कञ्चित् R इति अन्यं बिन्दुं चिन्वन्तु। R बिन्दुतः भूत्वा PQ रेखायाः समान्तराम् एकां रेखाम् आलिखन्तु। चिन्तयन्तु यत् एषा रेखा l रेखया सह Sबिन्दौ मिलति। समान्तर-रेखाणाम् एताभ्यां द्वाभ्यां युग्माभ्यां का आकृतिः निर्मीयते ?

10.3 त्रिभुजानां रचना



एतस्य अनुच्छेदस्य पठनात् पूर्वम् एतत् सम्यक् भविष्यति यत् भवन्तः त्रिभुजानाम् अवधारणा-विषये विशेषरूपेण त्रिभुजानां गुणविषये एवं च त्रिभुजानां सर्वाङ्गमता-विषये ये अध्यायाः सन्ति तेषाम् अध्यायानां स्मरणं कुर्वन्तु।

भुजानां कोणानां च आधारेण त्रिभुजानां वर्गीकरणं कथं क्रियते इति भवन्तः जानन्ति । भवन्तः त्रिभुजैः सम्बन्धितानां निम्नलिखितगुणानां विषये अपि जानन्ति -



(i) कस्यचित् त्रिभुजस्य बाह्यकोणः तस्य द्वयोः अभिमुखयोः अन्तःकोणयोः योगफलस्य समानः भवति।

(ii) त्रिभुजस्य त्रयाणाम् अन्तःकोणानां योगः 180°मितः भवति।

(iii) त्रिभुजस्य कयोश्चिद् अपि द्वयोः भुजयोः दीर्घतानां योगः तृतीय-भुजायाः दैर्घ्यात् अधिकः भवति।

(iv) कस्यचित् समकोण-त्रिभुजस्य कर्णे निर्मितः वर्गः अवशेषयोः भुजयोः वर्गाणां योगफलेन समानः भवति।

'त्रिभुजानां सर्वाङ्सनमता' इत्यस्मिन् अध्याये अस्माभिः दृष्टं यत् एकं त्रिभुजं प्राप्तुं शक्यते यदि तस्य निम्नलिखितेषु

मापसमूहेषु किमपि एकं दत्तं स्यात् -

(i) तिस्रः भुजाः

(ii) द्वे भुजे तयोर्मध्यवर्ती च कोणः

(iii) द्वौ कोणौ तयोर्मध्यवर्तिनी च भुजा

(iv) समकोणत्रिभुजस्य कृते कर्णः एकश्च पादः

अधुना, वयम् एतासाम् अवधारणानां प्रयोगं त्रिभुजरचनासु करिष्यामः।

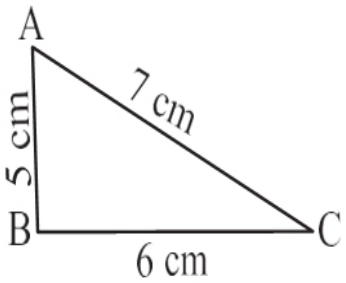
10.4 कस्यचित् त्रिभुजस्य रचना यदा तस्य तिसृणां भुजानां दीर्घता दत्ता स्यात् (भुजात्रय-निकषः / SSS कसौटी)

अस्मिन् अनुच्छेदे वयं त्रिभुजानि रचयिष्यामः यदि तेषां तिस्रः भुजाः ज्ञाताः स्युः । पूर्वं वयम् अस्य अभ्यासाकृतिम् आलिखामः, येन तस्य भुजानां काचिद् ऊहा भवेत् पुनश्च तिसृषु भुजासु एकभुजाम् आदाय रचनाम् आरभामहे। निम्नलिखितम् उदाहरणम् अवगच्छन्तु -

उदाहरणम् 1 एकम् ABC इति त्रिभुजं रचयन्तु। यस्मिन् AB इति भुजा पञ्चसेण्टीमीटरमिता अस्ति, BC इति भुजा षट् सेण्टीमीटरमिता अस्ति एवञ्च AC इति भुजा सप्तसेण्टीमीटरमिता अस्ति।

समाधानम्

चरण: 1 सर्वप्रथमं वयं प्रदत्तानां परिमाणानाम् एकाम् अभ्यासाकृतिम् आलिखामः (अनेन अस्माकम् कृते अग्रे अतीव लाभः भविष्यति) [आकृतिः10.3 (i)]।

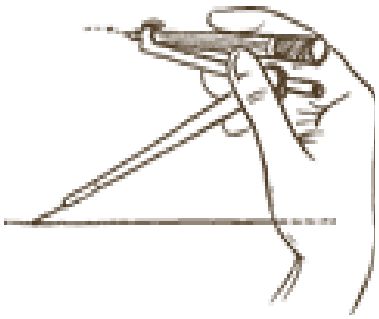


(i)

चरण: 2 षट्सेण्टीमीटरमित-दैर्घ्यस्य एकम् BC इति रेखाखण्डम् आलिखन्तु [आकृतिः10.3(ii)]।

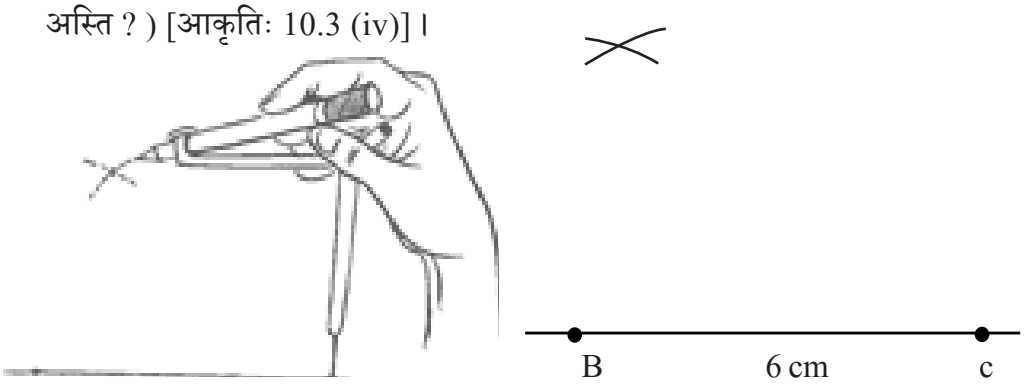
(ii)

चरण: 3 B बिन्दुतः A इति बिन्दुः पञ्चसेण्टीमीटरदूरे अस्ति। अतः, B बिन्दुं केन्द्रं मत्वा तथा च पञ्चसेण्टीमीटरमितां त्रिज्यां स्वीकृत्य एकं चापम् आलिखन्तु। (अधुना अस्मिन् चापे A कुत्रचित् स्थितः कश्चन बिन्दुः अस्ति। अस्मिन् चापे A कुत्र वर्तते इति एतद्-विषये वयं जानीम इति अस्माकं कार्यम् अस्ति।) [आकृतिः10.4 (iii)]।



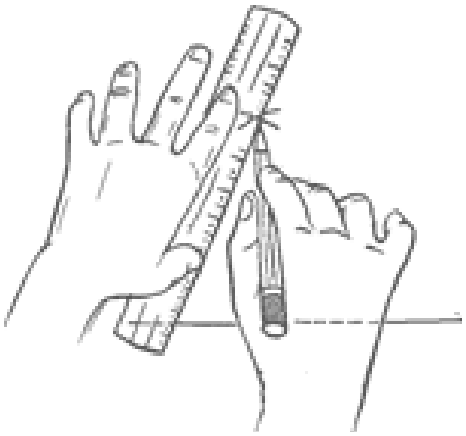
(iii)

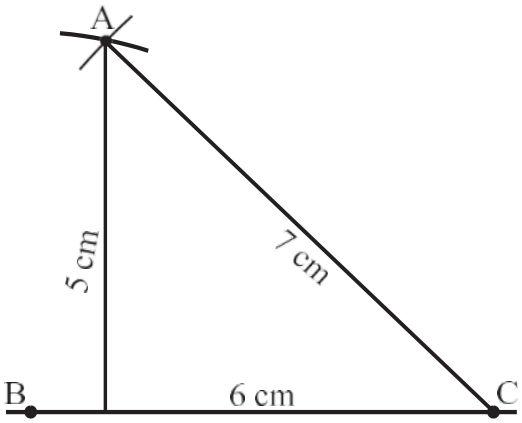
चरण:4 C बिन्दुतः A इति बिन्दुः सप्तसेण्टीमीटरदूरे अस्ति। अतः C बिन्दुं केन्द्रं मत्वा तथा च सप्तसेण्टीमीटरमितां त्रिज्यां स्वीकृत्य एकं चापम् आलिखन्तु। (A बिन्दुः अस्मिन् चापे कुत्रचित् स्थितः भविष्यति। अस्माभिः ज्ञातव्यम् अस्ति यत् एषः बिन्दुः कुत्र स्थितः अस्ति ?) [आकृतिः 10.3 (iv)]।



(iv)

चरण: 5 A बिन्दुः आलिखितयोः एतयोः द्वयोः चापयोः स्थितः स्यात्। अतः एषः बिन्दुः अनयोः चापयोः प्रतिच्छेद-बिन्दुः अस्ति। अनयोः चापयोः प्रतिच्छेद-बिन्दुम् A इत्यनेन अङ्कयन्तु। AB तथा च AC इति द्वयं योजयन्तु। सम्प्रति Δ ABC इति त्रिभुजं सिद्धम् अस्ति। [आकृतिः10.3(v)]।





(v)

आकृतिः 10.3 (i) – (v)

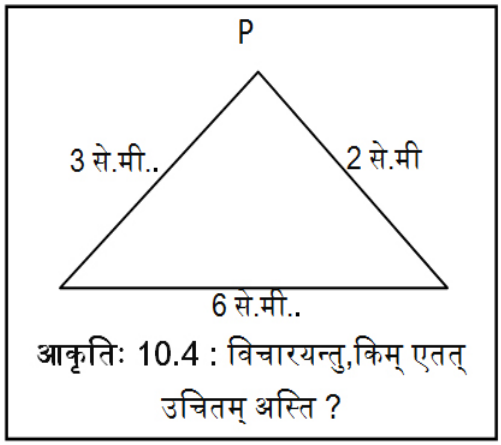
एतान् कुर्वन्तु

आगच्छन्तु इदानीम् DEF इति एकम् अन्यं त्रिभुजं रचयामः यस्मिन् DE इति भुजा पञ्चसेण्टीमीटरमिता अस्ति, EF इति षट्सेण्टीमीटरमिता अस्ति तथा च DF इति भुजा सप्तसेण्टीमीटरमिता अस्ति। Δ DEF इति त्रिभुजं छित्वा ΔABC इति त्रिभुजस्य उपरि स्थापयन्तु।

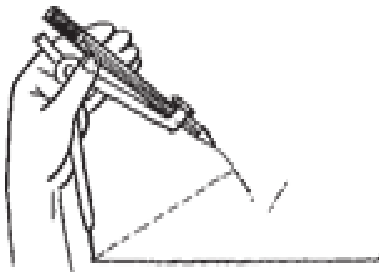
वयं पश्यामः यत् ΔDEF इति त्रिभुजं ΔABC इति त्रिभुजं पूर्णतया आवृणोति अर्थात् तेन सह त्रिभुजं सम्पाति जायते। (अवधानं कुर्वन्तु यत् एतयोः द्वयोः त्रिभुजयोः रचना प्रदत्त-भुजा-त्रयेण कृता अस्ति।) अनेन प्रकारेण यदि एकस्य त्रिभुजस्य तिस्रः भुजाः अपरस्य त्रिभुजस्य सङ्गताभिः तिसृभिः भुजाभिः तुल्याः स्युः तर्हि उभे त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे भवतः। एषः भुजात्रय-सर्वाङ्गसमता-नियमः (SSS सर्वाङ्गतानियमः) इति कथ्यते यस्य विषये भवन्तः पूर्वस्मिन् अध्याये पठितवन्तः सन्ति ।

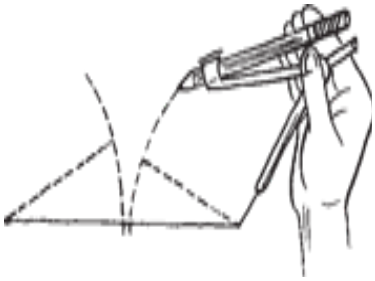
विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

एकः विद्यार्थी एकम् एतादृशं त्रिभुजम् आलेखितुं प्रयत्नम् अकरोत् यस्य अभ्यासाकृतिः अत्र दत्ता अस्ति। आदौ सः QR इति अलिखत्। तदन्तरं सः Q इति केन्द्रं मत्वा त्रि-सेण्टीमीटरमितां त्रिज्यां स्वीकृत्य एकं चापम् अलिखत् तथा च R इति केन्द्रं मत्वा द्वि-सेण्टीमीटरमितां च त्रिज्यां स्वीकृत्य एकम् अन्यं चापम् अलिखत्। किन्तु सः P इति बिन्दुं न अलभत। अस्य किं कारणम् अस्ति ?अनेन प्रश्नेन सम्बन्धितस्य त्रिभुजस्य कं गुणं भवन्तः जानन्ति ? किम् एतादृशस्य त्रिभुजस्य अस्तित्वं विद्यते ? (त्रिभुजानाम् एतं गुणं स्मरन्तु । कस्यचित् त्रिभुजस्य द्वयोः भुजयोः योगः सदैव तृतीय-भुजातः अधिकः भवति)।



आकृतिः 10.4 : विचारयन्तु,किम् एतत् उचितम् अस्ति ?





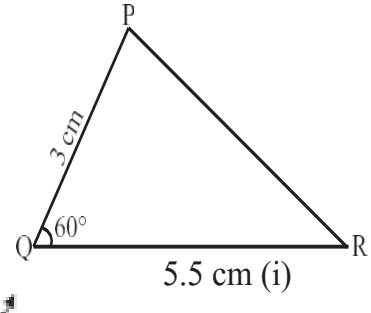
प्रश्नावली 10.2

1. ΔXYZ इति त्रिभुजस्य रचनां कुर्वन्तु, यस्मिन् XY इति भुजा 4.5 सेण्टीमीटरमिता, YZ इति भुजा 5 सेण्टीमीटरमिता तथा च ZX इति भुजा 6 सेण्टीमीटरमिता अस्ति।
2. एकस्य समबाहुत्रिभुजस्य रचनां कुर्वन्तु यस्य भुजा 5.5 सेण्टीमीटरमिता भवेत्।
3. ΔPQR इति त्रिभुजस्य रचनां कुर्वन्तु यस्मिन् PQ इति भुजा 4 सेण्टीमीटरमिता, QR इति भुजा 3.5 सेण्टीमीटरमिता तथा च PR इति भुजा 4 सेण्टीमीटरमिता अस्ति। एतत् किम्प्रकारकं त्रिभुजम् अस्ति ?
4. ABC इत्यस्य रचनां कुर्वन्तु यत्र AB इति भुजा 2.5 सेण्टीमीटरमिता BC इति भुजा 6 सेण्टीमीटरमिता एवञ्च AC इति भुजा 6.5 सेण्टीमीटरमिता भवेत्। $\angle B$ इति कोणं परिमापयन्तु।

10.5 यदा द्वयोः भुजयोः दीर्घता तथा च तयोर्मध्यवर्तिनः कोणस्य परिमापः दत्तः स्यात् तदा कस्यचित् त्रिभुजस्य रचना (भुजाकोण-भुजानिकषः / SAS निकषः)

अत्र अस्माकं कृते द्वे भुजे तयोर्मध्यवर्ती च कोणः दत्तः वर्तते। सर्वप्रथमं वयम् एकाम् अभ्यासाकृतिम् आलिखामः पुनश्च प्रदत्तेषु रेखाखण्डेषु एकं रेखाखण्डम् आलिखामः। तत्पश्चात् अन्ये चरणाः अनुसरणीयाः भवन्ति। द्वितीयम् उदाहरणं पश्यन्तु।

उदाहरणम् 2 एकं PQR इति त्रिभुजं रचयन्तु, यस्मिन् दत्तं वर्तते यत् PQ इति भुजा 3 सेण्टीमीटरमिता QR इति भुजा 5.5 सेण्टीमीटरमिता तथा च $\angle PQR$ $60°$ मितः अस्ति।

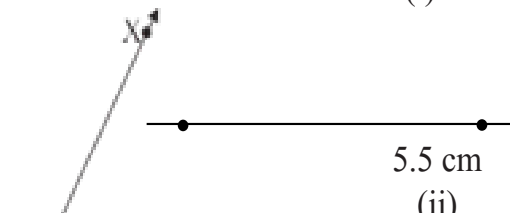


(i)

समाधानम्

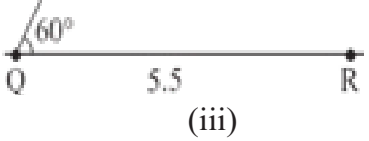
चरणः1 आदौ वयं दत्तैः परिमापैः एकाम् अभ्यासाकृतिम् आलिखामः। (अनेन अस्माकं कृते रचनाप्रक्रियायाः निर्धारणे साहाय्यं भविष्यति) [आकृतिः10.5 (i)]।

चरणः2 5.5 सेण्टीमीटरमित-दीर्घतायाः एकम् QR इति रेखाखण्डम् आलिखन्तु [आकृतिः10.5(ii)]।



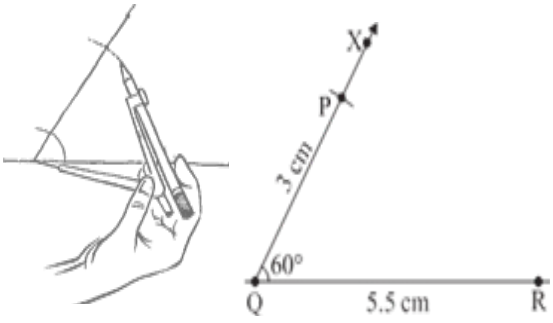
(ii)

चरणः3 Q बिन्दौ QX इति किरणम् आलिखन्तु, 5.5 से.मी. यः QR इत्यनेन सह $60°$मितस्य कोणं निर्मापयेद्। (P बिन्दुः कोणस्य अस्मिन्नेव किरणे कुत्रचित् स्थितः भविष्यति)[आकृतिः 10.5(iii)]।



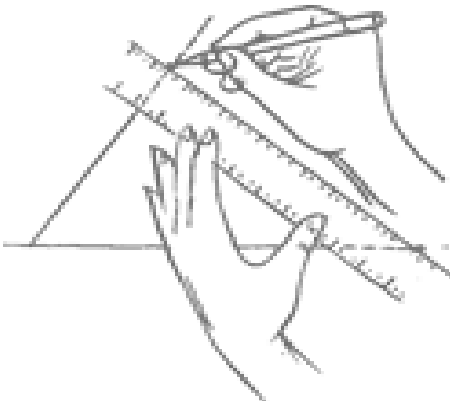
(iii)

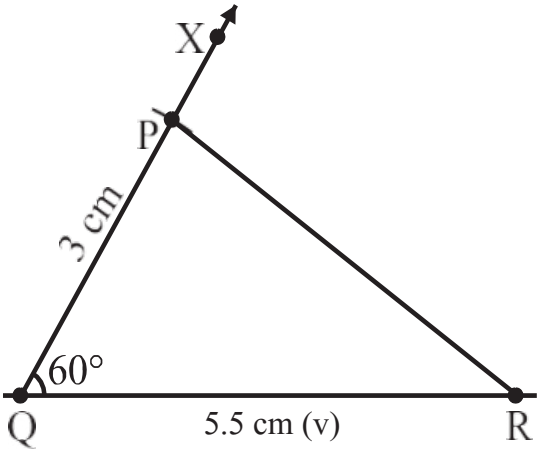
चरणः4 (P इति बिन्दुं निश्चेतुं QP इति दूरता दत्ता वर्तते।) Q इति केन्द्रं मत्वा 3 सेण्टीमीटरमितां त्रिज्यां स्वीकृत्य एकं चापम् आलिखन्तु। अयं चापः QX इति भुजायाः P बिन्दौ प्रतिच्छेदं करोति [आकृतिः 10.5(iv)]।



(iv)

चरण:5 PR इत्यस्य योजनं कुर्वन्तु। अनेन प्रकारेण ΔPQR त्रिभुजं प्राप्यते। [आकृतिः10.5 (v)]।





आकृतिः 10.5 (i) – (v) -

एतान् कुर्वन्तु

आयान्तु अधुना एकम् ABC इति अन्यत् त्रिभुजं रचयाम यस्मिन् AB इति भुजा 3 सेण्टीमीटरमिता, BC इति भुजा 6.5 सेण्टीमीटरमिता तथा च ΔABC 60°मितः भवेत् । ΔABC इति त्रिभुजं छित्त्वा ΔPQR इति त्रिभुजस्य उपरि स्थापयन्तु । वयं किं पश्यामः ? वयं पश्यामः यत् ΔABC इति त्रिभुजं ΔPQR इति त्रिभुजेन सह पूर्णतया सम्पाति जायते अर्थात् तत् आवृणोति। अनेन प्रकारेण यदि कस्यचित् त्रिभुजस्य द्वे भुजे तथा च तयोर्मध्यवर्ती कोणः कस्यचित् अन्यत्रिभुजस्य सङ्गतभुजाभिः एवं च तेषां मध्यवर्तिकोणेन तुल्याः स्युः तर्हि उभे त्रिभुजे सर्वाङ्समे भवतः। एषः भुजा-कोण-भुजा-सर्वाङ्समतायाः नियमः अथवा निकषः अस्ति, यस्य विषये वयं पूर्वस्मिन् अध्याये पठितवन्तः स्मः। (अवधानं कुर्वन्तु यत् उभयोः त्रिभुजयोः रचना दत्ताभ्यां भुजाभ्यां तथा च तयोर्मध्यवर्तिना कोणेन कृता अस्ति)

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

उपर्युक्तायां रचनायां द्वयोः भुजयोः दीर्घताः एकस्य च कोणस्य परिमापः दत्ताः आसन्। अधुना निम्नलिखित-समस्यायाः अध्ययनं कुर्वन्तु :

ΔABC इति कस्मिंश्चित् त्रिभुजे यदि AB इति भुजा 3 सेण्टीमीटरमिता, AC इति भुजा 5 सेण्टीमीटरमिता तथा च $\angle C$ इति कोणः 30°मितः अस्ति तर्हि किं वयम् अस्य त्रिभुजस्य रचनां कर्तुम् शक्नुमः ? वयम् 5 सेण्टीमीटरमिताम् AC इति भुजाम् आलिख्य 30°मितं $\angle C$ इति कोणम् आलेखितुं शक्नुमः। $\angle C$ कोणस्य एका भुजा CA अस्ति। B बिन्दुः C कोणस्य अपरस्यां भुजायां कुत्रचित् स्थितः स्यात्। किन्तु अवधानं कुर्वन्तु यत् B बिन्दोः केनचित् अद्वितीयरूपेण निर्धारणं नैव कर्तुं शक्नुमः। अतः ABC इति त्रिभुजस्य रचनायै प्रदत्तानि तथ्यानि पर्याप्तानि न सन्ति।

अधुना, ΔABC इति त्रिभुजस्य रचनायाः प्रयासं कुर्वन्तु यदि AB इति भुजा 3 सेण्टीमीटरमिता AC इति भुजा 5 सेण्टीमीटरमिता तथा च $\angle B$ इति कोणः 30° मितः अस्ति। वयं किं पश्यामः ? पुनः ΔABC इति त्रिभुजस्य रचना अद्वितीयरूपेण नैव कर्तुं शक्यते। अनेन प्रकारेण वयं निष्कर्षं प्राप्नुमः

यत् कस्यचित् अद्वितीय-त्रिभुजस्य रचना तदा एव कर्तुं शक्यते यदा तस्य द्वयोः भुजयोः दीर्घताः तथा च तयोर्मध्यवर्तिनः कोणस्य परिमापाः दत्ताः स्युः ।

प्रश्नावली 10.3

1. ΔDEF इति त्रिभुजस्य रचनां कुर्वन्तु यदि DE इति भुजा 5 सेण्टीमीटरमिता DF इति भुजा 3 सेण्टीमीटरमिता तथा च $m\angle EDF$ इति कोणः 90° मितः इति स्यात् ।
2. एकं समद्विबाहु-त्रिभुजस्य रचनां कुर्वन्तु यस्य प्रत्येकं समानभुजायाः दीर्घता 6.5 सेण्टीमीटरमिता भवेत् तथा च मध्यवर्ति-कोणः 110° इति भवेत् ।
3. BC इति भुजा 7.5 सेण्टीमीटरमिता तथा च AC इति भुजा 5 सेण्टीमीटरमिता तथा च $m\angle C$ इति कोणः 60° मितः स्यात् तदा ABC इति त्रिभुजस्य रचनां कुर्वन्तु ।

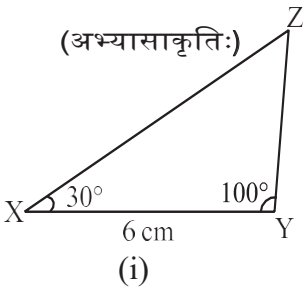
10.6 कस्यचित् त्रिभुजस्य रचना यदा तस्य द्वयोः कोणयोः परिमापः एवञ्च एतयोः कोणयोः मध्यवर्तिभुजायाः दीर्घता दत्ता भवेत् (कोण-भुजा-कोणनिकषः / ASAनिकषः)

यथा पूर्वं कृतं तथैव एकाम् अभ्यासाकृतिम् आलिखन्तु । अधुना प्रदत्तं रेखाखण्डम् आलिखन्तु । उभयोः अन्तिमबिन्द्वोः कोणं निर्मान्तु । तृतीयम् उदाहरणं पश्यन्तु ।

उदाहरणम् 3 ΔXYZ इति त्रिभुजस्य रचनां कुर्वन्तु यदि XY इति भुजा 6 सेण्टीमीटरमिता $m\angle ZXY$ इति कोणः 30°मितः तथा च $m\angle XYZ$ इति कोणः 100°मितः अस्ति ।

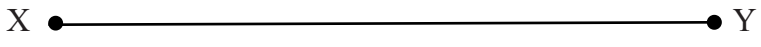
समाधानम्

चरण:1 वास्तविकरचनायाः पूर्वं वयं अस्मिन् अङ्कितान् परिमापान् अनुसृत्य एकाम् अभ्यासाकृतिम् आलिखामः । (अनेन काचित् ऊहा जायते यत् रचना कथं कर्त्तव्या) [आकृतिः10.6(i)]।



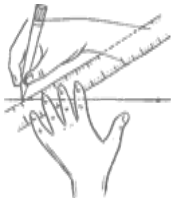
(i)

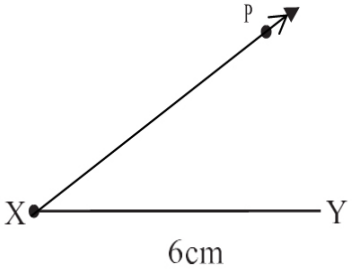
चरण:2 XY इति एकं रेखाखण्डम् आलिखन्तु यस्य दैर्घ्यं 6 सेण्टीमीटरमितम् अस्ति । [आकृतिः10.6(ii)]।



6 cm (ii)

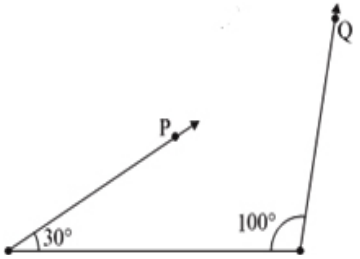
चरण:3 X इति बिन्दौ XP इति किरणम् आलिखन्तु । अयं किरणः XYतः 30° मितकोणस्य निर्माणं कुर्यात् । प्रदत्त-प्रतिबन्धानुसारं Z बिन्दुः XP किरणे कुत्रचित् स्थितः स्यात् [आकृतिः 10.6 (iii)] ।





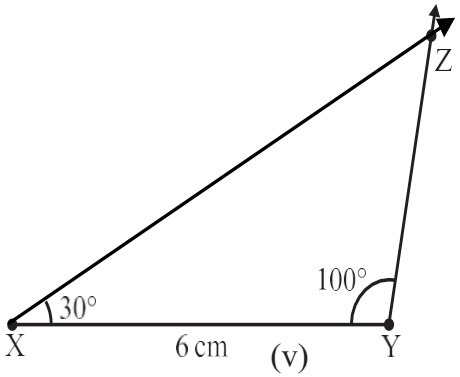
(iii)

चरण: 4 Y इति बिन्दौ YQ इति किरणम् आलिखन्तु । अयं किरणः YXतः 100° मितकोणस्य निर्माणं कुर्यात् । प्रदत्त-प्रतिबन्धानुसारं Z बिन्दुः YQ किरणे अपि अवश्यमेव स्थितः स्यात् [आकृतिः 10.6 (iv)] ।



(iv)

चरण:5 Z बिन्दुः XP एवञ्च YQ इत्येतयोः उभयोः किरणयोः स्थितः स्यात् । अतः Z एतयोः उभयोः किरणयोः प्रतिच्छेदक-बिन्दुः अस्ति । अधुना ΔXYZ त्रिभुजं पूर्णतया निर्मितं भवति [आकृतिः10.6(v)]।



आकृतिः10.6 (i) – (v)

एतान् कुर्वन्तु

अधुना LMN इति एकम् अन्यत् त्रिभुजम् आलिखन्तु, यस्मिन् $m\angle NLM$ इति कोणः 30° मितः अस्ति । LM इति भुजा 6 सेण्टीमीटरमिता तथा च $m\angle NML$ इति कोणः 100°मितः स्यात् । एतत् LMN त्रिभुजं छित्त्वा XYZ त्रिभुजे स्थापयन्तु । वयं पश्यामः यत् LMN त्रिभुजं XYZ त्रिभुजेन सह पूर्णतया सम्पाति जायते । इत्थम्, यदि कस्यचित् त्रिभुजस्य द्वौ कोणौ तयोर्मध्यवर्तिनी च भुजा अपरत्रिभुजस्य सङ्गतकोणाभ्यां तयोर्मध्यवर्ति-भुजया तुल्याः भवेयुः तदा उभे त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे भवतः । एषः ASA कोण-भुजा-कोण-सर्वाङ्गसमतानियमः अथवा निकषः अस्ति, यस्य विषयो वयं पूर्वस्मिन् अध्याये अध्ययनं कृतवन्तः स्मः । (अवधानं कुर्वन्तु यत् अत्र उभयोः त्रिभुजयोः रचना कृता अस्ति यदा उभौ कोणौ तयोर्मध्यवर्तिनी च भुजा दत्ता आसीत् ।)

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

उपर्युक्ते उदाहरणे एकस्याः भुजायाः दीर्घता द्वयोः कोणयोः च परिमापाः दत्ताः आसन् । अधुना निम्नलिखित-समस्यायाः अध्ययनं कुर्वन्तु -

ΔABC इति त्रिभुजे यदि AC इति भुजा 7 सेण्टीमीटरमिता, $m\angle A$ इति कोणः 60° मितः एवञ्च $m\angle B$ इति कोणः 50° मितः अस्ति तर्हि किं भवन्तः त्रिभुजस्य रचनां कर्तुं शक्नुवन्ति ? (त्रिभुजस्य कोण-सह-गुणः भवतां सहायतां करिष्यति ।)

प्रश्नावली 10.4

1. ΔABC इति त्रिभुजस्य रचनां कुर्वन्तु, यदा $m\angle A$ इति कोणः 60°मितः , $m\angle B$ इति कोणः 30° मितः एवञ्च AB इति भुजा 5.8 सेण्टीमीटरमिता प्रदत्तं वर्तते ।
2. ΔPQR इति त्रिभुजस्य रचनां कुर्वन्तु यदि PQ इति भुजा 5 सेण्टीमीटरमिता, $m\angle PQR$ इति कोणः 105° मितः एवञ्च $m\angle QRP$ इति कोणः 40° मितः दत्तः वर्तते ।
   (सङ्केतः - त्रिभुजस्य कोण-सह-गुणं स्मरन्तु) ।
3. किं भवन्तः ΔDEF इति त्रिभुजस्य रचनां कर्तुं शक्नुवन्ति अथवा न इति अवेक्षणं कुर्वन्तु । यदि EF इति भुजा 7.2 सेण्टीमीटरमिता, $m\angle E$ इति कोणः 110° मितः तथा च $m\angle F$ इति कोणः 80° मितः अस्ति । स्वस्य उत्तरस्य पुष्टिम् अपि कुर्वन्तु ।

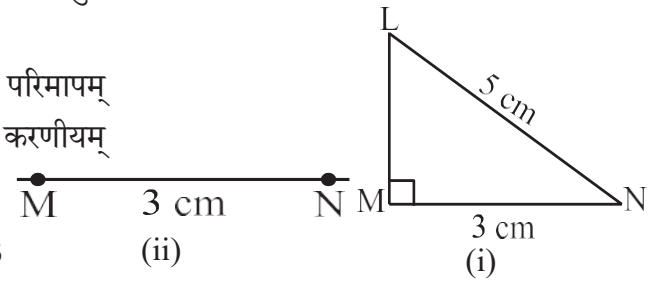
10.7 कस्यचित् समकोणत्रिभुजस्य रचना, यदा तस्य एकपादस्य (भुजायाः) कर्णस्य च दीर्घताः दत्ताः स्युः। (RHS निकषः)

अत्र अभ्यासाकृतेः निर्माणं सरलम् अस्ति। इदानीं प्रदत्त-भुजायाः अनुसारम् एकं रेखाखण्डम् आलिखन्तु। अस्य एकस्मिन् अन्तिमबिन्दौ एकं समकोणं निर्मान्तु। त्रिभुजस्य प्रदत्तदीर्घतानां भुजां कर्णं च आलेखितुं वृत्तकार्याः उपयोगं कुर्वन्तु। त्रिभुजं पूरयन्ताम्। निम्नलिखितम् उदाहरणं विचारयन्तु -

उदाहरणम् 4 ΔLMN इति त्रिभुजस्य रचनां कुर्वन्तु यस्य $\angle LMN$ इति कोणः समकोणः अस्ति तथा च दत्तं च वर्तते यत् LN इति भुजा 5 सेण्टीमीटरमिता एवञ्च MN इति भुजा 3 सेण्टामीटरमिता अस्ति।

समाधानम्

चरणः 1 एकाम् अभ्यासाकृतिम् आलिखन्तु तस्मिन् च प्रदत्तं परिमापम् अङ्कयन्तु। स्मरणं भवेत् यत् समकोणस्य अङ्कनं करणीयम् अस्ति। [आकृतिः 10.7(i)]।

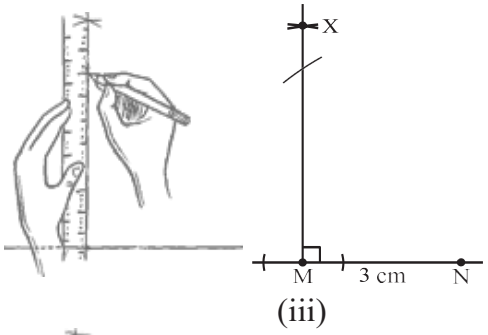


(ii) (i)

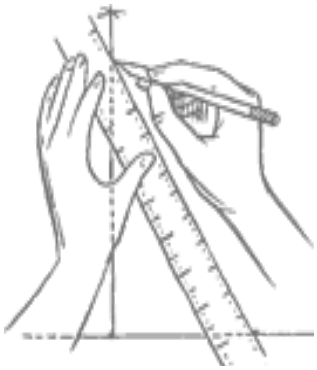
चरणः 2 MN इति एकं रेखाखण्डम् आलिखन्तु यस्य दैर्घ्यं 3 सेण्टीमीटरमितं वर्तते। [आकृतिः10.7 (ii)]।

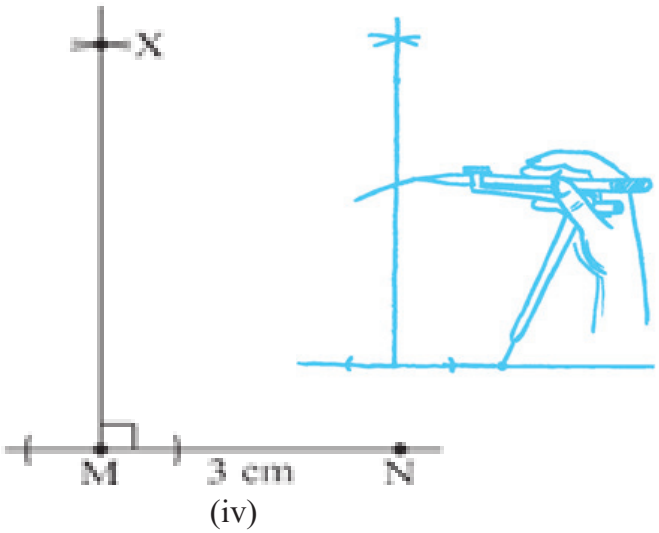
चरणः 3 M बिन्दौ $MX \perp MN$ इति आलिखन्तु। (Lइति बिन्दुः अस्मिन् लम्बे एव कुत्रचित् स्थितः स्यात्) [आकृतिः10.7 (iii)]।

चरणः 4 N बिन्दुं केन्द्रं मत्वा 5 सेण्टीमीटरमितां त्रिज्यां स्वीकृत्य एकं चापम् आलिखन्तु। (L बिन्दुः अस्मिन् एव चापे कुत्रचित् स्थितः स्यात् यतोहि अयं बिन्दुः N बिन्दुतः 5 सेण्टीमीटरमिते दूरे वर्तते) [आकृतिः 10.7(iv)]।



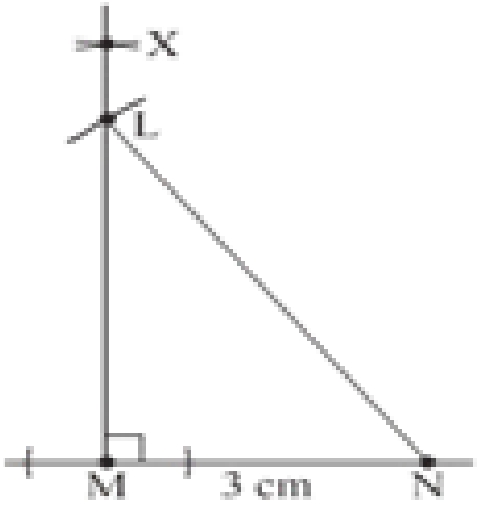
(iii)





(iv)

चरणः5 L बिन्दुः MX इति लम्बरेखायां तथा च N इति केन्द्रवति चापे स्थितः स्यात्। अतः L बिन्दुः अनयोः उभयोः प्रतिच्छेद-बिन्दुः भविष्यति। L तथा च N बिन्दू योजयन्तु। अधुना ΔLMN इति त्रिभुजं प्राप्तं भवति। [आकृतिः10.7(v)] ।



आकृतिः 10.7(i)-(v) (v)

प्रश्नावली 10.5

1. ΔPQR इति समकोणस्य रचनां कुर्वन्तु, यत्र $m\angle Q$ इति कोणः $90°$मितः तथा च QR इति भुजा 8 सेण्टीमीटरमिता एवञ्च PR इति भुजा 10 सेण्टीमीटरमिता अस्ति।
2. एकस्य समकोणत्रिभुजस्य रचनां कुर्वन्तु यस्य कर्णः 6 सेण्टीमीटरमितः दीर्घः वर्तते तथा च एकः पादः 4 सेण्टीमीटरमितः दीर्घः अस्ति।
3. ABC इति एकं समद्विबाहु-त्रिभुजं रचयन्तु यत्र $m\angle ACB$ इति कोणः $90°$मितः अस्ति एवञ्च AC इति भुजा 6 सेण्टीमीटरमिता अस्ति।

विविधाः प्रश्नाः

अधः केषाञ्चन त्रिभुजानां कोणानाञ्च परिमापाः दत्ताः सन्ति। एतेषु तेषां परिचयनं कुर्वन्तु येषां रचना नैव कर्तुं शक्यते तथा च एतदपि ज्ञापयन्तु यत् भवन्तः एतेषां रचनां किमर्थं न कर्तुं शक्नुवन्ति ? शेषत्रिभुजानां रचनां कुर्वन्तु।

	त्रिभुजानि	**प्रदत्ताः परिमापाः**		
1.	ΔABC	$m\angle A = 85°$,	$m\angle B = 115°$,	AB = 5 से.मी.
2.	ΔPQR	$m\angle Q = 30°$,	$m\angle R = 60°$,	QR = 4.7 से.मी.
3.	ΔABC	$m\angle A = 70°$,	$m\angle B = 50°$,	AC = 3 से.मी.
4.	ΔLMN	$m\angle L = 60°$,	$m\angle N = 120°$,	LM = 5 से.मी.
5.	ΔABC	BC = 2 से.मी.,	AB = 4 से.मी.,	AC = 2 से.मी.
6.	ΔPQR	PQ = 3.5 से.मी.,	QR = 4 से.मी.,	PR = 3.5 से.मी.
7.	ΔXYZ	XY = 3 से.मी.,	YZ = 4 से.मी.,	XZ = 5 से.मी.
8.	ΔDEF	DE = 4.5 से.मी.,	EF = 5.5 से.मी.,	DF = 4 से.मी.

अस्माभिः का चर्चा कृता ?

अस्मिन् अध्याये वयं मापिकायाः वृत्तकार्याः च केषाञ्चित् रचनानां विधीनां विषये अध्ययनं कृतवन्तः स्मः।

1. कस्याश्चित् प्रदत्त-रेखायाः तथा च एतादृशस्य बिन्दोः कृते यः अस्यां रेखायां स्थितः नास्ति, वयं तिर्यक्-छेदि-रेखाकृतौ, रेखायाः समान्तराम् एकां रेखाम् आलेखितुं समानैकान्तर-कोणानाम् अवधारणायाः उपयोगं कृतवन्तः। अस्याः रचनायाः कृते वयं समानसङ्गत-कोणानाम् अवधारणायाः उपयोगम् अपि कर्तुं शक्नुमः।
2. त्रिभुजानां सर्वाङ्गसमतायाः सङ्कल्पनायाः अप्रत्यक्षरूपेण उपयोगं कुर्वन्तः वयं त्रिभुज-रचनाविधेः विषये अध्ययनं कृतवन्तः।

   अस्मिन् अध्याये निम्नलिखितानाम् उदाहरणानां विषये चर्चा कृता।

   (i) भुजात्रयम् / SSS : त्रिभुजस्य तिसृणां भुजानां दीर्घताः दत्ताः सन्ति।

   (ii) भुजा-कोण-भुजा / SAS : कयोश्चित् द्वयोः भुजयोः दीर्घता एवं च तयोः भुजयोः मध्यवर्ति-कोणस्य परिमापः दत्तः अस्ति।

   (iii) कोण-कोण-भुजा / AAS : द्वयोः कोणयोः परिमापः तथा च तयोः कोणयोः मध्यवर्ति-भुजायाः दीर्घता दत्ता अस्ति।

   (iv) RHS: समकोणत्रिभुजस्य कर्णस्य एकस्य च पादस्य दीर्घता दत्ता अस्ति।

परिमापः एवञ्च क्षेत्रफलम्

अध्यायः 11

11.1 भूमिका

भवन्तः तले निर्मितानाम् आकृतीनां परिमापः एवञ्च वर्गस्य आयताकारस्य च क्षेत्रफलानां विषये षष्ठ्यां कक्ष्यायाम् अपठन्। परिमापः एकं संवृत्ताकृतिं परितः दूरत्वम् अस्ति यद्यपि क्षेत्रफलम् एकं संवृत्ताकृतिना वेष्टिततलभागम् अथवा क्षेत्रं दर्शयति। अस्यां कक्ष्यायां भवन्तः कासाञ्चन अन्यासाम् अधोभागाकृतीनां परिमापनस्य क्षेत्रफलस्य विषये अधिगमिष्यन्ति।

11.2 वर्गः आयतः च

आयुषः दीक्षा च उभौ चित्रं लिखतः। आयुषः एकं चित्रं षष्टिः सेण्टीमीटरपरिमित-दीर्घतायुक्ते (60) विंशतिः सेण्टीमीटरपरिमित-विस्तृतियुक्ते (20) च एकस्मिन् आयाताकारकर्गदे निरमात् (निर्मितवान्) यद्यपि दीक्षा एकं चित्रं चत्वारिंशत् सेण्टीमीटरपरिमितदीर्घतायुक्ते (40) पञ्चत्रिंशत् सेण्टीमीटरपरिमित-विस्तृतियुक्ते (35) च एकस्मिन् आयाताकारकर्गदे निरमात् (निर्मितवती)। एतयोः चित्रयोः पृथक् कपाटलवनम् उद्वर्तनम् (laminate) च करणीयम्।

यदि कपाटलवनस्य व्ययः प्रतिसेण्टीमीटर^2 परिमिते त्रीणि रूप्यकाणि (3.00) भवेयुः तु कतमं चित्रं कपाटलवनीकर्तुम् अधिकानि रूप्यकाणि व्ययीभविष्यन्ति ?

यदि उद्वर्तनस्य व्ययार्घः 2.00 रू. प्रति सेण्टीमीटर^2 परिमितं भवेत् तु कस्य चित्रस्य उद्वर्तने अधिकः व्ययः भविष्यति ?

कपाटलवनस्य निखिलं व्ययं ज्ञातुं वयं तस्य परिमापं ज्ञात्वा कपाटलवनार्घेण गुणनस्य आवश्यकता भविष्यति। अनेन प्रकारेण उद्वर्तनस्य निखिलव्ययम् अवज्ञातुं तस्य क्षेत्रफलं ज्ञात्वा तस्य उद्वर्तनार्घेण गुणनस्य आवश्यकता भविष्यति।

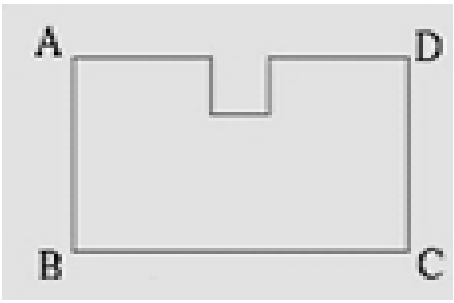
एतान् कुर्वन्तु

अधः प्रदत्तानां प्रश्नानाम् उत्तरं दातुं भवतां कृते क्षेत्रफलपरिमापयोः कस्य ज्ञानम् अनिवार्यं भविष्यति।

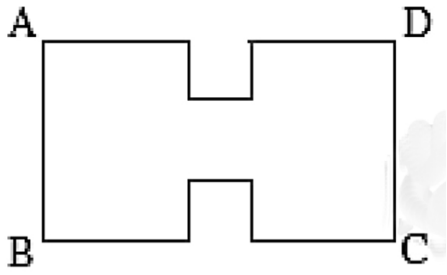
1. एकं श्यामफलकं कियत् स्थानं परिवेष्टति (परिवृणोति)?
2. एकाम् आयताकारीं पुष्पराधिकां परितः चत्वरं नियोक्तुम् आवश्यकायाः धातुतन्त्र्याः दीर्घता का अस्ति ?
3. एकं त्रिकोणोद्यानं परितः वारद्वयं परिभ्रमणे भवन्तः कियत् दूरं गमिष्यन्ति ?
4. एकम् आयाताकारं तरणालयम् आवृणोतुं भवतां कृते कियतः अभिगट्याच्छादकस्य आवश्यकता भविष्यति ?

किं भवन्तः जानन्ति -

आकृतिः 11.1



आकृतिः 11.2



आकृतिः 11.3

समबहुभुजस्य परिमापः = भुजानां सङ्ख्या × एकस्याः भुजायाः दीर्घता

वर्गस्य परिमापः = 4 × भुजा

आयतस्य परिमापः = 2 × (l + b)

आयतस्य क्षेत्रफलम् = l × b

वर्गस्य क्षेत्रफलम् = भुजा × भुजा

तान्या एकां समुचितचित्रकलाम् (collage) पूर्णं कर्तुं चतुर्सेण्टीमीटरपरिमितस्य (4) भुजामतः वर्गस्य आवश्यकता आसीत्।तस्याः समीपे अष्टाविंशतिः सेण्टीमीटरपरिमितदीर्घतायाः एवञ्च (21) एकविंशतिसेण्टीमीटरपरिमितविस्तृतेः आयताकारम् आस्तरणम्(Sheet) आसीत् (आकृतिः 11.1) सा आस्मात् आस्तरणात् 4 सेण्टीमीटर भुजामन्तं वर्गम् अछिनत्।तस्याः मित्रम् आस्तरणस्य शेषभागम् अपश्यत् (आकृतिः11.2) तान्यां च अपृच्छत् 'किम् अधुना आस्तरणस्य परिमापनं वर्धितम् अथवा न्यूनम् अभवत्' ?

किम् AD इति भुजा निखला दीर्घता, कर्तनात् पूर्वं वर्धिता ?

किं क्षेत्रफलं वर्धितम् अथवा न्यूनम् अभवत् ?

तान्या सम्मुख्याः भुजायाः एकम् अन्यवर्गं छिनति (आकृतिः 11.3)।

किम् आस्तरणस्य शेषभागस्य परिमापनं पूर्वस्मात् इतोऽपि अधिकं भविष्यति ?

किं क्षेत्रफलं पूर्वस्मात् इतोऽपि वर्धिष्यते अथवा न्यूनीभविष्यति ?

अतः इतः वयं किं निष्कर्षं निष्कासयितुं शक्नुमः ?

अनेन स्पष्टम् अस्ति यत् परिमापवर्धने सति क्षेत्रफलस्य वर्धनम् अपि आवश्यकं नास्ति।

एतान् कुर्वन्तु

1. एतादृशीषु बह्वीषु आकृतिषु तथा च कर्तिताकृतिषु प्रयोगं कुर्वन्तु।
   भवन्तः एतासाम् उपयोगः एताः आकृतीः वर्गाङ्कितेषु आस्तरेणेषु निर्माय क्षेत्रफलं परिमापनं च ज्ञातुं करिष्यामः। भवन्तः एतत् अजानन् यत् परिमापने वर्धनस्य तात्पर्यम् एतत् नास्ति यत् तस्य क्षेत्रफलम् अपि वर्धिष्यते।
2. एतादृशम् उदाहरणद्वयं यच्छन्तु यत्र परिमापवर्धने तस्य क्षेत्रफलं वर्धेत।
3. एतादृशम् उदाहरणद्वयं यच्छन्तु यत्र परिमापवर्धने तस्य क्षेत्रफले वृद्धिः मा भवेत्।

उदाहरणम् 1 10 मी. × 10 मी. मापयुतायां भित्त्याम् 3 मी. × 2 मी. मानयुतस्य एकद्वारस्य कपाटलवनस्य नियोक्तव्यम् अस्ति। यदि 1.मी.^{2} भित्त्यां वर्णालेपनस्य भृत्तिः 2.50 रूप्यकाणि स्युः तु सम्पूर्णायां भित्त्यां वर्णालेपनस्य निखिलव्ययं ज्ञायताम्।

समाधानम् भित्त्यां वर्णः द्वारस्य क्षेत्रफलं विहाय भविष्यति।

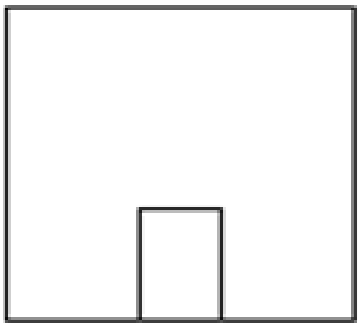
द्वारस्य क्षेत्रफलम् = l × b

= 3 × 2 मी.^{2} = 6 मी.^{2}

द्वारेण सह भित्तेः क्षेत्रफलम् = भुजा × भुजा =10 मी. × 10 मी. = 100 मी.^{2}

द्वारं विना भित्तेः क्षेत्रफलम् = (100 − 6) मी.^{2} × = 94 मी.^{2}

भित्त्यां वर्णलेपनस्य निखिलाभृत्तिः = 2.50 × 94 = 235 रू.



आकृतिः 11.4

उदाहरणम् 2 एकायताकारस्य आस्तरणस्य क्षेत्रफलम् 500 सेण्टीमीटर^2 अस्ति । यदि आस्तरणस्य दीर्घता 25 सेण्टीमीटर् अस्ति तर्हि अस्य विस्तृतिः का भविष्यति ? आयतकारस्य आस्तरणस्य परिमापः अपि ज्ञायताम् ।

समाधानम् आयताकारस्य आस्तरणस्य क्षेत्रफलम् = 500 सेण्टीमीटर^2

दीर्घता (l) = 25 सेण्टीमीटर्

आयतस्य क्षेत्रफलम् = l × b (यत्र b = आस्तरणस्य दीर्घता)

अतः विस्तृतिः $b = \frac{\text{क्षेत्रफलमम्}}{1} = \frac{500}{25}$ =20 सेण्टीमीटर्

आस्तरणस्य परिमापः = 2 × (l + b) = 2 × (25 + 20) सेण्टीमीटर्

= 90 सेण्टीमीटरपरिमितः

अनेन प्रकारेण आयताकारस्य आस्तरणस्य विस्तृतिः विंशतिः सेण्टीमीटरपरिमिता (20) तथा च अस्य परिमापः नवतिः सेण्टीमीटरपरमितः (90) इति अस्ति ।

उदाहरणम् 3 अनुः निज गृहस्य पुरतः उद्याने त्रिभागे चत्वरं योजयितुम् । आकृतिः 11.5 इच्छति (आकृतिः 11.5)। एतेषु एकस्याः भुजायाः दीर्घता विंशतिमीटरपरिमिता (20) अस्ति अवशिष्टयोः प्रत्येकं भुजयोः दीर्घता द्वादशमीटरपरिमिता (12) अस्ति । एकपञ्चाशत्शतेन रूप्यकैः (150) प्रति मीटर् इत्स्य अर्घेण चत्वर-व्ययः ज्ञायताम् ।

आकृतिः 11.5

समाधानम् चत्वरस्य आवश्यकी दीर्घता उद्यानस्य तत् परिमापः अस्ति यस्मिन् एका भुजा सम्मिलिता नास्ति ।

एतत् 20 मी. + 12 मी. + 12 मी. अर्थात् 44 मी. इत्यस्य तुल्यम् अस्ति ।

चत्वरस्य व्ययः = 150 रू. × 44 = 6600 रूप्यकाणि ।

उदाहरणम् 4 एका तन्त्रीः (10) दशसेण्टीमीटर-भुजामतः वर्गाकारस्य अस्ति । यदि तन्त्रीं पुनः वक्रीकृत्य एकम् 12 द्वादशसेण्टीमीटरदैर्घ्यमन्तम् आयतं निर्मामः तदा अस्य आयतस्य विस्तृतिः ज्ञायताम् । कस्य क्षेत्रफलम् अधिकम् अस्ति वर्गस्य अथवा आयतस्य ?

समाधानम्

वर्गस्य भुजा = 10 सेण्टीमीटर

तन्त्र्याः दीर्घता = वर्गस्य परिमापः = 4 × भुजा = 4 × 10 सेण्टीमीटर

= 40 सेण्टीमीटर

आयतस्य दीर्घता l = 12 सेण्टीमीटर, b इति आयतस्य दीर्घतां मन्वताम्

आयतस्य परिमापः = तन्त्र्याः दीर्घता = 40 सेण्टीमीटर्

आयतस्य परिमापः = 2 (l + b)

अनेन प्रकारेण 40 = 2 (12 + b)

अथवा $\frac{40}{2}$ = 12 + b

अतः, b = 20 −12 = 8 सेण्टीमीटर्

आयतस्य विस्तृतिः 8 सेण्टीमीटर अस्ति ।

वर्गस्य क्षेत्रफलम् $= (\text{भुजा})^2$

$= 10 \text{ सेण्टीमीटर} \times 10 \text{ सेण्टीमीटर} = 100 \text{ सेण्टीमीटर}^2$

आयतस्य क्षेत्रफलम् $= l \times b$

$= 12 \text{ सेण्टीमीटर} \times 8 \text{ सेण्टीमीटर} = 96 \text{ सेण्टीमीटर}^2$

अतः, वर्गः अधिकं क्षेत्रफलं परिवेष्टति यद्यपि अस्य परिमापः आयतस्य परिमानस्य तुल्यम् अस्ति।

उदाहरणम् 5 एकवर्गस्य एकस्य आयतस्य च क्षेत्रफलं तुल्यम् अस्ति यदि वर्गस्य भुजा 40 सेण्टीमीटर् भवेत् आयतस्य च विस्तृतिः 25 सेण्टीमीटर् भवेत् तु आयतस्य दीर्घता ज्ञायताम्। आयतस्य परिमापः अपि ज्ञायताम्।

समाधानम् वर्गस्य क्षेत्रफलम् $= (\text{भुजा})^2$

$= 40 \text{ सेण्टीमीटर} \times 40 \text{ सेण्टीमीटर} = 1600 \text{ सेण्टीमीटर}^2$

एतत् दत्तं वर्तते यत्

आयतस्य क्षेत्रफलम् = वर्गस्य क्षेत्रफलम्

आयतस्य क्षेत्रफलम् = $1600 \text{ सेण्टीमीटर}^2$

आयतस्य विस्तृतिः = 25 सेण्टीमीटर

आयतस्य क्षेत्रफलम् = $l \times b$

अथवा 1600 = $l \times 25$

अथवा 1600/25 = l

अथवा l = 64 सेण्टीमीटर

अतः आयतस्य दीर्घता (64) चतुष्षष्टिः सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति।

आयतस्य परिमापः = $2 (l + b) = 2 (64 + 25)$ सेण्टीमीटरपरिमितः

= 2×89 सेण्टीमीटर = 178 सेण्टीमीटरपरिमितः

अनेन प्रकारेण, आयतस्य परिमापः 178 सेण्टीमीटर् अस्ति यद्यपि अस्य क्षेत्रफलं वर्गस्य क्षेत्रफलस्य समानम् अस्ति।

प्रश्नावली 11.1

1. एकस्य आयताकारस्य भूखण्डस्य दीर्घता विस्तृतिः च क्रमशः पञ्चशतं (500) मीटरपरिमिता एवञ्च त्रिशतं (300) मीटरपरिमिता वर्तते। ज्ञायताम्

(i) भूखण्डस्य क्षेत्रफलम्

(ii) भूखण्डमूल्यं यदि एकवर्गमीटरपरितस्य भूखण्डस्य (1 मी.^{2}) मूल्यम् अयुतम् (10,000) रूप्यकाणि सन्ति।

2. एकस्य वर्गाकारस्य उद्यानस्य क्षेत्रफलं ज्ञायतां यदि तस्य परिमापः विंशत्यधिकत्रिशतं मीटरपरिमितः (320) अस्ति।

3. एकस्य आयताकार-भूखण्डस्य विस्तृतिः ज्ञेया यदि तस्य क्षेत्रफलं चत्वारिंशदधिकचतुश्शतं वर्गमीटरपरिमितम् (440 मी.^{2}) दीर्घता च द्वाविंशतिः मीटरपरिमिता (22 मी) स्यात्। अस्य परिमापः अपि ज्ञातव्यः।

4. एकस्य आयताकारस्य आस्तरणस्य परिमापः शतम् (100) सेण्टीमीटरपरिमितः अस्ति। यदि दीर्घता पञ्चत्रिंशत् (35) सेण्टीमीटर तर्हि अस्य विस्तृतिः ज्ञायताम्। क्षेत्रफलम् अपि ज्ञायताम्।

5. एकवर्गाकारस्य उद्यानस्य क्षेत्रफलम् एकायताकारस्य उद्यानस्य तुल्यम् अस्ति । यदि वर्गाकारस्य उद्यानस्य एका भुजा षष्टिमीटरपरिमिता (60) स्यात् यदि आयतकारोद्यानस्य दीर्घता नवतिः (90) मीटरपरिमिता भवेत् तदा आयतकारोद्यानस्य विस्तृतिः ज्ञेया ।

6. एका तन्त्री आयताकारा वर्तते । अस्याः दीर्घता चत्वारिंशत् (40) सेण्टीमीटरपरिमिता विस्तृतिः च द्वाविंशतिः सेण्टीमीटरपरिमिता (22) अस्ति । यदि तां वक्रीकृत्य पुनः एकवर्गं निर्मामः तर्हि प्रत्येकं भुजायाः मापः किं भविष्यति? एतद् अपि ज्ञायताम् यत् कस्य आकारस्य क्षेत्रफलम् अधिकं भविष्यति ?

7. एकस्य आयतस्य परिमाणः त्रिंशदधिक-एकशतम् (130) सेण्टीमीटरपरिमितः अस्ति । यदि आयतस्य विस्तृतिः त्रिंशत् सेण्टीमीटरपरिमिता (30) भवेत् तदा आयतस्य दीर्घता ज्ञातव्या । आयतस्य क्षेत्रफलम् अपि ज्ञायताम् ।

8. द्विमीटरपरिमितं दैर्घ्यमत् तथा च एकं मीटरपरिमितं विस्तृतिमत् द्वारम् एकस्यां भित्तौ नियोजयामः । भित्तेः दीर्घता 4.5 मीटरपरिमिता विस्तृतिः च 3.6 मीटरपरिमिता वर्तते आकृतिः11.6 (आकृतिः11.6) । विंशतिः रूप्यकाणि (20) वर्गमीटरपरिमितेन अर्घेण भित्त्यां श्वेततां (white wash) कारयितुं व्ययः ज्ञायताम् ।

आकृतिः 11.6

11.2.1 आयतस्य भागरूपे त्रिभुजम्

(8) अष्टौ सेण्टीमीटरपरिमितं तथा च (5) पञ्च सेण्टीमीटरपरिमितं भुजामद् एकम् आयतं स्वीकुर्वन्तु । आयतं विकर्णस्य अनुदिशम् एवं कर्तयन्तु येन त्रिभुजद्वयं प्राप्तं स्यात् (आकृतिः11.7)।

एकं त्रिभुजं द्वितीयस्मिन् त्रिभुजे स्थापयन्तु ।

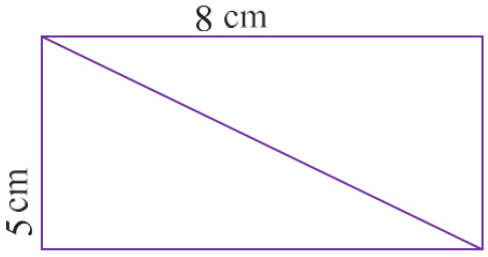
किम् एते त्रिभुजे पूर्णतया तुल्ये स्तः ?

किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् द्वयोः त्रिभुजयोः क्षेत्रफले समाने स्तः ?

किम् एते त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे अपि स्तः ?

एतयोः त्रिभुजयोः प्रत्येकं त्रिभुजस्य क्षेत्रफलं कियत् अस्ति ?

भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् द्वयोः त्रिभुजयोः क्षेत्रफलस्य योगफलम् आयतस्य क्षेत्रफलस्य तुल्यम् अस्ति ।



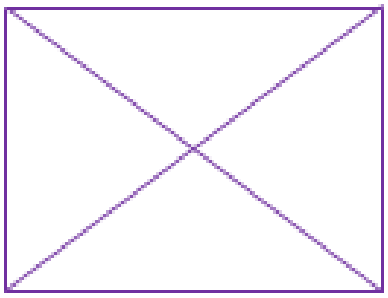
आकृतिः 11.7

$$\text{प्रत्येकं त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम्} = \frac{1}{2}(\text{आयतस्य क्षेत्रफलम्})$$

$$= \frac{1}{2} \times (l \times b) = \frac{1}{2}(8 \times 5)$$

$$= \frac{40}{2} = 20 \text{ सेण्टीमीटर}^2$$

अधुना पञ्चसेण्टीमीटरपरिमितम् (5) भुजामन्तं वर्गं स्वीकुर्वन्तु एतं च चतुर्षु (4) त्रिभुजेषु वण्टयन्तु यथा आकृत्यां दर्शितं वर्तते (आकृतिः11.8)।



आकृतिः 11.8

किं चतुर्णां त्रिभुजानां क्षेत्रफलं समानम् अस्ति ?

किं तानि अन्योऽन्यं सर्वाङ्समानानि सन्ति ? (त्रिभुजानि परस्परं वैपरीत्येन स्थापयन्तु)

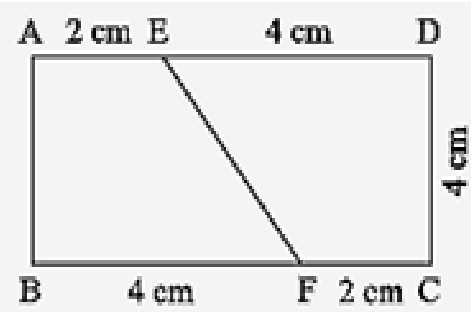
$$\text{प्रत्येकं त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम्} = \frac{1}{4}(\text{वर्गस्य क्षेत्रफलम्})$$

$$= \frac{1}{4}(\text{भुजा})^2 = 1/4\ (5)^2 \text{ सेण्टीमीटर}^2$$

$$= 6.25 \text{ सेण्टीमीटरपरिमित}^2$$

11.2.2 आयतस्य अन्येभ्यः सर्वाङ्गसमभागेभ्यः व्यापीकरणम्

6 सेण्टीमीटरदीर्घता 4 सेण्टीमीटरविस्तृतवान् आयतः भागद्वये विभक्तं यथा आकृत्यां प्रदर्शितम् आकृतिः 11.9)। आयतं द्वतीये कर्गदे अनुकुर्वन्तु आयतं च EF इत्यस्य अनुदिशं छित्वा द्वयोः भागयोः विभजन्तु।



आकृतिः 11.9

एकभागं द्वितीये भागे स्थापयन्तु अवलोकयन्तु च यत् तौ अन्योऽन्यं पूर्णतया आच्छादयतः (भवद्भिः एतौ परिभ्रमितुम् अपि शक्येते)

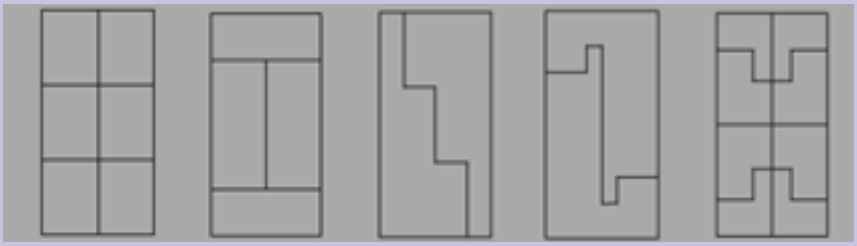
किम् एतौ सर्वाङ्गसमौ स्तः ? द्वावपि भागौ परस्परं सर्वाङ्गसमौ स्तः। अनेन प्रकारेण, एकभागस्य क्षेत्रफलं द्वितीयभागस्य क्षेत्रफलस्य समानं तुल्यं वा अस्ति।

अतः प्रत्येकं सर्वाङ्गसमभागस्य क्षेत्रफलं = $\frac{1}{2}$ (आयतस्य क्षेत्रफलम्)

= 1/2 (6×4) सेण्टीमीटर^2 = 12 सेण्टीमीटर^2

एतान् कुर्वन्तु

अधः प्रदत्ताः एकैकाः आयताः यस्य दीर्घता षट् सेण्टीमीटरपरिमिता (6) एवञ्च विस्तृतिः चतुस्सेण्टीमीटरपरिमिता (4) अस्ति सर्वाङ्गसमैः बहुभुजैः मेलनेन निर्मिताः सन्ति। प्रत्येकं बहुभुजस्य क्षेत्रफलं ज्ञायताम्।



11.3 समान्तर-बहुभुजस्य क्षेत्रफलम्

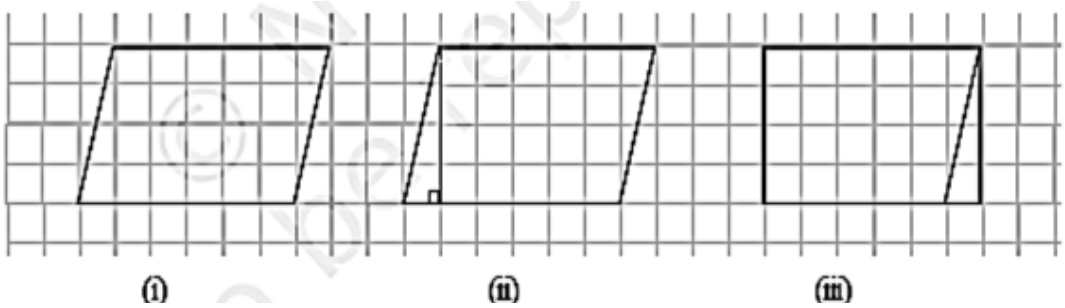
अस्माकं पुरतः वर्गान् आयतान् च अतिरिच्य बहवः अन्याकाराः दृष्टिपथे आयान्ति।

भवन्तः एकस्य भूखण्डस्य क्षेत्रफलं कथं ज्ञास्यन्ति यस्य आकारः समान्तरचतुर्भुजवद् विद्यते ?

आगच्छन्तु समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलप्राप्तेः एकविधिं जानीमः।

किम् एकं समान्तरचतुर्भुजं समानक्षेत्रफलवति आयते रूपान्तरितं कर्तुं शक्यते ?

एकस्मिन् बिन्दुरेखापुटे (graph paper) एकं समान्तरचतुर्भुजं निर्मान्तु यथाहि आकृतिः [11.10 (i)] मध्ये दर्शितम्। एतं समान्तरचतुर्भुजं छिन्दन्तु। समान्तरचतुर्भुजस्य एकस्मात् शीर्षाद् अस्य सम्मुखभुजायाम् एकं लम्बम् आलिखन्तु [आकृतिः11.10(ii)]। एतत् त्रिभुजं छिन्दन्तु एतच्च त्रिभुजं समान्तरचतुर्भुजस्य अपरभुजया सह स्थापयन्तु। [आकृतिः 11.10(iii)]।



आकृतिः 11.10

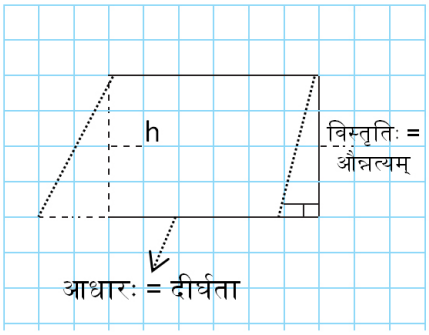
भवन्तः कीदृग् आकारं प्राप्नुवन्ति ? भवन्तः एकम् आयतं प्राप्नुवन्ति।

किं समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलं निर्मितस्य आयतस्य क्षेत्रफलस्य तुल्यं वर्तते ?

आम्, समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफल्म् = निर्मितस्य आयतस्य क्षेत्रफलम्

आयतस्य दीर्घता विस्तृतिः च किम् अस्ति ?

अस्माभिः दृष्टं यत् निर्मितस्य + आयतस्य दीर्घता समान्तरचतुर्भुजस्य आधारस्य दीर्घतायाः समाना अस्ति आयतस्य विस्तृतिः च समान्तरचतुर्भुजस्य औन्नत्यस्य तुल्या वर्तते (आकृतिः11.11)।



आकृतिः 11.11

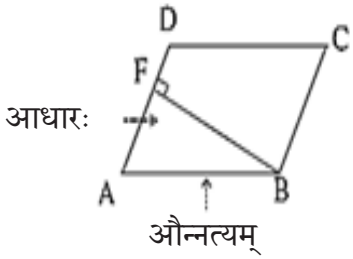
समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफल्म् = आयतस्य क्षेत्रफलम्

= दीर्घता × विस्तृतिः = l × b

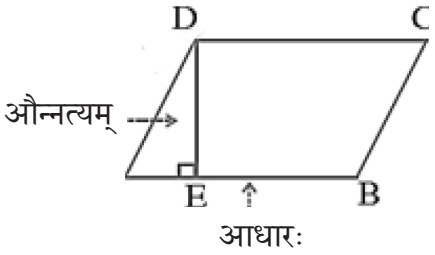
किन्तु आयतस्य दीर्घता l तथा च विस्तृतिः b क्रमशः समान्तरचतुर्भुजस्य आधारः b औन्नत्यं च h इति एव अस्ति।

अनेन प्रकारेण, समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् = आधारः × औन्नत्यम् = b × h

वयं समान्तरचतुर्भुजस्य यां कामपि भुजाम् आधारं स्वीकर्तुं शक्नुमः। अस्यां भुजायाम्, सम्मुखशीर्षतः पातितलम्बः,अस्य औन्नत्यम् इति कथ्यते।

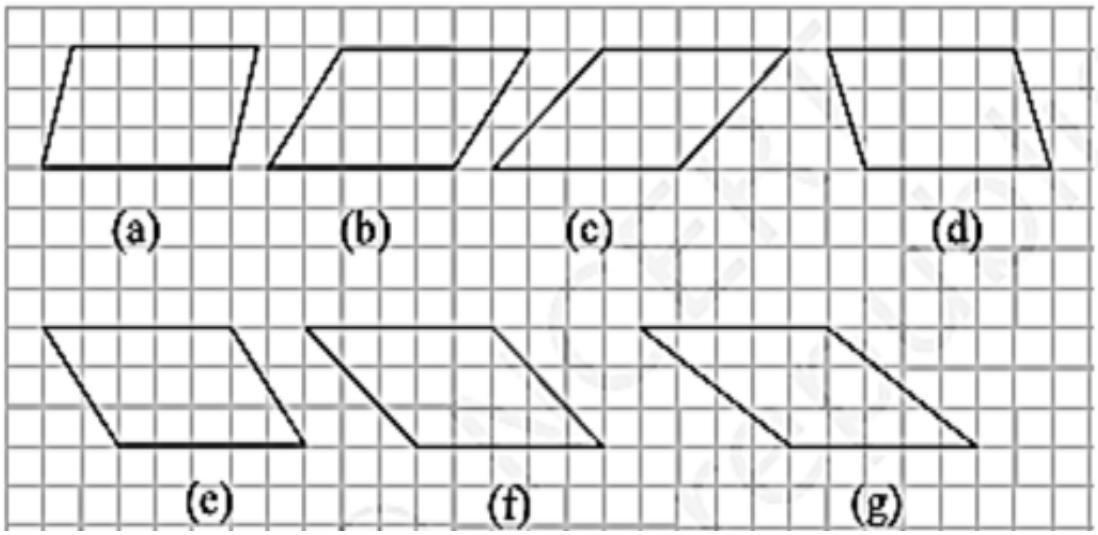


ABCD इत्यस्मिन् समान्तरचतुर्भुजे DE इति AB अस्मिन् लम्बः अस्ति। AB इति आधारः तथा च DE समान्तरचतुर्भुजस्य औन्नत्यम् अस्ति।



अस्मिन् ABCD इत्यस्मिन् समान्तरचतुर्भुजे, BF इति सम्मुखन्याम् AD इति भुजायां पातितलम्बः अस्ति। अत्र AD इति आधारः BF इति च औन्नत्यम् अस्ति।

अधोदत्तानां समान्तर-चतुर्भुजानां विषये विचारयन्तु (आकृतिः 11.12)।



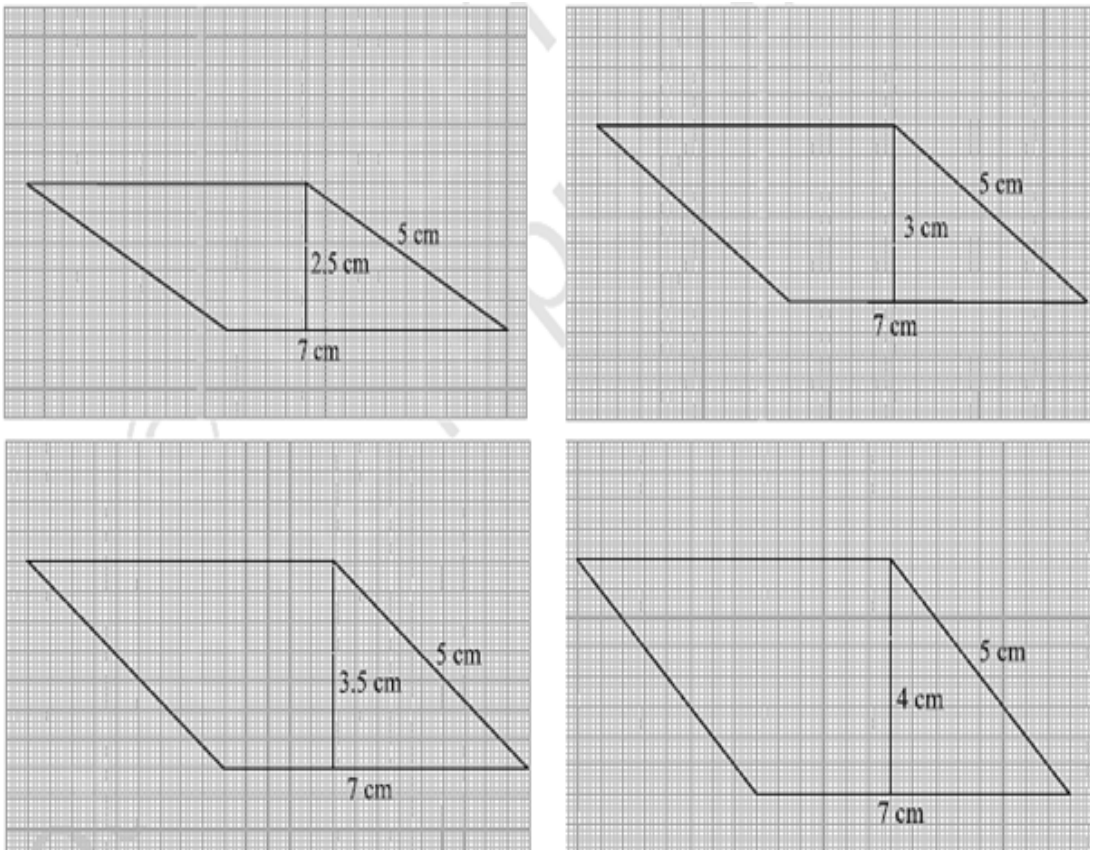
आकृतिः 11.12

आकृतिभिः आवेष्टितानां वर्गाणां सङ्ख्यां परिगण्य समान्तरचतुर्भुजानां क्षेत्रफलं ज्ञायतां तथा च भुजाः मीत्वा परिमापः अपि ज्ञायताम्।

निम्न-तालिकां पूरयन्तु -

समान्तर-चतुर्भुजः	आधारः	औन्नत्यम्	क्षेत्रफलम्	परिमापः
(a)	5 एककम्	3 एककम्	5 × 3 = 15 वर्गः एककम्	
(b)				
(c)				
(d)				
(e)				
(f)				
(g)				

भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् एतेषां समान्तरचतुर्भुजानां क्षेत्रफलं तु समानम् अस्ति किन्तु परिमापाः पृथक् सन्ति। अधुना सप्त (7) सेण्टीमीटरपरिमितं पञ्च (5) च सेण्टीमीटरपरिमितं भुजामन्ति समान्तरचतुर्भुजानि पश्यामः (आकृतिः 11.13)।



आकृतिः 11.13

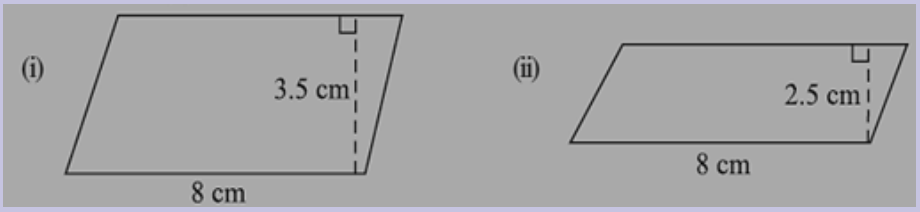
प्रत्येकं समान्तरचतुर्भुजस्य परिमापं क्षेत्रफलं च जानन्तु। स्वं परिणामम् अपि विश्लिष्यन्तु।

भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् समान्तरचतुर्भुजानां क्षेत्रफलं पृथक् अस्ति किन्तु परिमापः समानः अस्ति।

एतद् दर्शयति यत् समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुं भवद्भिः समान्तरचतुर्भुजस्य आधारः तथा च सङ्गतम् औन्नत्यम् अपि ज्ञातव्यं भवति।

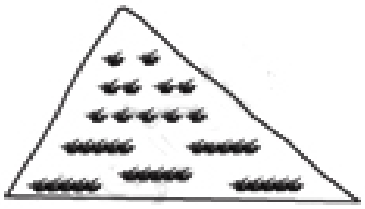
एतान् कुर्वन्तु

निम्न-समान्तरचतुर्भुजानां क्षेत्रफलं जानन्तु।



(iii) ABCD इत्यस्मिन् समान्तरचतुर्भुजे AB = 7.2 सेण्टीमीटरपरिमितं तथा च C इत्यस्माद् बिन्दोः AB इत्यस्यां भुजायां लम्बः 4.5 सेण्टीमीटरपरिमितः अस्ति।

11.4 त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम्



एकः उद्यानपालः एकस्मिन् त्रिकोणे उद्याने तृण-वपनस्य व्ययं ज्ञातुम् इच्छति।

अस्यां स्थितौ अस्माभिः त्रिभुजाकार-क्षेत्रस्य क्षेत्रफलं ज्ञातव्यम्।

आयान्तु एकस्य त्रिभुजस्य क्षेत्रफलप्राप्तेः विधिं जानीमः।

एकस्मिन् कर्गदखण्डे एकं विषमबाहुत्रिभुजं रचयन्तु। एतत् त्रिभुजं छिन्दन्तु। अनेन प्रकारेण भवतः पार्श्वे समान-परिमापस्य द्वे विषमबाहुत्रिभुजे स्तः। किम् एते त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे स्तः ?

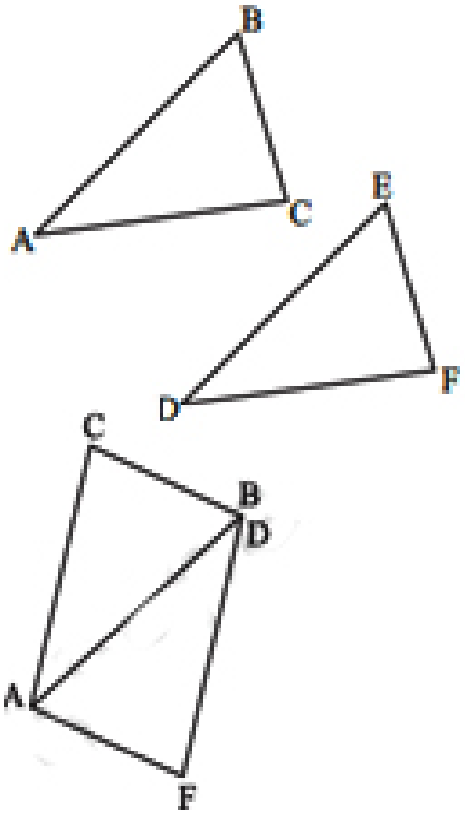
एकं त्रिभुजं द्वितीयस्मिन् त्रिभुजे स्थापयन्तु येन ते मिथः आच्छादेयेताम्। भवन्तः तयोः एकं त्रिभुजं परिभ्रामयितुम् अपि शक्नुवन्ति।

सम्प्रति द्वे त्रिभुजे तथा अन्योऽन्यं स्थापयन्तु येन तयोः सङ्गतभुजाः परस्परं मिलेयुः (यथा 11.14 इति आकृत्यां प्रदर्शितं वर्तते)।

किम् अनेन प्रकारेण निर्मिता आकृतिः एकं समान्तरचतुर्भुजम् अस्ति ? प्रत्येकं त्रिभुज-क्षेत्रफलस्य तुलनां समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलेन कुर्वन्तु।

त्रिभुजानाम् आधारस्य औन्नत्यस्य च तुलना समान्तरचतुर्भुजस्य आधारेण औन्नत्येन च कुर्वन्तु।

भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् द्वयोः त्रिभुजयोः क्षेत्रफलयोः योगफलं समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलस्य तुल्यम् अस्ति। त्रिभुजस्य आधारः एवञ्च औन्नत्यं क्रमशः समान्तरचतुर्भुजस्य आधारस्य औन्नत्यस्य च समानम् अस्ति।



आकृतिः 11.14

प्रत्येकं त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{2}$ (समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम्)

$= \frac{1}{2}$(आधारः× औन्नत्यम्) (यतोहि समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् = आधारः× औन्नत्यम्)

$= \frac{1}{2}$(आ.×औ.) (अथवा = $\frac{1}{2}$ आ.औ.इति सङ्क्षेपेण)

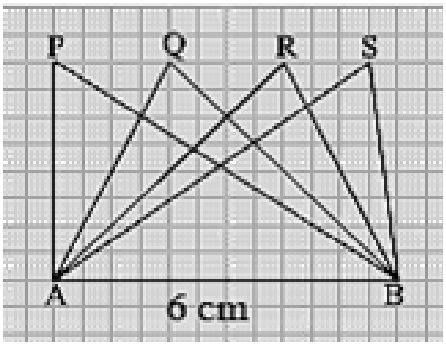
एतान् कुर्वन्तु

1. उपरि प्रदत्तान् क्रियाकलापान् भिन्नप्रकारकाणि त्रिभुजानि स्वीकृत्य कुर्वन्तु।
2. भिन्नप्रकारकाणि समान्तरचतुर्भुजानि स्वीकुर्वन्तु। प्रत्येकं समान्तरचतुर्भुजं द्वयोः त्रिभुजयोः एकस्य विकर्णस्य अनुदिशं छिन्दन्तु। किम् एतानि त्रिभुजानि सर्वाङ्गसमानि सन्ति।

(11.15) इति आकृत्यां सर्वाणि अपि त्रिभुजानि AB = 6 इति षट् सेण्टीमीटरपरिमिते आधारे स्थितानि सन्ति।

AB इत्यस्मिन् आधारे प्रत्येकं त्रिभुजस्य सङ्गतौन्नत्यस्य विषये भवन्तः किं वक्तुं शक्नुवन्ति ? किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् सर्वेषां त्रिभुजानां क्षेत्रफलानि समानानि सन्ति ? आम्।

किं त्रिभुजं सर्वाङ्गसमम् अस्ति ? न।

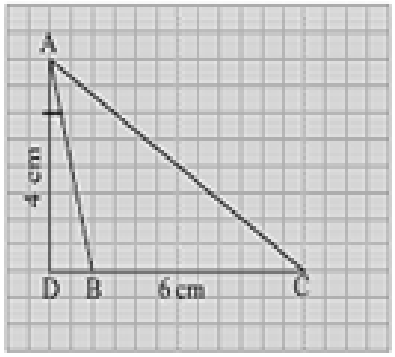


आकृतिः 11.15

वयं निष्कर्षं निस्सारयामः यत् **सर्वेषां सर्वाङ्गसम-त्रिभुजानां क्षेत्रफलं समानं भवति किन्तु एतद् आवश्यकं भवेत् यत् तानि त्रिभुजानि येषां क्षेत्रफलं समानं भवति तानि सर्वाङ्गसमानि सन्ति।**

एकम् 6 षट् सेण्टीमीटरपरिमितम् आधारमत् ABC इति अधिककोणत्रिभुजम् (obtuse angled triangle) विचारयामः। (आकृतिः 11.16)।

अस्य AD इति औन्नत्यम् A इत्यस्मात् शीर्षात् DC इत्यस्मिन् आधारे एकः लम्बः अस्ति यः त्रिभुजस्य बहिः स्थितः वर्तते। किं भवन्तः अस्य त्रिभुजस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुं शक्नुवन्ति ?



आकृतिः 11.16

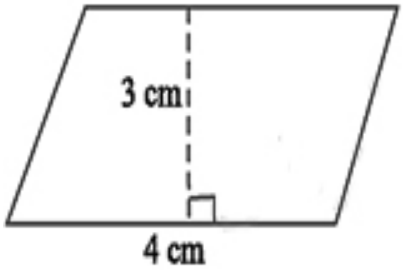
उदाहरणम् 6 एकस्य समान्तरचतुर्भुजस्य एका भुजा सङ्गतौन्नत्यं च क्रमशः चतुस्सेण्टीमीटरपरिमितम् (4) तथा च त्रिसेण्टीमीटरपरिमितम् (3) वर्तते। समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलं ज्ञायताम् (आकृतिः 11.17)।

समाधानम् आधारस्य प्रदत्तं दैर्घ्यम् अस्ति (b) = 4 चतुस्सेण्टीमीटरपरिमितम्

औन्नत्यं च (h) = 3 त्रिसेण्टीमीटरपरिमितम्

समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् = b × h = 4 चतुस्सेण्टीमीटरपरिमितम् × 3 त्रिसेण्टीमीटरपरिमितम् = 12 द्वादशवर्गसेण्टीमीटरपरिमितम्।

उदाहरणम् 7 यदि एकस्य समान्तरचतुर्भुजस्य (आकृतिः 11.18) क्षेत्रफलम् चतुर्विंशतिः वर्गसेण्टीमीटर परिमितम् (24) आधारः च 4 चतुस्सेण्टीमीटरपरिमितः भवेत् तदा औन्नत्यं 'x' इति ज्ञायताम्।



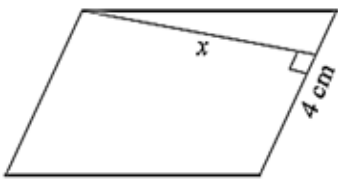
आकृतिः 11.17

समाधानम् समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् = b × h

अतः $24 = 4 \times x$

अथवा $\frac{24}{4} = x$

अथवा x = षट् सेण्टीमीटरपरिमितम् (6)



आकृतिः 11.18

अनेन प्रकारेण समान्तरचतुर्भुजस्य औन्नत्यं षट् सेण्टीमीटरपरिमितम् (6)।

उदाहरणम् 8 ABCD इति समान्तरचतुर्भुजस्य द्वयोः भुजयोः दीर्घता 6 षट्सेण्टीमीटरपरिमिता 4 चतुस्सेण्टीमीटरपरिमिता च विद्यते।

CD इति आधारस्य सङ्गतौन्नत्यं त्रिसेण्टीमीटरपरिमितम् अस्ति (आकृतिः 11.19)। ज्ञायताम्
(i) समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम्। (ii) AD इति आधारस्य सङ्गतौन्नत्यम्।

समाधानम्

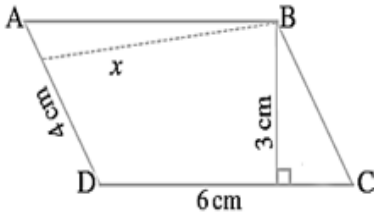
(i) समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् = b × h
= 6 से.मी. × 3 से.मी. = 18 अष्टादशवर्गसेण्टीमीटरपरिमितम्।

(ii) आधारः (b) = 4 चतुस्सेण्टीमीटरपरिमितः
औन्नत्यम् = x (मन्यन्ताम्)
क्षेत्रफलम् = 18 अष्टादशवर्गसेण्टीमीटरपरिमितम्।

समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् = b × x

$18 = 4 \times x$

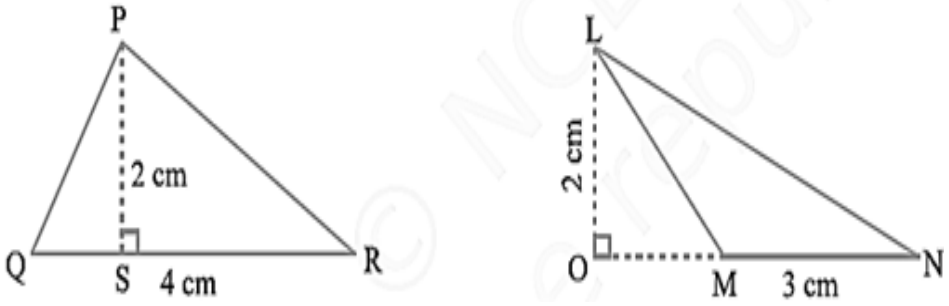
$\frac{18}{4} = x$



अतः $x = 4.5$ सेण्टीमीटरपरिमित **आकृतिः 11.19**

अनेन प्रकारेण AD इति आधारस्य सङ्गतौन्नत्यम् 4.5 सेण्टीमीटरपरिमितम् अस्ति।

उदाहरणम् 9 निम्न-त्रिभुजयोः क्षेत्रफलं ज्ञायताम् (आकृतिः 11.20)।



(i) **आकृतिः 11.20** **(ii)**

समाधानम्

(i) त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{2}$ b h $= \frac{1}{2} \times QR \times PS$

$= \frac{1}{2} \times 4$ से. मी. × 2 से.मी. = 4 चतुर्वर्गसेण्टीमीटरपरिमितम्।

(ii) त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{2}$ b h $= \frac{1}{2} \times MN \times LO$

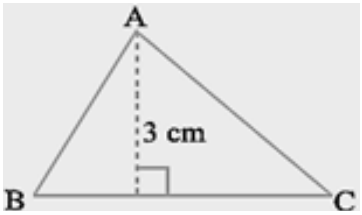
$= \frac{1}{2} \times 3$ से.मी. × 2 से.मी. = 3 त्रिवर्गसेण्टीमीटरपरिमितम्।

उदाहरणम् 10 BC इति ज्ञायतां यदि ABC इति त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् षड्त्रिंशत्वर्गसेण्टीमीटरपरिमितम् (36) AD इति औन्नत्यं 3 त्रिसेण्टीमीटरपरिमितम् अस्ति (आकृतिः 11.21)।

समाधानम् औन्नत्यं = 3 त्रिसेण्टीमीटरपरिमितम्, क्षेत्रफलम् = 36 षड्त्रिंशत्वर्गसेण्टीमीटरपरिमितम्।

ABC इति त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{2}$ bh

$36 = \frac{1}{2} \times b \times 3$



आकृतिः 11.21

$b = \frac{36 \times 2}{3} = 24$ सेण्टीमीटरपरिमितः

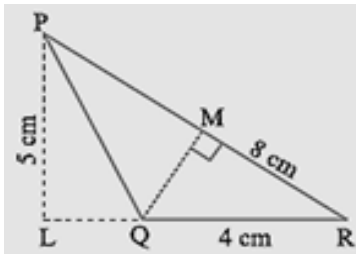
अतः BC = 24 सेण्टीमीटरपरिमितः

उदाहरणम् 11 ΔPQR इत्यस्मिन् त्रिभुजे PR = 8 सेण्टीमीटरपरिमितः QR = 4 चतुर्सेण्टीमीटरपरिमितः PL = 5 पञ्चसेण्टीमीटरपरिमितः (आकृतिः 11.22)। ज्ञायताम् (i) PQR इत्यस्य क्षेत्रफलम् (ii) QM

समाधानम् (i) आधारः =4 चतुर्सेण्टीमीटरपरिमितः।

औन्नत्यम् = 5 पञ्चसेण्टीमीटरपरिमितम्

त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{2}$ b h, $= \frac{1}{2} \times 4$ से.मी. × 5 से.मी.



आकृतिः 11.22

= 10 दशवर्गसेण्टीमीटरपरिमितम्^{2}।

(ii) आधारः = 8 अष्टसेण्टीमीटरपरिमितः औन्नत्यम् =?,

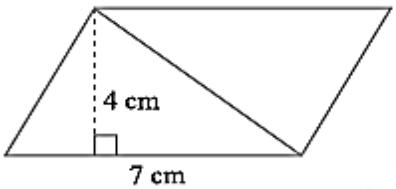
क्षेत्रफलम् = 10 दशवर्गसेण्टीमीटरपरिमित।

त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{2}$ b h, अर्थात् $10 = \frac{1}{2} \times 8 \times h$

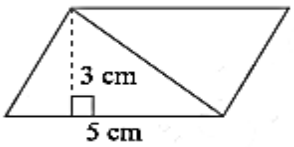
$h = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5$ अतः QM इति कर्णः = 2.5 सेण्टीमीटरपरिमितः।

प्रश्नावली 11.2

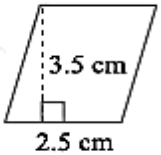
1. निम्नेषु प्रत्येकं समान्तरचतुर्भुजानां क्षेत्रफलं जानन्तु -



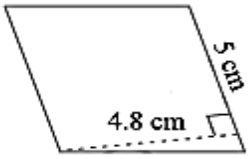
(a)



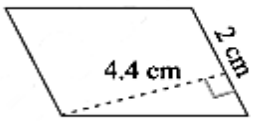
(b)



(c)

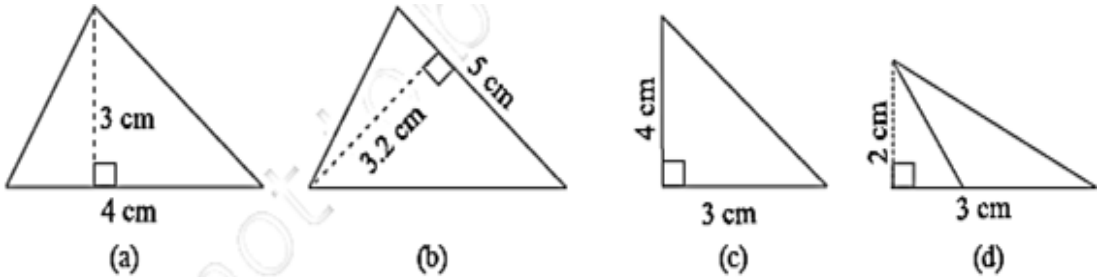


(d)



(e)

2. निम्नेषु प्रत्येकं त्रिभुजानां क्षेत्रफलं ज्ञायताम् -



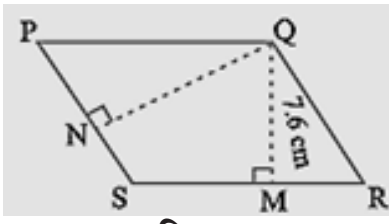
3. रिक्तस्थानानां मानं ज्ञायताम् -

क्र.म.	आधारः	औन्नत्यम्	समान्तरचतुर्भुजानां क्षेत्रफलं
a	20 से.मी.		246 से.मी^{2}
b		15 से.मी.	154.5 से.मी^{2}
c		8.4 से.मी.	48.72 से.मी^{2}
d	15.6 से.मी.		16.38.से.मी^{2}

4. रिक्तस्थानानां मानं जानन्तु -

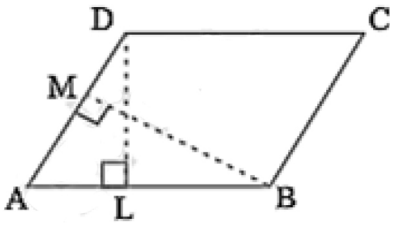
आधारः	औन्नत्यम्	त्रिभुजानां क्षेत्रफलम्
15 से.मी.	_____	87 से.मी^{2}
_____	31.4 मि.मी.	1256 मि.मी^{2}
22 से.मी.	_____	170.5 से.मी^{2}

5. PQRS इति एकं समान्तरचतुर्भुजम् अस्ति (आकृतिः 11.23) । QM इति Q इति शीर्षात् SR यावत्पर्यन्तम् औन्नत्यम् अस्ति तथा च QN इति Q इति शीर्षात् PS यावत्पर्यन्तम् औन्नत्यम् अस्ति । यदि - SR = द्वादश सेण्टीमीटरपरिमितः (12) तथा च QM = 7.6 सेण्टीमीटरपरिमितमितः भवेतां तदा ज्ञायताम् -
   (a) PQRS इति समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम्
   (b) यदि PS = 8 अष्टौ सेण्टीमीटरपरिमितः अस्ति तदा QN



आकृतिः 11.23

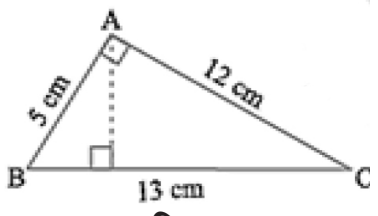
6. ABCD समान्तरचतुर्भुजस्य DL इति अथ च BM इति क्रमशः भुजे AB इति अथ च AD इति इत्येतयोः भुजयोः उपरि लम्बौ स्तः (आकृतिः 11.24) । यदि समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् 1470 वर्गसेण्टीमीटरपरिमितम् अस्ति एवञ्च AB = 35 से.मी.तथा च AD = 49 से.मी. अस्ति तदा BM अथ च DL इत्यनयोः दैर्घ्यं ज्ञायताम् ।



आकृतिः 11.24

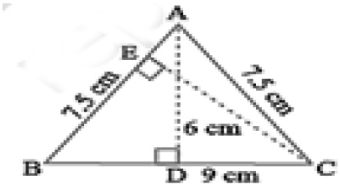
7. ABC इत्यस्मिन् त्रिभुजे A इत्यत्र समकोणः अस्ति (आकृतिः 11.25) तथा च AD इति BC इत्येतस्यां भुजायां लम्बः अस्ति। यदि AB = (5) पञ्च सेण्टीमीटरपरिमिता, BC = 13 त्रयोदशसेण्टीमीटरपरिमिता अथ च AC = 12 द्वादश सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति तदा ΔABC इति त्रिभुजस्य क्षेत्रफलं ज्ञायताम् । AD इति भुजायाः दीर्घता अपि ज्ञायातम् ।

8. ΔABC इति एकं समद्विबाहुत्रिभुजम् अस्ति यस्मिन् AB = AC = 7.5 सेण्टीमीटरपरिमिते तथा च BC = 9 सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति (आकृतिः 11.26) ।



आकृतिः 11.25

A इत्यस्माद् बिन्दुतः BC इति पर्यन्तम् औन्नत्यम् AD = 6 सेण्टीमीटरपरिमितम् अस्ति। ΔABC इत्यस्य क्षेत्रफलं ज्ञातं कुर्वन्तु। C इत्यस्मात् AB इति पर्यन्तम् औन्नत्यम् अर्थात् CE इति (औन्नत्यम्) किं भविष्यति ?



आकृतिः 11.26

आकृतिः 11.27

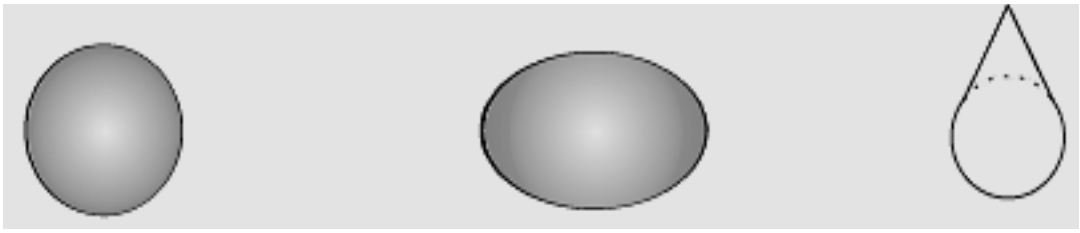
11.5 वृत्तम्

एकः धावनपन्थाः स्व-उपान्तभागयोः अर्धवृत्ताकारः अस्ति (11.27 आकृतिः)।

भवन्तः किम् एकेन धावकेन लङ्घित-दीर्घतां ज्ञातुं शक्नुवन्ति यदि सः अस्य धावनपन्थानः सम्पूर्णाम् आवृत्तिद्वयं करोति। यदा आकारः वृत्ताकारः भवेत् तदा अस्माभिः तं परितः दूरता-प्राप्तेः एकः विधिः अवश्यमेव ज्ञातव्यः।

11.5.1 वृत्तस्य परिधिः

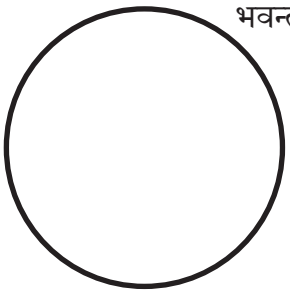
तान्या संसृष्टपत्रस्य वलिताकाराणि पृथक् स्थूलकर्गदानि कर्तयति। सा एतानि स्थूलकर्गदानि सज्जीकर्तुम् एतानि परितः जालाभरणं योक्तुम् इच्छति। एकैकस्मै तया कियत् दीर्घमानं जालाभरणम् अपेक्षते (आकृतिः 11.28)



(a) (b) (c)

आकृतिः 11.28

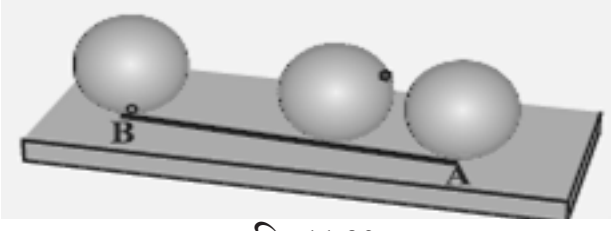
भवन्तः एकेन मापकेन एकं वक्रं (curve) वलयं वा मातुं न शक्नुवन्ति यतो हि इमाः आकृत्यः सरलाः न सन्ति। अधुना भवन्तः किं करिष्यन्ति ?



आकृतिः 11.29

11. 28 (a) इति आकृतौ प्रदत्ताकारस्य अपेक्षितस्य जालाभरणस्य दूरतां ज्ञातुं भवतां कृते अत्र एकः उपायः प्रकारः वा सूच्यते। स्थूलकर्गदस्य जालाभरणे एकं बिन्दुम् अङ्कयन्तु तत् च उत्पीठे स्थापयन्तु। बिन्दोः स्थितिम् उत्पीठे अपि अङ्कयन्तु (आकृतिः 11.29)।

इदानीं वलयाकारं स्थूलकर्गदम् एकस्यां सरलदिशि उत्पीठिकायां तावत्पर्यन्तं भ्रामयन्तु यावत्पर्यन्तम् अङ्कितबिन्दुः पुनः उत्पीठिकां न स्पृशेत्। एतत् दूरत्वं रेखायाः अनुदिक् मान्तु। एतत् अपेक्षितस्य जालाभरणस्य दूरता वर्तते। इयं स्थूलकर्गदे अङ्कितबिन्दुतः स्थूलकर्गदस्य उपान्तभागात् तम् एव बिन्दुपर्यन्तं दूरता अस्ति।



आकृतिः 11.30

भवन्तः वृत्ताकारं वस्तु परितः उपान्तभागे एकं सूत्रं संस्थाप्य अपि दूरतां ज्ञातुं शक्नुवन्ति।

एकं वृत्ताकारक्षेत्रं परितः दूरत्वम् अस्य परिधिः इति कथ्यते।

एतान् कुर्वन्तु

एकस्याः कूप्याः उदञ्चनं पिधानम्, एकं कङ्कणम् अथ च वृत्ताकारं वस्तु स्वीकृत्य एतेषां परिधिं ज्ञातं कुर्वन्तु।

किम् अधुना भवन्तः अनेन विधिना एकेन धावकेन एकस्य मार्गस्य क्रमितदूरत्वं ज्ञातुम् अर्हन्ति।
अधुनापि पन्थानं परितः दूरतायाः ज्ञानकरणं (ज्ञानार्थं) तथा च अन्यस्य कस्यचित् वृत्ताकारवस्तुनः सूत्रेण मापनम् अतीव कठिनं भविष्यति। तथापि अयः मापः शुद्धः यथार्थः वा न भविष्यति।
अतः एतदर्थम् अस्माकं कृते एकस्य सूत्रस्य आवश्यकता वर्तते यथाहि तलाकृतीनाम् अथवा तलाकाराणां कृते वयं प्रयुङ्क्तवन्तः।
आयान्तु वयं पश्यामः यत् किं वृत्तानां व्यासपरिध्योः किमपि सम्बन्धम् अस्ति।
निम्न-तालिकायाः उपरि विचारं कुर्वन्तु। भिन्नत्रिज्यानां षड् वृत्तानि आलिखन्तु सूत्रेण च तेषां परिधिः ज्ञायताम्। परिधिव्यासयोः अनुपातम् अपि ज्ञातं कुर्वन्तु।

वृत्तम्	त्रिज्या	व्यासः	परिधिः	परिधि-व्यासयोः अनुपातः
1.	3.5 से.मी.	7.0 से.मी.	22.0 से.मी.	$\frac{22}{7} = 3.14$
2.	7.0 से.मी.	14.0 से.मी.	44.0 से.मी.	$\frac{44}{14} = 3.14$
3.	10.5 से.मी.	21.0 से.मी	66.0 से.मी.	$\frac{66}{21} = 3.14$
4.	21.0 से.मी.	42.0 से.मी.	132.0 से.मी.	$\frac{132}{42} = 3.14$
5.	5.0 से.मी.	10.0 से.मी.	32.0 से.मी.	$\frac{32}{10} = 3.2$
6.	15.0 से.मी.	30.0 से.मी.	94.0 से.मी.	$\frac{94}{30} = 3.13$

उपरि प्रदत्ततालिकातः भवन्तः कं निष्कर्षं निस्कास्यामः? किम् एषः अनुपातः प्रायशः समानः अस्ति ? आम्। किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् एकस्य वृत्तस्य परिधिः सदैव अस्य व्यासात् त्रिगुणितम् वर्तते ? आम्।

एषः अनुपातः स्थिरः अस्ति अयं च 'πr^2'(pi) पाई इत्यनेन प्रदर्श्यते। अस्य मानः प्रायेण $\frac{22}{7}$ अथवा 3.14 इति अस्ति।

अतः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् $\frac{c}{d} = \pi$ इति अस्ति, यत्र 'c' इति वृत्तस्य परिधिं तथा च 'd' इति अस्य व्यासं दर्शयति।

अथवा $C = \pi d$

वयं जानीमः यत् एकस्य वृत्तस्य व्यासः 'd', (r) इति त्रिज्यायाः द्विगुणितः भवति। अर्थात् $d = 2r$

अतः $C = \pi d = \pi \times 2r$ अथवा $C = 2\pi r$

एतान् कुर्वन्तु

11.31 इति आकृतौ

(a) कतमस्य वर्गस्य परिमापः अधिकः अस्ति ?

(b) कतमः अधिकः अस्ति, लघु-वर्गस्य परिमापः अथवा वृत्तस्य परिधिः ?

आकृतिः 11.31

एतान् कुर्वन्तु

एकां चतुर्थांशपरिमिताम् अथ च एकाम् अर्धस्थालिकां स्वीकुर्वन्तु । प्रत्येकम् उत्पीठिकायाः उपरितने तले एकं वारं भ्राम्यन्तु । कतमा स्थालिका एकस्याम् आवृत्तौ अधिकं दूरत्वं क्रामति ? कतमा स्थालिका न्यूनावृतिषु उत्पीठिकायाः उपरितनभागस्य दैर्घ्यं क्रमिष्यति ?

उदाहरणम् 12 दश (10) सेण्टीमीटरपरिमितस्य व्यासमतः एकस्य वृत्तस्य परिधिः ज्ञायताम् ($\pi = 3.14$ इति स्वीकुर्वन्तु)

समाधानम् वृत्तस्य व्यासः (d) $= 10$ से.मी.

वृत्तस्य परिधिः $= \pi d$

$= 3.14 \times 10$ से.मी. $= 31.4$ सेण्टीमीटरपरिमिता

अतः 10 सेण्टीमीटरपरिमितस्य व्यासमतः वृत्तस्य परिधिः 31.4 सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति ।

उदाहरणम् 13 एकस्याः वृत्ताकारचषकाधान्याः (disc) परिधिः ज्ञायताम् यस्याः त्रिज्या 14 सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति ।

$\left(\text{प्रयोगं कुर्वन्तु } \pi = \frac{22}{7}\right)$

समाधानम् वृत्ताकारचषकाधान्याः (disc) त्रिज्या (r) = 14 सेण्टीमीटरपरिमिता

वृत्ताकारचषकाधान्याः परिधिः $= 2\ \pi r$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14$ से.मी. $= 88$ सेण्टीमीटरपरिमिता

अतः वृत्ताकारचषकाधान्याः परिधिः अष्टाशीतिः (88) सेण्टीमीटरपरिमिता वर्तते ।

उदाहरणम् 14 एकस्याः वृत्ताकार-प्रवाहनलिकायाः त्रिज्या दश(10) सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति। प्रवाहनलिकां परितः एकवारं संश्लेषिका-संवेष्टनस्य अपेक्षितं दैर्घ्यं ज्ञायातम् (प्रयोगं कुर्वन्तु $\pi = 3.14$)।

समाधानम् प्रवाहनलिकायाः त्रिज्या (r) = 10 सेण्टीमीटरपरिमिता संश्लेषिका आवश्यकं दैर्घ्यम्, प्रवाहनलिकायाः परिधेः समानम् अस्ति ।

प्रवाहनलिकायाः परिधिः $= 2\ \pi r$

$= 2 \times 3.14 \times 10$ से.मी. $= 62.8$ सेण्टीमीटरपरिमिता

अतः प्रवाहनलिकां परितः एकवारं संश्लेषिका-संवेष्टनस्य अपेक्षितं दैर्घ्यं 62.8 इति सेण्टीमीटरपरिमितम् अस्ति ।

उदाहरणम् 15 प्रदत्तायाः आकृत्याः परिमापः ज्ञायातम् (आकृतिः 11.32)।
$(\pi = \frac{22}{7})$।

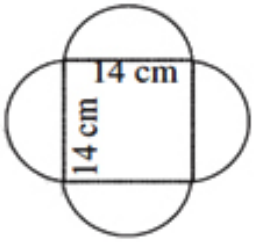
समाधानम् अस्याम् आकृत्याम् अस्माभिः वर्गस्य प्रतिदिशं स्थितस्य अर्धवृत्तस्य परिधिः ज्ञातव्या । किं भवतां कृते वर्गपरिमापस्य ज्ञानम् अपि आवश्यकम् अस्ति ? न । अस्याः आकृतेः बाह्यपरिसीमा अर्धवृत्तैः निर्मिता । एकैकस्य अर्धवृत्तस्य व्यासः चतुर्दश (14) सेण्टीमीटरपरिमितः अस्ति ।

वयं जानीमः यत् वृत्तस्य परिधिः $= \pi d$

अर्धवृत्तस्य परिधिः $= \frac{1}{2} \pi d$

$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 14$ सेण्टीमीटरपरिमिता

= द्वाविंशतिः (22) सेण्टीमीटरपरिमिता



आकृतिः 11.32

प्रत्येकम् अर्धवृत्तानां परिधिः द्वाविंशतिः (22) सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति। अतः आकृतेः परिमापः = 4 × 22 से.मी. = अष्टाशीतिः (88) सेण्टीमीटरपरिमितः अस्ति।

उदाहरणम्16 सुधांशुः सप्त सेण्टीमीटरपरिमितां त्रिज्यामतीम् एकां वृत्ताकारचषकाधानीम् (disc) समानयोः द्वयोः भागयोः विभजति । प्रत्येकम् अर्धवृत्ताकारचषकाधान्योः परिमापः ज्ञायताम्।
(प्रयोगं कुर्वन्तु $\pi = \frac{22}{7}$)

समाधानम् अर्धवृत्ताकारचषकाधान्योः परिमापं ज्ञातुम् (disc) अस्माकं कृते आवश्यकम् अस्ति (11.33 आकृतिः)

(i) अर्धवृत्ताकारस्य आकारस्य परिधिः (ii) व्यासः

प्रदत्तत्रिज्या (r) = 7 से.मी.

आकृतिः 11.33

वयं जानीमः यत् वृत्तस्य परिधिः $= 2\pi r$

अतः अर्धवृत्तस्य परिधिः $= \frac{1}{2} \times 2\ \pi r = \pi r$

$= \frac{22}{7} \times 7$ से.मी. = 22 से.मी.

अतः वृत्तस्य व्यासः = 2r = 2 × 7 से.मी.= 14 से.मी.

अतः प्रत्येकम् अर्धवृत्ताकारचषकाधान्योः परिमापः (disc) = 22 से.मी. + 14 से.मी.

= षट् (36) सेण्टीमीटरपरिमितः।

11.5.2 वृत्तस्य क्षेत्रफलम्

निम्नानि कथनानि विचारयन्तु -

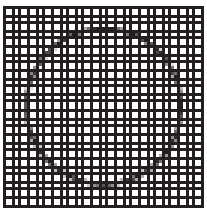
एकः कृषकः एकस्मिन् क्षेत्रे केदारे वा सप्तमीटरपरिमितां त्रिज्यामतीम् एकां राजिकां कर्षति । तस्य कृते पुरीषादिनः क्रयणम् आवश्यकम् अस्ति । यदि एकवर्गमीटरपरिमित-

क्षेत्रफलस्य कृते (1मी.^{2}) 1 किलोग्रामपरिमितं पुरीषादि आवश्यकं स्यात् तदा तेन कियत् किलोग्रामपरिमितं पुरीषादि क्रेतव्यम् ?

दशरूप्यकैः प्रति एकवर्गमीटरपरिमितेन अर्घेण एकस्याः वृत्ताकारोत्पीठिकायाः प्रमार्जव्ययः कियान् भविष्यति यस्याः त्रिज्या मीटरद्वयात्मिका अस्ति ?

किं भवन्तः सूचयितुं शक्नुवन्ति यत् एतासु परिस्थितिषु अस्माकं कृते किं ज्ञातुम् अपेक्षितं वर्तते, क्षेत्रफलम् अथवा परिमापः ? एतादृशीषु परिस्थितिषु अस्माभिः वृत्ताकारक्षेत्रस्य क्षेत्रफलं ज्ञातव्यम् । आयान्तु, वयम् बिन्दुरेखापत्रेण एकस्य वृत्तस्य क्षेत्रफलं जानीमः।

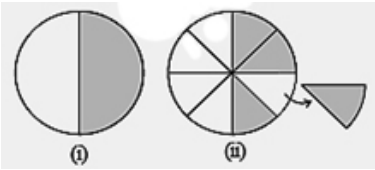
बिन्दुरेखापत्रे चतुःसेण्टीमीटरपरिमितं त्रिज्यामन्तं वृत्तं निर्मान्तु (11.34 आकृतिः)। वृत्तेन आवृत-वर्गान् गणयित्वा अस्य वृत्तस्य क्षेत्रफलं ज्ञायताम् ।



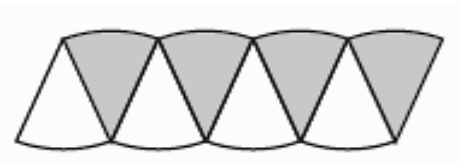
आकृतिः 11.34

यतोहि उपान्तभागाः ऋजवः सन्ति अतः वयम् अनेन विधिना वृत्त-क्षेत्रफलस्य एकं रूक्षानुमानम् (rough) एव प्राप्नुमः । केनचिद् अन्यविधना वृत्तस्य क्षेत्रफलं जानीमः। एकं वृत्तं रचयन्तु तस्य च अर्धभागं छायाङ्कितं कुर्वन्तु) [आकृतिः 11.35(i)]

अधुना वृत्तम् अष्टसु भागेषु वक्रीकुर्वन्तु प्रतिनिवर्तन्तु तान् च अष्टौ भागान् वक्रिततलानाम् अनुदिशं छिदन्तु (आकृतिः 11.35(ii))।

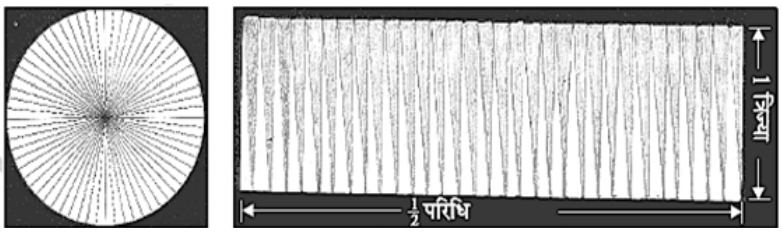


आकृतिः 11.35



आकृतिः 11.36

यथा 11.36 इति आकृतौ दर्शितं वर्तते तथा पृथग्खण्डान् व्यवस्थितं कुर्वन्तु यत् स्थूरूपेण (roughly) समान्तरचतुर्भुजं दर्शयति । यावन्तः त्रिज्याखण्डाः भविष्यन्ति तावत् उचितं समान्तरचतुर्भुजं प्राप्यते । यथा उपरि आचरितं तथा वयं वृत्तं चतुष्षष्ट्यां त्रिज्याखण्डेषु विभक्तीकुर्मः तान् च व्यवस्थीकुर्मः तदा वयं प्रायशः एकम् आयतं प्राप्नुमः (आकृतिः 11.37)।



आकृतिः 11.37

अस्य आयतस्य विस्तृतिः का आस्ति ? अस्य आयतस्य विस्तृतिः एव वृत्तस्य त्रिज्या अस्ति अर्थात् 'r' यथाहि निखिलं वृत्तं चतुष्षष्टि-त्रिज्याखण्डेषु (64) विभक्तं वर्तते तथा प्रतिदिशं द्वात्रिंशत् – त्रिज्याखण्डाः (32) सन्ति । आयतस्य दीर्घता द्वात्रिंशत्–त्रिज्याखण्डानां दीर्घतानां समाना वर्तते या वृत्तस्य परिधेः अर्धम् अस्ति । (आकृतिः 11.37) ।

वृत्तस्य क्षेत्रफलम् = निर्मितस्य आयतस्य क्षेत्रफलम् $= l \times b$

$= (\text{परिधेः अर्धम्}) \times \text{त्रिज्या} = \left(\frac{1}{2} \times 2\pi r\right) = \pi r^2$

अतः वृत्तस्य क्षेत्रफलम् $= \pi r^2$

उदाहरणम् 17 त्रिंशत्सेण्टीमीटरपरिमितस्य (30) त्रिज्यामतः वृत्तस्य क्षेत्रफलं ज्ञायताम्। ($\pi = 3.14$ इति स्वीकुर्वन्तु)

समाधानम् त्रिज्या r = 30 से.मी.

वृत्तस्य क्षेत्रफलं $= \pi r^2 = 3.14 \times 30^2 = 2826$ से.मी.^{2}

उदाहरणम् 18 एकस्य वृत्ताकारस्य उद्यानस्य व्यासः 9.8 मीटरपरिमितः विद्यते। अस्य क्षेत्रफलं ज्ञायताम्।

समाधानम् व्यासः = 9.8 मी. अतः त्रिज्या r = 9.8 ÷ 2 = 4.9 मी.

वृत्तस्य क्षेत्रफलम् $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 4.9$ मी.^{2} =

$\frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9$ मी.^{2} = 75.46 मी.^{2}

एतान् कुर्वन्तु

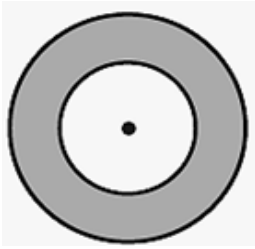
रेखाबिन्दुकर्गदे पृथक् त्रिज्यावन्ति वृत्तानि रचयन्तु । वर्गान् गणयित्वा क्षेत्रफलं ज्ञायताम् । सूत्रं प्रयुज्य अपि क्षेत्रफलं ज्ञायताम्। द्वयोः उत्तरयोः तुलनां कुर्वन्तु।

उदाहरणम् 19 संलग्नाकृतिः द्वे वृत्ते दर्शयति ययोः केन्द्रं समानम् अस्ति । बृहद्वृत्तस्य त्रिज्या दश सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति लघुवृत्तस्य त्रिज्या चतुःसेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति।

ज्ञायाताम् (a) बृहद्वृत्तस्य क्षेत्रफलम् (b) लघुवृत्तस्य क्षेत्रफलम्

(c) द्वयोः वृत्तयोः अन्तर्वर्तिनः छायाङ्कितभागस्य क्षेत्रफलम् ($\pi = 3.14$)

समाधानम्



(a) बृहद्वृत्तस्य त्रिज्या = 10 से.मी.

अतः बृहद्वृत्तस्य क्षेत्रफलम् $= \pi r^2$

$= 3.14 \times 10 \times 10 = 314$ से.मी.^{2}

(b) लघुवृत्तस्य त्रिज्या = 4 से.मी.

लघुवृत्तस्य क्षेत्रफलम् $= \pi r^2$

$= 3.14 \times 4 \times 4 = 50.24$ से.मी.^{2}

(c) छायाङ्कित-भागस्य क्षेत्रफलम् = (314 – 50.24) से.मी.^{2} = 263.76 से.मी.^{2}

प्रश्नावली 11.3

1. निम्न-त्रिज्यावतां वृत्तानां परिधिः ज्ञायताम्। ($\pi = \frac{22}{7}$ इति स्वीकुर्वन्तु)

   (a) 14 से.मी. (b) 28 मि.मी. (c) 21 से.मी.

2. निम्नवृत्तानां क्षेत्रफलं ज्ञायताम्। प्रदत्तम् अस्ति -

   (a) त्रिज्या = 14 मि.मी. ($\pi = \frac{22}{7}$ इति स्वीकुर्वन्तु) (b) व्यासः = 49 मीटरपरिमितः

   (c) त्रिज्या = 5 से.मी.

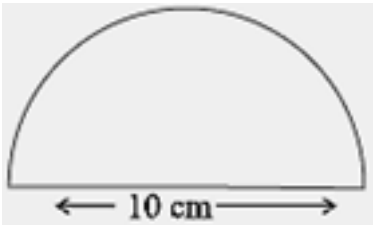
3. यदि एकस्य वृत्ताकार-कर्गदस्य परिधिः 154 मीटरपरिमिता भवेत् तदा अस्य त्रिज्या ज्ञायताम्।

   वृत्ताकार-कर्गदस्य क्षेत्रफलम् अपि ज्ञातं कुर्वन्तु। ($\pi = \frac{22}{7}$ इति स्वीकुर्वन्तु)

4. उद्यानपालकः एकविंशतिमीटरपरिमित-व्यासमत् वृत्ताकारोद्यानं परितः अजिरं नियोक्तुम् इच्छति।

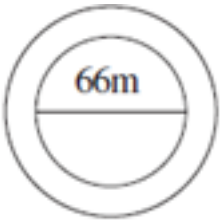
अपेक्षितस्य रज्ज्वोः दैर्घ्यं ज्ञायताम्, यदि सः द्व्यावृत्त्यात्मकम् अजिरं नियोक्तुम् इच्छति। रज्ज्वोः व्ययः चतुर्रूप्यकैः प्रति मीटरपरिमितेन अर्घेण ज्ञायताम्। ($\pi = \frac{22}{7}$ इति स्वीकुर्वन्तु)

5. यदि चतुर्सेण्टीमीटरपरिमितात् एकस्मात् वृत्ताकारकर्गदात् त्रिसेण्टीमीटरपरिमितं त्रिज्यामत् वृत्तं (3) निष्काश्यते तदा कर्गदस्य अवशिष्टभागस्य क्षेत्रफलं ज्ञायताम्। ($\pi = 3.14$ इति स्वीकुर्वन्तु)
6. साइमा 1.5 मीटरपरिमित-व्यासमत् एकं वृत्ताकारोत्पीठं परितः जालाभरणं योजयितुम् इच्छति। अपेक्षितस्य जालाभरणस्य अपेक्षितं दैर्घ्यं ज्ञायतां तथा च पञ्चदशरूप्यकैः प्रति मीटरपरिमितम् अर्घेण जालाभरण-व्ययः ज्ञायातम्। ($\pi = 3.14$ इति स्वीकुर्वन्तु)
7. प्रदत्ताकृतिः सव्यासम् अर्धवृत्तम् अस्ति। तस्याः परिमापः ज्ञायताम्।
8. 1.6 मीटरव्यासमत्याः कस्याश्चिद् वृत्ताकारोत्पीठिकायाः पञ्चदशरूप्यकैः (15) प्रति वर्गमीटरपरिमितम् अर्घेण प्रमार्जनव्ययः ज्ञायताम्। ($\pi = 3.14$ इति स्वीकुर्वन्तु)

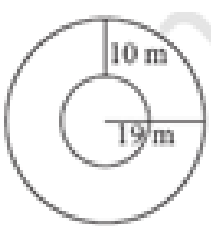


9. शाझली चतुश्चतुत्वारिंशत् (44) सेण्टीमीटरपरिमिताम् एकां तन्त्री गृह्णाति तां च एकस्मिन् वृत्ताकारे वक्रीकरोति। तद्वृत्तस्य त्रिज्यां ज्ञातं कुर्वन्तु। अस्य क्षेत्रफलमपि ज्ञायताम्। यदि एतां तन्त्रीं पुनः एकस्मिन् वर्गे वक्रीकुर्मः तर्हि अस्य प्रत्येकं भुजायाः दैर्घ्यं कियत् भविष्यति ? कतमा आकृतिः अधिकं क्षेत्रं परिवेष्टति वर्गः अथवा वृत्तम् ? ($\pi = \frac{22}{7}$ इति स्वीकुर्वन्तु)
10. चतुर्दश (14) सेण्टीमीटरपरिमित-त्रिज्यायुतात् वृत्ताकार-स्थूलकर्गदात् 3.5 सेण्टीमीटरपरिमिते त्रिज्यायुते द्वे वृत्ते तथा च त्रि (3) सेण्टीमीटरपरिमित-लम्बमानयुतः अथ च एकः (1) सेण्टीमीटरपरिमित-विस्तृतियुतः एकः आयतः निष्काश्यते (यथा आकृत्यां दर्शितम् अस्ति) स्थूलकर्गदस्य अवशिष्टभागस्य क्षेत्रफलं जानन्तु। ($\pi = \frac{22}{7}$ इति स्वीकुर्वन्तु)

11. षट् सेण्टीमीटरपरिमित-भुजामतः एल्युमिनियमफलकस्य खण्डात् द्वि-सेण्टीमीटरपरिमितं त्रिज्यायुतम् एकं वृत्तं निष्कास्यते। फलकस्य शेषभागस्य क्षेत्रफलं जानन्तु। ($\pi = 3.14$ इति स्वीकुर्वन्तु)
12. एकस्य वृत्तस्य परिधिः 31.4 सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति। वृत्तस्य त्रिज्यां क्षेत्रफलं च जानन्तु ($\pi = 3.14$ इति स्वीकुर्वन्तु)
13. एकां पुष्पराजिकां परितः चतुर्मीटरपरिमितः विस्तृतियुतः मार्गः अस्ति। पुष्पराजिकायाः व्यासः षड्षष्टिः मीटरपरिमितः अस्ति। अस्य मार्गस्य क्षेत्रफलं ज्ञायताम् ? ($\pi = 3.14$ इति स्वीकुर्वन्तु)



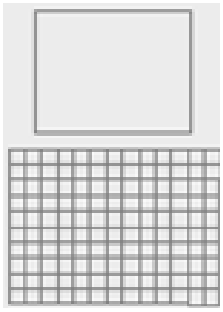
14. एकस्य वृत्ताकारस्य पुष्पोद्यानस्य क्षेत्रफलम् 314 मी.^{2} इति वर्तते। उद्यानकेन्द्रे भ्रम्यमाणा सेचनी (सेक्तृ) योज्यते या स्वां परितः द्वादश मीटरपरिमितं त्रिज्यायुतं क्षेत्रफलं सिञ्चति। किं सेचनी निखिले उद्याने अवसेकम् (सेचनम्) कर्तुं शक्नोति ? ($\pi = 3.14$ इति स्वीकुर्वन्तु)
15. आकृतौ अन्तः-बाह्यवृत्तयोः परिधिं जानन्तु। ($\pi = 3.14$ इति स्वीकुर्वन्तु)



16. 28 अष्टाविंशतिः मीटरपरिमितं त्रिज्यायुतं चक्रम् 352 मीटरपर्यन्तं दूरं गन्तुं कति वारं परिभ्राम्यते? ($\pi = \frac{22}{7}$ इति स्वीकुर्वन्तु)
17. एकस्याः घटिकायाः निमेषसूचिकायाः दीर्घता पञ्चदश सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति। निमेषसूचिकाग्रम् एकस्यां होरायां कियत् दूरं याति ? ($\pi = 3.14$ इति स्वीकुर्वन्तु)

11.6 एककानां रूपान्तरणम्

वयं जानीमः यत् ''1 से.मी.= 10 मि.मी.'' इति भवति। किं भवन्तः बोधयितुं शक्नुवन्ति यत् '1 से.मी.^{2}' इत्यत्र कति मी.मी.^{2} इति भवन्ति ? आगच्छन्तु वयम् एतादृशानां प्रश्नानाम् एव अन्वेषणं कुर्मः क्षेत्रफलानां च मापनं कुर्वन्तः एतेषाम् एककानि (घटकानि) कथं रूपान्तरितानि क्रियन्ते। बिन्दुरेखाकर्गदे एकसेण्टीमीटरपरिमित-भुजायुतम् एकं वर्गं रचयन्तु (आकृतिः 11.38)।



आकृतिः 11.38

भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् एकसेण्टीमीटरपरिमितः अयं वर्गः शतवर्गेषु विभक्तीकर्तुं शक्यते प्रत्येकं च वर्गस्य भुजा एकमीलिमीटरपरिमिता अस्ति।

एकसेण्टीमीटरपरिमितस्य भुजामतः वर्गस्य क्षेत्रफलम् = (100) शतवर्गाणां क्षेत्रफलं, यस्य प्रत्येकं भुजा 1 मी.मी. अस्ति।

अतः $1 \text{ से.मी.}^2 = 100 \times 1 \text{ मी.मी.}^2$ अथवा $1 \text{ से.मी.}^2 = 100 \text{ मी.मी.}^2$

अनेन प्रकारेण $1 \text{ मी.}^2 = 1 \text{ मी.} \times 1 \text{ मी.} = 100 \text{ से.मी.} \times 100 \text{ से.मी.}$ (1मी. = 100 से.मी.)

किम् अधुना भवन्तः 'एकवर्गकिलोमीटर' इत्येतम् 'वर्गमीटर' इत्यसमिन् रूपे परिवर्तितुं शक्नुवन्ति ?

'मिट्रिक' इति प्रणाल्यां भूखण्ड-क्षेत्रफलम् 'हेक्टेयर' इत्यनेन रूपेण माप्यते [यत् सङ्क्षेपेण 'ha' इति लिख्यते]

अनेन प्रकारेण $1 \text{ हेक्टेयर} = 100 \times 100 \text{ मी.}^2 = 10{,}000 \text{ मी.}^2$

यदा वयं क्षेत्रफलस्य एकम् एककम् एकस्मिन् लघुनि एकके परिवर्तयामः तदा परिणामस्वरूपेण एककानां सङ्ख्या अधिका भविष्यति।

उदाहरणार्थम् $1000 \text{ से.मी.}^2 = 1000 \times 100 \text{ मी.मी.}^2 = 100000 \text{ मी.मी.}^2$

किन्तु यदा वयं क्षेत्रफलस्य एकं एककं एकस्मिन् गुरूणि एकके परिवर्तयामः तदा गुरूणाम् एककानां सङ्ख्या न्यूना भविष्यति।

उदाहरणार्थम् $1000 \text{ से.मी.}^2 = \frac{1000}{10000} \text{ मी.}^2 = 0.1 \text{ मी.}^2$

एतान् कुर्वन्तु

निम्नानि परिवर्तयन्तु :

(i) 50 से.मी.^{2} इत्येतं मी.मी.^{2} इत्यस्मिन् रूपे

(ii) 2 ha इत्येतं मी.^{2} इत्यस्मिन् रूपे

(iii) 10 मी.^{2} इत्येतं से.मी.^{2} इत्यस्मिन् रूपे

(iv) 1000 से.मी.^{2} इत्येतं मी.मी.^{2}

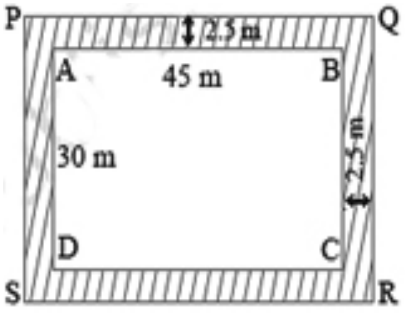
11.7 उपयोगः

भवद्भिः अवधानं दत्तं स्यात् यत् बहुधा वाटिकाः उद्यानानि च परितः तयोर्मध्ये वा चतुष्पथमिव किञ्चित् स्थानं मार्गरूपेण त्यज्यते। कस्मिंश्चित् काष्ठालवितं चित्रं परितः किञ्चत् स्थानं त्यज्यते।

यदा अस्माकं कृते एतादृशानां मार्गाणां सीमन्तानां (बार्डर) वा क्षेत्रफलानि ज्ञातुम् अपेक्षितानि भवन्ति तदा वयं तेषां निर्माणव्ययं ज्ञातुम् इच्छामः।

उदाहरणम् 20 एकम् आयाताकारम् उद्यानं पञ्चचत्वारिंशत् मीटरपरिमितं दीर्घं त्रिंशत् च मीटरपरिमितं विस्तृतिम् अस्ति। उद्यानं परितः एकः 2.5 मीटरपरिमितः विस्तृतः मार्गः निर्मितः वर्तते। मार्गस्य क्षेत्रफलं जानीत।

समाधानम् मन्यन्ताम् ABCD इति आयताकारम् उद्यानं तथा च 2.5 मीटरपरिमितं विस्तृतिमन्तं मार्गं छायाङ्कित-क्षेत्रं दर्शयति। मार्गः क्षेत्रफलं ज्ञातुं वयं (PQRS इति आयतस्य क्षेत्रफलम् - ABCD इति आयतस्य क्षेत्रफलम्)



अस्माकं पार्श्वे अस्ति PQ = (45 + 2.5 + 2.5) मी. = 50 मी.

PS = (30 + 2.5 + 2.5) मी. = 35 मी.

ABCD इति आयतस्य क्षेत्रफलम् $= l \times b = 45 \times 30$ मी.$^2 = 1350$ मी.^{2}

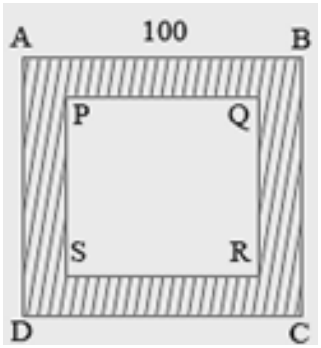
PQRS इति आयतस्य क्षेत्रफलम् $= l \times b = 50 \times 35$ मी.$^2 = 1750$ मी.^{2}

मार्गस्य क्षेत्रफलम् = PQRS इति आयतस्य क्षेत्रफलम् - ABCD इति आयतस्य क्षेत्रफलम्

$= (1750 - 1350)$ मी.$^2 = 400$ मी.^{2}

उदाहरणम् 21 100 मीटरपरिमितस्य भुजमतः एकस्य वर्गाकारोद्यानस्य सीमया सह अन्तर्वर्ती पञ्चमीटरपरिमितः विस्तृतिः मार्गः निर्मितः अस्ति। अस्य मार्गस्य क्षेत्रफलं ज्ञायताम्। पञ्चाशदधिकद्विशत-रूप्यकैः प्रतिदशवर्गमीटरमानेन मार्गे वज्रचूर्णनियोजनव्ययम् जानीत।

समाधानम् मन्यन्ताम् ABCD इति शतमीटरपरिमितं भुजामत् वर्गाकारोद्यानम् अस्ति। छायाङ्कितभागः पञ्चमीटरपरिमितं विस्तृतिमन्तं मार्गं दर्शयति



PQ $= 100 - (5 + 5) = 90$ मी.

ABCD इति वर्गस्य क्षेत्रफलम् $= (\text{भुजा})^2 = (100)^2$ मी.$^2 = 10{,}000$ मी.^{2}

PQRS इति वर्गस्य क्षेत्रफलम् $= (\text{भुजा})^2 = (90)^2$ मी.$^2 = 8100$ मी.^{2}

अतः मार्गस्य क्षेत्रफलम् $= (10000 - 8100)$ मी.$^2 = 1900$ मी.^{2}

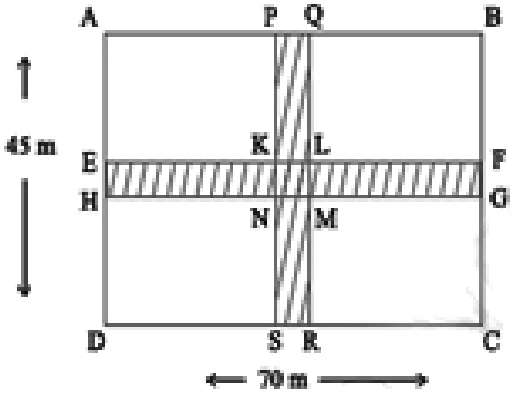
10 मी^{2} इत्यमिन् भागे वज्रचूर्णलेपनस्य व्ययः = 250 रू.

अतः 1मी.^{2} इत्यमिन् भागे वज्रचूर्णलेपनस्य व्ययः $= \frac{250}{10}$ रू.

अतः 1900 मी.^{2} इत्यमिन् भागे वज्रचूर्णलेपनस्य व्ययः $= \frac{250}{10} \times 1900 = 47500$ रूप्यकाणि

उदाहरणम् 22 सप्ततिः मीटरपरिमित-लम्बमानस्य पञ्चचत्वारिंशत्परिमितस्य च विस्तृतिमतः कस्यचित् आयताकारोद्यानात् मध्यतः पञ्चमीटरपरिमितौ द्वौ मार्गौ अन्योऽस्मिन् तथा लम्बौ स्तः यत् भुजानां समान्तरौ स्तः। मार्गयोः क्षेत्रफलं जानीत तथा च पञ्चाधिकैकशतरूप्यकैः प्रतिवर्गमीटरमानेन मार्गयोः निर्माणव्ययम् अपि जानीत।

समाधानम् मार्गयोः क्षेत्रफलं छायाङ्कितभागस्य क्षेत्रफलम् एव अस्ति अर्थात् PQRS इति आयतस्य क्षेत्रफलं तथा च EFGH इति आयतस्य क्षेत्रफलम्। परञ्च एवं कृते सति KLMN इति वर्गस्य क्षेत्रफलं वारद्वयं गृह्यते यस्य व्यवकलनम् अपेक्षितं वर्तते। अधुना



PQ = 5 मी. एवञ्च PS = 45 मी.

EH = 5 मी. एवञ्च EF = 70 मी.

KL = 5 मी. एवञ्च KN = 5 मी.

मार्गयोः क्षेत्रफलम्

= PQRS इति आयतस्य क्षेत्रफलम् + EFGH इति आयतस्य क्षेत्रफलम् – KLMN इति आयतस्य क्षेत्रफलम्

$= PS \times PQ + EF \times EH - KL \times KN$

$= (45 \times 5 + 70 \times 5 - 5 \times 5)$ मी.^{2}

$= (225 + 350 - 25)$ मी.$^2 = 550$ मी.^{2}

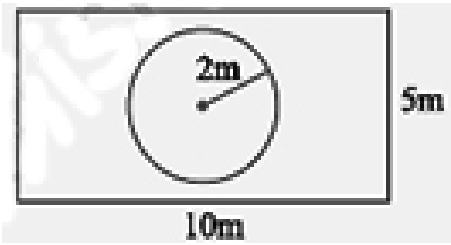
मार्गाणां निर्माणव्ययः $= 105 \times 550 = 5775$ रूप्यकाणि

प्रश्नावली 11.4

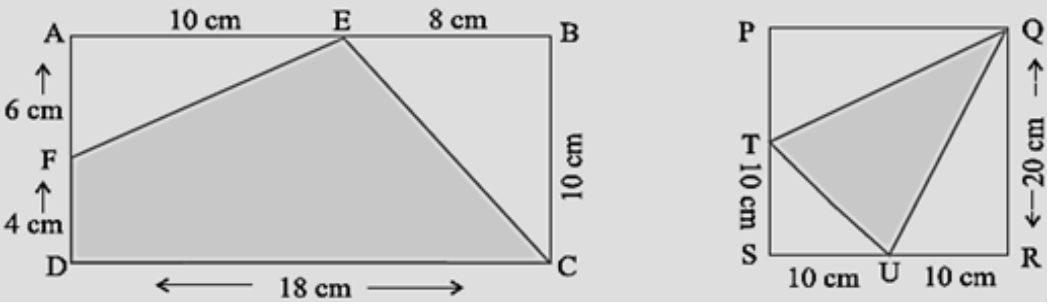
1. कश्चित् उद्यानं नवतिः मीटरपरिमतं दीर्घं तथा च पञ्चसप्ततिः मीटरपरिमितं विस्तृतम् अस्ति । एतं परितः एकः पञ्चमीटरपरिमितः विस्तृतः मार्गः निर्मातव्यः । मार्गस्य क्षेत्रफलं जानीत । उद्यानस्य क्षेत्रफलमपि हेक्टेयरमानेन ज्ञातं कुर्वन्तु ।
2. पञ्चविंशत्युत्तरैकशतं मीटरपरिमितं लम्बमानं तथा च पञ्चषष्टिः मीटरपरिमितं विस्तृतियुतं कञ्चित् आयताकारोद्यानं परितः बहिः एकः मीटरत्रयपरिमित-विस्तृतः मार्गः अस्ति। मार्गस्य क्षेत्रफलं जानीत।
3. अष्टसेण्टीमीटरपरिमिते दीर्घतायुते पञ्च सेण्टीमीटरपरिमिते च विस्तृतियुते एकस्मिन् स्थूलकर्गदे एकं चित्रं तथा निर्मितं वर्तते यत् अस्य एकैकानां भुजानाम् अनुदिशम् 1.5 सेण्टीमीटरपरिमितः विस्तृतियुतः उपान्तः (margin) त्यक्तः अस्ति । उपान्तस्य क्षेत्रफलं जानीत।
4. 5.5 इति मीटरपरिमितं लम्बमन्तं तथा च चतुर्मीटरपरिमितं विस्तृतिमन्तं प्रकोष्ठं परितः बहिः 2.25 इति मीटरपरिमितं विस्तृतिमत् प्राङ्गणम् अस्ति । ज्ञायताम् :
   (i) प्राङ्गणस्य क्षेत्रफलं
   (ii) द्विशतरूप्यकैः प्रति वर्गमीटरमानेन प्राङ्गणस्य कुट्टिमे वज्रचूर्णालेपनस्य व्ययः।
5. त्रिंशत्मीटरपरिमतं भुजामतः वर्गाकारोद्यानस्य सीमायाः अन्तःबद्धः एकमीटरपरिमितः विस्तृत-मार्गः अस्ति । ज्ञायताम् -
   (i) मार्गस्य क्षेत्रफलम् ।
   (ii) चत्वारिंशत् रूप्यकैः प्रति वर्गमीटरमानेन शेषभागे तृणवपनस्य (घासवपनस्य) व्ययः।
6. सप्तशतमीटरपरिमितस्य लम्बायमानस्य तथा च त्रिशतमीटतपरिमितस्य विस्तृतियुतस्य आयाताकारोद्यानस्य मध्यतः (मध्यं) भूत्वा दश मीटरपरिमितौ विस्तृतियतौ द्वौ पथौ यौ परस्परं लम्बौ चतुष्पटाकारौ (समकोणेन विभक्तौ) च स्तः। एतयोः प्रत्येकं मार्गस्य क्षेत्रफलं जानीत अथ च उद्यानस्य भुजाः विहाय उद्यानस्य शेषभागस्य क्षेत्रफलम् अपि ज्ञातं कुर्वन्तु । उत्तरं हेक्टेयरमानेन यच्छन्तु ।
7. नवतिः मीटरपरिमिते लम्बमाने तथा च षष्टिः मीटरपरिमिते विस्तृते आयताकार-क्षेत्रे द्वौ मार्गौ निर्मितौ स्तः। यौ भुजानां समान्तरौ, अन्योऽन्यं लम्बवत् छिन्तः तथा च क्षेत्रं मध्यं भूत्वा निर्गच्छतः। यदि प्रत्येकं पथस्य विस्तृतिः त्रिमीटरपरिमिता स्यात् तदा ज्ञायताम् :

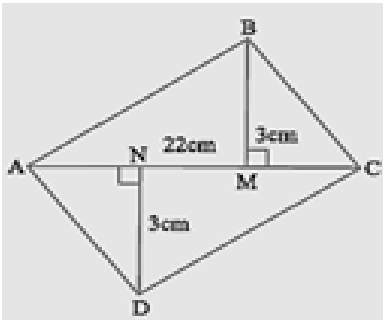
   (i) पथैः आच्छादितं क्षेत्रफलम् ।
   (ii) दशाधिकैकशतरूप्यकैः प्रति वर्गमीटरमानेन पथनिर्माण-व्ययः ।
8. प्रज्ञा चतुःसेण्टीमीटरपरिमितं त्रिज्यामत् वृत्ताकारनलिकां परितः एकां रज्जुं सम्वेष्टयति (यथा दर्शितं वर्तते) तथा च रज्ज्वोः आवश्यकं दैर्घ्यं छिनत्ति । तत्पश्चात् सा तां चतुर्मीटरपरिमितम् कञ्चन वर्गाकार-सम्पुटं परितः संवेष्टयति (दर्शितं वर्तते) किं तस्याः पार्श्वे इतोऽपि रज्जुः अवशिष्टा भविष्यति ? ($\pi = 3.14$)

9. संलग्नाकृतिः कस्यचित् आयाताकारोद्यानस्य मध्ये एकां वृत्ताकारराजिकां दर्शयति । जानन्तु -
   (i) समग्रस्य उद्यानस्य क्षेत्रफलम् ।
   (ii) पुष्पराजिकायाः क्षेत्रफलम् ।
   (iii) पुष्पराजिकां विहाय उद्यानस्य शेषभागस्य क्षेत्रफलम् ।
   (iv) पुष्पराजिकायाः परिधिः ।



10 दत्ताकृतौ छायाङ्कितभागस्य क्षेत्रफलं ज्ञायताम् -





11 ABCD इति चतुर्भुजस्य क्षेत्रफलं जानीत। यत्र AC = 22 से.मी., BM = 3 से.मी., DN = 3 से.मी. तथा च BM ⊥ AC, DN ⊥ AC इति।

अस्माभिः का चर्चा कृता ?

1. परिमापः काञ्चित् पिहताकृतिं परितः दैर्घ्यम् अस्ति यद्यपि क्षेत्रफलं कयाचित् पिहिताकृतिना आवेष्टितं तलभागं क्षेत्रं वा दर्शयति।
2. वयं गतकक्ष्यायां ज्ञातवन्तः यत् कस्यचित् वर्गस्य एवञ्च आयतस्य परिमापः अथवा क्षेत्रफलं कथं निष्काश्यते -
   (a) कस्यचिद् वर्गस्य परिमापः = 4 × भुजा
   (b) कस्यचिद् आयतस्य परिमापः = 2 × (दीर्घता + विस्तृतिः)
   (c) कस्यचिद् वर्गस्य क्षेत्रफलम् = भुजा × भुजा
   (d) कस्यचिद् आयतस्य क्षेत्रफलम् = दीर्घता × विस्तृतिः
3. कस्यचित् समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् = आधारः × औन्नत्यम्
4. कस्यचित् त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् = $\frac{1}{2}$ (अस्मात् सम्प्राप्तं समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम्)
   = $\frac{1}{2}$ × आधारः × औन्नत्यम्
5. एकं वृत्ताकारं क्षेत्रं परितः दूरत्वम् अस्य परिधिः इति कथ्यते। कस्यचित् वृत्तस्य परिधिः = πd इति भवति यत्र d इति वृत्तस्य व्यासः तथा च $\pi = \frac{22}{7}$ इति अथवा (प्रायेण) 3.14 एतावद् भवति।
6. कस्यचित् वृत्तस्य क्षेत्रफलम् = πr^2 यत्र r इति वृत्तस्य त्रिज्या अस्ति।
7. यथा भवन्तः जानन्ति यत् येन प्रकारेण वयं दैर्घ्याणि एककेषु रूपान्तरितं कुर्मः तेन एव प्रकारेण क्षेत्रफलानाम् एककानां रूपान्तरणं कर्तुं शक्यते।
   1 से.मी.^{2} = 100 मि.मी.^{2}, 1 मी.^{2} = 10000 से.मी.^{2}, 1 हेक्टेयर= 10000 मी.^{2}

बीजीयः व्यञ्जकः

अध्यायः 12

12.1 भूमिका

वयम् x+ 3, y– 5, 4x + 5,10y – 5 इत्यादीभिः सरल-बीजीय-व्यञ्जकैः सह परिचिताः स्मः । वयं षष्ठ्यां कक्ष्यायाम् अध्ययनं कृतवन्तः स्मः यत् इमे व्यञ्जकाः कथं प्रहेलिकानाम् अथवा समस्यानाम् एकेन सुव्यवस्थितेन प्रकारेण प्रस्तुतीकरणे साहाय्यं कुर्वन्ति । अस्माभिः सरल-समीकरणम् इत्यस्मिन् अध्याये अपि व्यञ्जकैः सम्बद्धानि अनेकानि उदाहरणानि दृष्टानि ।

बीजगणिते व्यञ्जकाः (expressions) एका केन्द्रीया अवधारणा इति मन्यन्ते । एषः अध्यायः बीजीय-व्यञ्जकैः सम्बन्धितः अस्ति । यदा भवन्तः अस्य अध्यायस्य अध्ययनं कृतवन्तः भविष्यन्ति तदा ज्ञास्यन्ति यत् केन प्रकारेण बीजीय-व्यञ्जकानां निर्माणं भवति कथं च तेषां संयोजनं क्रियते, एतेषां मानानि कथं ज्ञातुं शक्नुमः अथ च केन प्रकारेण एतेषाम् उपयोगः कर्तुं शक्यते ।

12.2 व्यञ्जकाः कथं निर्मीयन्ते ?

सम्प्रति वयं सम्यक् प्रकारेण जानीमः यत् कश्चन चरः (variable) किं भवति ? वयं चरान् व्यक्तीकर्तुम् x, y, l, m, ... इत्यादीनाम् अक्षराणां प्रयोगं कुर्मः । कस्यचित् चरस्य विभिन्नानि मानानि भवितुम् अर्हन्ति । अस्य मानम् निश्चितं भवति । अपरतः अचरस्य (constant) एकं निश्चितं मानं भवति । 4, 100, –17 इत्यादीनि अचराणाम् उदाहरणानि सन्ति ।

वयं चरान् अचरान् च (चराचरान्) संयोज्य बीजीय-व्यञ्जकानां निर्माणं कुर्मः । एतदर्थं वयं योगः, व्यवकलं, गुणनं विभाजनं च इति सङ्क्रियाणां प्रयोगं कुर्मः । वयम् 4x + 5, 10y – 20 सदृशान् व्यवञ्जकान् पूर्वमेव दृष्टवन्तः स्मः । 4x + 5 इति व्यञ्जकः x इत्यस्य चरस्य प्रयोगेण निर्मितः अस्ति । अस्मिन् प्रथमम् x इति चरम् 4 इति अचरेण गुणयित्वा तत्पश्चाद् अस्मिन् गुणनफले पञ्च (5) इति अचरं योजयित्वा प्राप्यते । अनेन एव प्रकारेण 10y – 20 इति व्यञ्जकः प्रथमम् y इति चरं 10 इति अचरेण गुणयित्वा पुनश्च गुणनफलात् विंशतिम् (20) व्याकल्य प्राप्यते ।

उपर्युक्ताः व्यञ्जकाः चरान् अचरान् च संयोज्य प्राप्ताः । वयं व्यञ्जकान् चरान् च तैः एव चरैः अथवा अन्यचरैः संयोज्य अपि प्राप्तुम् शक्नुमः।

पश्यन्तु यत् निम्नलिखिताः व्यञ्जकाः केन प्रकारेण प्राप्यन्ते ?

$x^2, 2y^2, 3x^2 – 5, xy, 4xy + 7$

(i) x^2 इति व्यञ्जकः x इत्येतं चरम् x इत्यनेन एव चरेण गुणीकृत्य प्राप्यते ।

अर्थात् $x \times x = x^2$ इति अस्ति ।

येन प्रकारेण $4 \times 4 = 4^2$ इति लिख्यते तेन एव प्रकारेण वयम् $x \times x = x^2$ इति लिखामः। 'x' इति समान्यतः 'x इत्यस्य वर्ग' इति रूपेण पठ्यते।

(यदा भवन्तः 'घाताङ्कः घातः च' इति अध्याये अध्ययनं करिष्यन्ति तदा भवन्तः अनुभविष्यन्ति यत् x^2 इति x इत्यस्य उपरि घातद्वयम् इति रूपेण अपि पठितुं शक्यते।) अनेन प्रकारेण वयम् $x \times x \times x = x^3$ इति लेखितुं शक्नुमः।

सामान्यतः x^3 इति x इत्यस्य घनः ('x cubed') इति अपि पठितुं शक्यते। अन्तरं भवन्तः एतद् अनुभविष्यन्ति यत् x^3 इति x इत्यस्य उपरि घनत्रयम् इति अपि पठितुं शक्यते।

$x, x^2, x^3, \ldots$ इत्यादिषु प्रत्येकम् x इत्यस्माद् प्राप्तः एकः बीजीयः व्यञ्जकः अस्ति।

(ii) $2y^2$ इति व्यञ्जकःy इत्यस्माद् व्यञ्जकात् $2y^2 = 2 \times y \times y$ इत्यनेन प्रकारेण प्राप्तुं शक्यते।
अत्र वयम् y इति व्यञ्जकं y इति व्यञ्जकेन गुणीकृत्य y^2 इति व्यञ्जकं प्राप्नुमः तत्पश्चात् एतत् y^2 गुणनफलम् 2 इत्यनेन गुणयामः।

(iii) $(3x^2 - 5)$ इत्यत्र वयं प्रथमं x^2 इति प्राप्नुमः पुनश्च तत् 3 इत्यनेन गुणीकृत्य $3x^2$ इति प्राप्नुमः। अन्ते $3x^2 - 5$ इति प्राप्तुं वयम् $3x^2$ इत्यस्मात् पञ्च व्यवकलयामः।

एतान् कुर्वन्तु

ज्ञापयन्तु यत् निम्नलिखित-व्यञ्जकानां प्राप्तिः कथं भवति :

$7xy+5, x^2 y, 4x^2-5x$

(iv) xy, इत्यत्र वयम् x इति चरं केनचिद् अन्येन y इति चरेण गुणयामः। अनेन प्रकारेण $x \times y = xy$ इति जायते।

(v) $4xy + 7$ इत्यत्र सर्वप्रथमं वयम् xy इति प्राप्नुमः तत्पश्चात् तत् 4 द्वारा गुणीकृत्य 4xy इति प्राप्नुमः तदन्तरं दत्तं व्यञ्जकं प्राप्तुम् 7 इति अचरम् 4xy इति चरेण सह योजयामः।

12.3 कस्यचित् व्यञ्जकस्य पदानि

अधुना पर्यन्तम् अस्माभिः पठितं यत् व्यञ्जकाः कथं निर्मीयन्ते। अधुना वयं तत् सुव्यवस्थितरूपेण स्थापयिष्यामः। एतत् कार्यं कर्तुम् अस्माकं कृते एतद् अपेक्षितं वर्तते यत् कस्यचिद् व्यञ्जकस्य पदानि (terms) तथा च तेषां गुणनखण्डाः (factors) के भवन्ति अर्थात् तेषाम् अर्थाः के सन्ति ?

$(4x + 5)$ इति व्यञ्जकस्य विषये विचारयन्तु। अस्य व्यञ्जकस्य निर्माणाय सर्वप्रथमं वयं 4तथा च x इत्येतौ पृथक्तया गुणीकृत्य 4x इति निर्मीतवन्तः तदन्तरम् अस्मिन् 5 इति योजितवन्तः आस्म। अनेन प्रकारेण $(3x^2 + 7y)$ इति व्यञ्जकं विचारयन्तु। अत्र वयं सर्वप्रथमं पृथक्तया 3, x तथा च x इत्येतानि गुणीकृत्य $3x^2$ इति निर्मीतवन्तः। पुनः वयं पृथक्तया 7 तथा च y इत्येतौ गुणीकृत्य 7y इति निर्मितवन्तः आस्म। $3x^2$ तथा च 7y इत्येतयोः निर्माणान्तरं वयं प्रदत्त-व्यञ्जकस्य प्राप्त्यर्थम् एते योजितवन्तः।

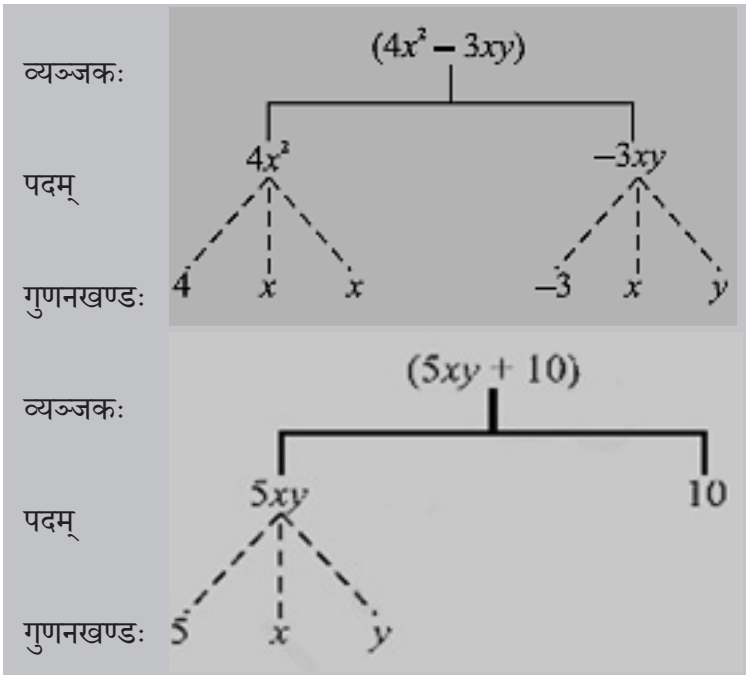
भवन्तः प्राप्स्यन्ति यत् वयं यावतः अपि व्यञ्जकान् आधारीकृत्य कार्यं कुर्मः ते सर्वे अपि अस्मिन् रूपे द्रष्टुं शक्यन्ते। एतेषां भागाः भवन्ति ये पृथक्तया निर्मीयन्ते पुनश्च योज्यन्ते। व्यञ्जकानाम् एतादृशाः भागाः ये पूर्वं पृथक्तया निर्मीयन्ते पुनश्च योज्यन्ते कस्यचित् व्यञ्जकस्य पदस्य नाम्ना ज्ञायन्ते। $(4x^2 - 3xy)$ इति व्यञ्जकं पश्यन्तु। वयं वदामः यत् अस्य द्वे पदे $4x^2$ तथा च $-3xy$ इति स्तः। $4x^2$ इति पदम् 4, x तथा च x इत्येतेषां गुणनफलम् अस्ति अथ च $-3xy$ इति पदं -3, x तथा च y इत्येतेषां गुणनफलम् अस्ति। व्यञ्जक-निर्माणाय पदानि योज्यन्ते। येन प्रकारेण $(4x + 5)$ इति व्यञ्जकं निर्मातुं 4x तथा च 5 इति पदद्वयं योज्यते तेन एव प्रकारेण $(4x^2 - 3xy)$ इति व्यञ्जकं निर्मातुं $4x^2$ तथा च $(-3xy)$ इति पदद्वयं योज्यते। अस्य कारणम् $4x^2 + (-3xy) = 4x^2 - 3xy$ इति भवति।

अवधानं यच्छन्तु यत् पदे ऋणचिह्नम् (–) सम्मिलितं भवति। $4x^2–3xy$ इत्यस्मिन् व्यञ्जके अस्माभिः $3xy$ पदं न स्वीकृत्य $(–3xy)$ इति स्वीकृतम् आसीत्। अतः अस्य कथनस्य आवश्यकता एव नास्ति यत् कमपि व्यञ्जकं निर्मातुं पदानि समाकल्यन्ते व्यवकल्यन्ते वा। एतदर्थम् एतत् कथनम् एव पर्याप्तम् अस्ति यत् पदानां योजनं क्रियते।

कस्यचित् पदस्य गुणनखण्डाः

अस्माभिः उपरि दृष्टम् आसीत् यत् $(4x^2– 3xy)$ इति व्यञ्जकस्य $4x^2$ एवञ्च $–3xy$ इति द्वे पदे स्तः। $4x^2$ इति पदं 4, x तथा च x इत्येतेषां गुणनफलम् अस्ति।वयं वदामः यत् 4, x तथा च x इति पदानि $4x^2$ इत्यस्य (factors) गुणनखण्डाः सन्ति। एकपदं स्वगुणनखण्डानाम् एकं गुणनफलं भवति। $3xy$ इति पदम् –3, x तथा च y इत्येतेषाम् एकं गुणनफलम् अस्ति।

वयं कस्यचित् व्यञ्जकस्य पदानि पदानां च गुणनखण्डान् एकेन सरलाकर्षकेण प्रकारेण व्यञ्जक-वृक्षारेखद्वारा (tree diagram) निरूपयितुं शक्नुमः। $(4x^2–3xy)$इत्यस्य व्यञ्जकस्य वृक्षारेखः संलग्नाकृतौ प्रदर्शितः वर्तते।



अवधानं यच्छन्तु यत् वृक्षारेखे वयं गुणनखण्डानां कृते बिन्दुकित-रेखाणां प्रयोगं कृतवन्तः तथा च पदानां कृते सतत-रेखाणां प्रयोगं कृतवन्तः। एतेषां मिश्रणं न भवेत् इति एतदर्थम् एतत् कृतम्।

आयान्तु $5xy + 10$ इति व्यञ्जकस्य वृक्षारेखम् आलिखाम। एतादृशान् गुणनखण्डान् लिखन्तु येषाम् अग्रे गुणनखण्डाः न भवितुं शक्नुयुः। अनेन प्रकारेण वयम् $5xy$ इत्येतम् $5 \times xy$ इत्यनेन रूपेण नैव लिखामः यतोहि xy इत्यस्य इतोऽपि अपि गुणनखण्डाः भवितुं शक्नुवन्ति। अनेन एव प्रकारेण यदि x^3 इति एकं पदम् अस्ति तदा एतत् $x \times x^2$ इति न लिखित्वा $x \times x \times x$ इति लिखन्तु। सहैव एतद् अपि स्मरणं भवेत् यत् एकं (1) पृथक्तया गुणनखण्डरूपेण नैव स्वीक्रियते।

एतान् कुर्वन्तु

1. निम्नलिखितेषु व्यञ्जकेषु कतमानि पदानि सन्ति ? दर्शयन्तु यत् ते व्यञ्जकाः कथं निर्मीयन्ते। प्रत्येकं व्यञ्जकस्य एकं वृक्षारेखमपि आलिखन्तु।

$8y + 3x^2$, $7mn – 4$, $2x^2 y$

2. एतादृशान् त्रीन् व्यञ्जकान् लिखन्तु येषु प्रत्येकस्मिन् चत्वारि पदानि स्युः।

गुणाङ्कः

अस्माभिः कस्यचित् पदस्य लेखनं तदीय-गुणनखण्डानां गुणनफलरूपेण अधिगतम्। एषु कश्चन गुणनखण्डः सङ्ख्यात्मकः (numerical) भवितुं शक्नोति तथा च अन्ये बीजीय-गुणनखण्डाः (algebra_ic) भवितुं शक्नुवन्ति (अर्थात् एतेषु चराः भवन्ति)। अयं सङ्ख्यात्मक-गुणनखण्डः पदस्य सङ्ख्यात्मक-

गुणाङ्कः अथवा केवलमात्रं गुणाङ्कः इति कथ्यते। अयं शेषपदस्य (यः स्पष्टरूपेण बीजीय-गुणनखण्डानां गुणनफलम् अस्ति) गुणाङ्कः अपि कथ्यते। अनेन प्रकारेण 5 xy इत्यस्मिन् पदे xy इत्यस्य गुणाङ्कः 5 इति अस्ति। अनेन एव प्रकारेण 10xyz इत्यस्मिन् पदे xyz इत्यस्य गुणाङ्कः 10 इति अस्ति तथा च $-7x^2 y^2$ इत्यस्मिन् पदे $x^2 y^2$ इत्येतयोः गुणाङ्कः -7 इति अस्ति।

यदा कस्यचित् पदस्य गुणाङ्कः +1 इति भवति तदा प्रायशः लेखनसमये सः त्यज्यते। उदारणार्थम् 1x इति x इति रूपेण लिख्यते एवञ्च 1 $x^2 y^2$ इति $x^2 y^2$ इति रूपेण लिख्यते । सार्धमेव (–1) इति गुणाङ्कः केवलम् ऋणचिह्नेन (–) प्रदर्श्यते। अनेन प्रकारेण (–1) x इत्येतत् – x इति रूपेण लिख्यते, $(-1)x^2 y^2$ इत्येतत् $x^2 y^2$ इति रूपेण लिख्यते।

कदाचित् गुणाङ्क-शब्दस्य प्रयोगः व्यापकरूपेण क्रियते। अस्मिन् रूपे वयं कथयामः यत् 5xy इत्यस्मिन् पदे xy इत्येतयोः गुणाङ्कः 5 इति अस्ति, 5y इत्यस्य x इति गुणाङ्कः अस्ति एवञ्च5x इत्यस्य गुणाङ्कः y इति अस्ति 10 xy^2 इत्यस्मिन् xy^2 इत्यस्य गुणाङ्कः 10 इति अस्ति, $10y^2$ इत्यस्य गुणाङ्कः x इति अस्ति10x इत्यस्य गुणाङ्कः y^2 इति अस्ति। अनेन प्रकारेण अस्माद् अधिकेन व्यापकरूपेण गुणाङ्कः कश्चन सङ्ख्यात्मक-गुणनखण्डः भवितुं शक्नोति अथवा कश्चन बीजीय-गुणनखण्डः भवितुम् अर्हति अथवा द्वयोः तथा च ततः अधिकानां गुणनखण्डानां गुणनफलम् अपि भवितुम् अर्हति । अयं शेष-गुणनखण्डानां गुणनफलस्य गुणाङ्कः इति कथ्यते।

एतान् कुर्वन्तु

निम्नलिखितव्यञ्जक-पदानां गुणाङ्कान् परिचिनुत

4x - 3y, a + b + 5,

2y + 5, 2xy

उदाहरणम् 1 निम्नलिखित-व्यञ्जकेषु तेषां पदानां चयनं कुर्वन्तु यानि अचराणि न सन्ति । तेषां सङ्ख्यात्मक-गुणनाङ्कान् अपि लिखन्तु -

$xy + 4$, $13 – y^2$, $13 – y + 5y^2$, $4p^2q – 3pq^2 + 5$

समाधानम्

क्रमसङ्ख्या	व्यञ्जकाः	पदानि (यानि अचराणि न सन्ति)	सङ्ख्यात्मक-गुणनाङ्काः
(i)	$xy + 4$	xy	1
(ii)	$13 – y^2$	$– y^2$	–1
(iii)	$13 – y + 5y^2$	$–y$ $5y^2$	–1 5
(iv)	$4p^2q – 3pq^2 + 5$	$4p^2q$ $– 3pq^2$	4 –3

उदाहरणम् 2

(a) निम्नलिखित-व्यञ्जकेषु x इत्यस्य गुणाङ्काः के सन्ति ?

$4x– 3y$, $8 – x + y$, $y^2x – y$, $2z – 5xz$

(b) निम्नलिखितेषु व्यञ्जकेषु y इत्यस्य गुणाङ्काः के सन्ति ?

$4x – 3y$, $8 + yz$, $yz^2 + 5$, $my + m$

समाधानम्

प्रत्येकस्मिन् व्यञ्जके वयम् x इति गुणनखण्डयुतं पदं पश्यामः। तस्य पदस्य शेषभागः x इत्यस्य वाञ्छित-गुणाङ्कः भविष्यति।

क्रमसङ्ख्या	व्यञ्जकः	x इति गुणनखण्डयुतं पदम्	x इत्यस्य गुणाङ्कः
(i)	$4x - 3y$	$4x$	4
(ii)	$8 - x + y$	$-x$	-1
(iii)	$y^2x - y$	y^2x	y^2
(iv)	$2z - 5xz$	$-5xz$	$-5z$

(b) अस्य विधिः उपर्युक्तस्य (a) इत्यस्य विधिः इव एव अस्ति।

क्रमसङ्ख्या	व्यञ्जकः	Y इति गुणनखण्डयुतं पदम्	y इत्यस्य गुणाङ्कः
(i)	$4x - 3y$	$-3y$	-3
(ii)	$8 + yz$	yz	z
(iii)	$yz^2 + 5$	yz^2	z^2
(iv)	$my + m$	my	m

12.4 समानं तथा च असमानम्

यदा पदानां बीजीय-गुणनखण्डाः एकसमानाः स्युः तदा तानि पदानि समानपदानि (like terms) इति कथ्यन्ते।

यदा पदानां बीजीय-गुणनखण्डाः भिन्नाः स्युः तदा तानि पदानि असमान-पदानि (unlike terms) इति कथ्यन्ते। उदाहरणार्थम् $2xy - 3x + 5xy - 4$ इत्यस्मिन् व्यञ्जके $2xy$ तथा च $5xy$ इति पदे पश्यत। $2xy$-इत्यस्य 2, x तथा च y इति गुणनखण्डाः सन्ति। $5xy$ इत्यस्य $5x$ तथा च y इति गुणनखण्डाः सन्ति। अनेन प्रकारेण एतेषां बीजीय-गुणनखण्डाः (अर्थात् ते येषु चराः सन्ति) एकाः एव सन्ति अतः इमानि समानपदानि सन्ति। एतद्-विपरीतं $2xy$ तथा च $-3x$ इत्येतयोः पदयोः भिन्नाः बीजीय-गुणनखण्डाः सन्ति। एते असमानपदे स्तः। अनेन प्रकारेण $2xy$ तथाच 4 इति असमानपदे स्तः। सार्धमेव $-3x$ तथा च 4 इति अपि असमानपदे स्तः।

एतान् कुर्वन्तु

निम्नलिखितेषु समानपदानां समूहान् कुर्वन्तु -

$12x, 12, -25x, -25,$

$-25y, 1, x, 12y, y$

12.5 एकपदी, द्विपदं, त्रिपदं बहुपदं च

सः बीजीय-व्ञ्जकः यस्मिन् केवलम् एकमेव पदं भवेत् **एकपदी** (monomial) इति कथ्यते यथा $7xy$, $-5m$, $3z^2$, 4 इत्यादि।

सः व्यञ्जकः यस्मिन् केवलं द्वे पदे स्याताम् तथा च ते असमानपदे भवेतां सः व्यञ्जकः द्विपदी (bi_nomial) इति कथ्यते। उदाहरणार्थम् $x + y$, $m - 5$,$mn + 4m$,$a^2 - b^2$ इति द्विपद-व्यञ्जकाः सन्ति। $10pq$ इति व्यञ्जकः एकः द्विपदव्यञ्जकः नास्ति। अयम् एकपदी अस्ति। $(a + b + 5)$ इति व्यञ्जकः एकः द्विपदव्यञ्जकः नास्ति। अस्मिन् त्रीणि पदानि सन्ति। सः व्यञ्जकः यस्मिन् त्रीणि पदानि स्युः सः त्रिपदी (trinomial) इति उच्यते। उदाहरणार्थम् $x + y + 7$, $ab + a + b$,$3x^2 - 5x + 2$, $m + n + 10$ इति त्रिपद-व्यञ्जकाः सन्ति। किन्तु $ab + a + b + 5$ इति व्यञ्जकः त्रिपदी नास्ति यतः अस्मिन्

एतान् कुर्वन्तु

निम्नलिखित-व्यञ्जकानां एकपदी,द्विपदी तथा च बहुपदी इत्यादिषु रूपेषु वर्गीकरणं कुर्वन्तु -
a,a + b,ab + a + b,ab + a + b – 5,
xy,xy + 5, 5x2 – x + 2, 4pq – 3q + 5p,
7, 4m – 7n + 10, 4mn + 7.

त्रीणि न अपितु चत्वारि पदानि सन्ति। x + y + 5x इति व्यञ्जकः कश्चन त्रिपदी नास्ति यतोहि x तथा च 5x इति पदे समानपदे स्तः। व्यापकरूपेण एकैकाधिक-पदैः युतः व्यञ्जकः बहुपदी व्यञ्जकः (polynomial) इति कथ्यते। अनेन प्रकारेण एकपदी,द्विपदी तथा च त्रिपदी व्यञ्जकः अपि बहुपदी-व्यञ्जकः अस्ति।

उदाहरणम् 3 सकारणं ज्ञापयन्तु यत् पदानां निम्नलिखित-युग्मेषु कतमाः युग्माः समानपदानां तथा च कतमाः युग्माः असमानपदानां सन्ति -

(i) 7x, 12y (ii) 15x, –21x (iii) – 4ab, 7ba (iv) 3xy, 3x

(v) $6xy2, 9x^2y$ (vi) pq2, – 4pq2 (vii) mn^2, 10mn

समाधानम्

क्रम सङ्ख्या	युग्माः	गुणनखण्डाः	बीजीय-गुणनखण्डाः समानाः सन्ति अथवा भिन्नाः सन्ति	समानम्/ असमानपदम्	टिप्पणी
(i)	7x 12y	7,x 12,y	भिन्नः	असमानम्	पदेषु चरः भिन्नः अस्ति
(ii)	15x –21x	15 x, –21,x	समानः	समानम्	
(iii)	– 4ab 7 ba	– 4,a,b 7,a,b	समानः	समानम्	स्मरणं रक्षन्तु ab = ba
(iv)	3xy 3x	3,x,y 3,x	भिन्नः	असमानम्	Y इति चरं केवलमात्रं प्रथमे पदे अस्ति।
(v)	$6xy^2$ $9x^2y$	6,x,y,y 9,x,x,y	भिन्नः	असमानम्	द्वयोः पदयोःचरः तु एकः एव परन्तु एतयोः घातौ भिन्नौ स्तः
(vi)	pq^2 $– 4pq^2$	1,p,q,q - 4,p,q,q	समानः	समानम्	अवधानं यच्छन्तु 1 इति संख्यात्मकः गुणाङ्कः न दर्श्यते

निम्नलिखितैः सरलचरणैः एतं निर्णयं स्वीकर्तुं भवतां साहाय्यं भविष्यति यत् प्रदत्तानि पदानि समानानि सन्ति अथवा असमानानि सन्ति -

(i) सङ्ख्यात्मक-गुणाङ्कान् विहाय केवलं पदानां बीजीयभागं प्रति एव स्वीयम् अवधानं कुर्वन्तु।

(ii) पदेषु चराणाम् अवेक्षणं कुर्वन्तु। तेषु समानता भवेत्।

(iii) सम्प्रति पदेषु प्रत्येकं चरस्य घातानाम् अवेक्षणं कुर्वन्तु। एते घाताः समानाः एव स्युः। अवधानं यच्छन्तु यत् समानपदानां निर्णय-स्वीकरण-सन्दर्भे एतयोः द्वयोः तथ्ययोः कश्चन अपि प्रभावः न जायते : (1) पदानां सङ्ख्यात्मकाः गुणाङ्काः तथा च (2) पदेषु चर-गुणनस्य क्रमः।

प्रश्नावली 12.1

1. निम्नलिखित-स्थितिषु चराणाम् अचराणाम् अथ च अङ्क-गणितीय-सङ्क्रियाणां प्रयोगं कृत्वा बीजीय-व्यञ्जकान् प्राप्नुवन्तु -
   (i) z इति सङ्ख्यातः y इति सङ्ख्यायाः व्यवकलनम्।
   (ii) x तथा च y इति सङ्ख्ययोः योगस्य अर्धम्।
   (iii) z इति सङ्ख्या आत्मना एव गुण्यते।
   (iv) p तथा च q इति सङ्ख्ययोः गुणनफलस्य चतुर्थांशः।
   (v) x तथा च y इति सङ्ख्ययोः वर्गाणां योजनं क्रियते।
   (vi) m तथा च n इति सङ्ख्ययोः गुणनफलस्य त्रिगुणिते 5 इति सङ्ख्यायाः योजनम्।
   (vii) 10 इति संख्यातः y तथा च z इति सङ्ख्ययोः गुणनफलस्य व्यवकलनम्।
   (viii) a तथा च b इति सङ्ख्ययोः गुणनफलात् तयोः योगस्य व्यवकलनम्।
2. (i) निम्नलिखित-व्यञ्जकेषु पदानि तेषां च गुणनखण्डान् परिचिन्वन्तु। पदानि तथा तेषां च गुणनखण्डान् वृक्षारेखरूपेण अपि दर्शयन्तु।
   (a) $x-3$ (b) $1+x+x^2$ (c) $y-y^3$
   (d) $5xy^2+7x^2y$ (e) $-ab+2b^2-3a^2$
   (ii) अधोदत्तेषु व्यञ्जकेषु पदानि तेषां च गुणनखण्डान् परिचिन्वन्तु
   (a) $-4x+5$ (b) $-4x+5y$ (c) $5y+3y^2$
   (d) $xy+2x^2y^2$ (e) $pq+q$ (f) $1.2\,ab-2.4\,b+3.6\,a$
   (g) $\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$ (h) $0.1\,p^2+0.2\,q^2$
3. निम्नलिखित-व्यञ्जकेषु पदानां सङ्खात्मक-गुणाङ्कान् (ये अचराः न स्युः) परिचिन्वन्तु।
   (i) $5-3t^2$ (ii) $1+t+t^2+t^3$ (iii) $x+2xy+3y$
   (iv) $100m+1000n$ (v) $-p^2q^2+7pq$ (vi) $1.2\,a+0.8\,b$
   (vii) $3.14\,r^2$ (viii) $2(l+b)$ (ix) $0.1\,y+0.01\,y^2$
4. (a) येषु पदेषु x इति अस्ति तानि पदानि परिचिन्वन्तु पुनश्च x इत्यस्य गुणाङ्कं लिखन्तु।
   (i) y^2x+y (ii) $13y^2-8yx$ (iii) $x+y+2$
   (iv) $5+z+zx$ (v) $1+x+xy$ (vi) $12xy^2+25$
   (vii) $7+xy^2$
   (b) तानि पदानि परिचिन्वन्तु येषु y^2 इति अस्ति तदन्तरम् एषु y^2 इत्यस्य गुणाङ्कं लिखन्तु।
   (i) $8-xy^2$ (ii) $5y^2+7x$ (iii) $2x^2y-15xy^2+7y^2$
5. निम्नलिखित-व्यञ्जकानि एकपद-द्विपद-त्रिपदरूपेण वर्गीकुर्वन्तु -
   (i) $4y-7z$ (ii) y^2 (iii) $x+y-xy$ (iv) 100
   (v) $ab-a-b$ (vi) $5-3t$ (vii) $4p^2q-4pq^2$
   (viii) $7mn$ (ix) z^2-3z+8 (x) a^2+b^2
   (xi) z^2+z (xii) $1+x+x^2$

6. ज्ञापयन्तु यत् प्रदत्त-पदानां युग्माः समानपदानि सन्ति अथवा असमानपदानि सन्ति -

(i) 1, 100 (ii) $-7x, \frac{5}{2}x$ (iii) $-29x, -29y$

(iv) $14xy, 42yx$ (v) $4m^2p, 4mp^2$ (vi) $12xz, 12x^2z^2$

7. निम्नलिखितेषु समानपदानि परिचिन्वन्तु -

(a) $-xy^2, -4yx^2, 8x^2, 2xy^2, 7y, -11x^2, -100x, -11yx, 20x^2y, -6x^2, y, 2xy, 3x$

(b) $10pq, 7p, 8q, -p^2q^2, -7qp, -100q, -23, 12q^2p^2, -5p^2, 41, 2405p, 78qp, 13p^2q, qp^2, 701p^2$

12.6 बीजीय-व्यञ्जकानां योगः तथा च व्यवकलनम्

निम्नलिखित-समस्यानां विषये विचारं कुर्वन्तु -

1. सरितायाः पार्श्वे काश्चन काचगुलिकाः सन्ति। अमीनायाः पार्श्वे सरितातः दशाधिकाः काचगुलिकाः सन्ति। विनोदः कथयति यत् तस्य पार्श्वे अमीनासरितयोः पार्श्वे यावत्यः काचगुलिकाः सन्ति ततः त्र्यधिकाः काचगुलिकाः सन्ति। भवन्तः विनोदस्य काचगुलिकानां सङ्ख्यां कथं ज्ञास्यन्ति ?

यतो हि एतत् दत्तं नास्ति यत् सरितायाः पार्श्वे कति काचगुलिकाः सन्ति अतः वयम् इमाः x इति मन्यामहे। अमीनायाः पार्श्वे आभ्यः दशाधिकाः अर्थात् $x + 10$ एतावत्यः काचगुलिकाः सन्ति। विनोदः वदति यत् तस्य पार्श्वे अमीनासरितयोः पार्श्वे अखिलाः यावत्यः काचगुलिकाः सन्ति ततः त्र्यधिकाः काचगुलिकाः सन्ति।

अतः वयम् अमीनासरितयोः काचगुलिकानां योगं ज्ञात्वा तस्मिन् च योगे 3 इति योजयामः अर्थात् वयम् $x, x + 10$ तथा च 3 इति योजयामः।

2. रामस्य पितुः वर्तमानम् आयुः रामस्य आयुषः त्रिगुणितम् अस्ति। रामस्य पितामहस्य आयुः रामस्य तथा च रामस्य पितुः आयुषः योगात् त्रयोदश-वर्षाधिकम् अस्ति। भवन्तः रामस्य पितामहस्य आयुः कथं ज्ञास्यन्ति ?

यतो हि रामस्य आयुः दत्तं नास्ति अतः एतत् y वर्षं मन्यामहे। तदानीं तस्य पितुः आयुः $3y$ वर्षात्मकम् अस्ति। रामस्य पितामहस्य आयुषः परिज्ञानाय वयं रामस्य आयुषः y इत्यस्य तस्य च पितुः आयुषः $3y$ इत्यस्य योगं ज्ञात्वा अस्मिन् योगे 13 इति योजनीयं भविष्यति। अर्थात् $y, 3y$ तथा च 13 इत्येतेषां योगः अस्माभिः ज्ञातव्यः भविष्यति।

3. कस्मिंश्चिद् उद्याने पाटलस्य एवं च गन्धपुष्पस्य पादपानि वर्गाकार-राजिकासु उप्यन्ते। यस्यां वर्गाकार-राजिकायां गन्धपुष्पाणां पादपानि उप्यन्ते तस्याः भुजायाः दैर्घ्यं तस्याः वर्गाकार-राजिकायाः भुजायाः दैर्घ्यात् त्रिमीटराधिकम् अस्ति यस्यां पाटल-पादपानि उपितानि सन्ति। गन्धपुष्पाणां राजिका पाटलपुष्पाणां राजिकातः क्षेत्रफल-दृष्ट्या कियती दीर्घा अस्ति ?

आगच्छन्तु पाटलपुष्प-राजिकायाः भुजाम् 1 मीटरमितां मन्यामहे। तदा गन्धपुष्प-राजिकायाः भुजा $(1 + 3)$ मीटरमिता भविष्यति। पाटलपुष्प-राजिकायाः क्षेत्रफम् 1^2 मितं तथा च गन्धपुष्प-राजिकायाः क्षेत्रफलम् $(1 + 3)^2$ मितं भविष्यति। अनयोः अन्तरम् एव एतत् ज्ञापयिष्यति यत् गन्धपुष्प-राजिका पाटलपुष्प-राजिकातः क्षेत्रफलदृष्ट्या कियती दीर्घा अस्ति।

उपर्युक्त-स्थितित्रये अस्माभिः बीजीय-व्यञ्जकानां योजनम् अथवा व्यवकलनं कृतम्। दैनिक-जीवने एतादृश्यः अनेकाः स्थितयः अस्माकं सम्मुखे (पुरतः) आयान्ति यत्र अस्माभिः बीजीय-व्यञ्जकानां प्रयोगः करणीयः भवति तथा च तेषु अङ्क-गणितीय-सङ्क्रियाः करणीयाः भवन्ति। अस्मिन् अनुच्छेदे वयं द्रक्ष्यामः यत् बीजीय-व्यञ्जकाः कथं योज्यन्ते व्यवकल्यन्ते च।

एतान् कुर्वन्तु

न्यूनातिन्यूनम् एतादृश्योः द्वयोः स्थित्योः विषये विचारं कुर्वन्तु ययोः प्रत्येकस्यां भवतां कृते द्वयोः बीजीय-व्यञ्जकयोः निर्माणस्य आवश्यकता भवेत् तथा च तयोः योजनं व्यवकलनं वा आवश्यकं स्यात्।

समान पदानां योजनं व्यवकलनं च

सरलतमाः व्यञ्जकाः एकपदिनः भवन्ति । एषु केवलम् एकमेव पदं भवति । प्रारम्भं कर्तुं वयम् एतत् अधिगमिष्यामः यत् समानपदानि कथं योज्यन्ते व्यवकल्यन्ते च ।

- आगच्छन्तु 3x तथा च 4x इति योजयामः। वयं जानीमः यत् x इति कापि सङ्ख्या अस्ति अतः 3x तथा च 4x इति अपि सङ्ख्ये स्तः।
- अधुना $3x + 4x = (3 \times x) + (4 \times x)$

  $= (3 + 4) \times x$ (वितरणस्य अथवा विभजनस्य गुण-प्रयोगेण)

  $= 7 \times x = 7x$

  अथवा $3x + 4x = 7x$

यतोहि चराः सङ्ख्याः एव सन्ति अतः वयं वितरणगुणस्य प्रयोगं कर्तुं शक्नुमः।

आयान्तु अधुना अग्रे 8xy, 4xy तथा च 2xy इति योजयामः।

$8xy + 4xy + 2xy = (8 \times xy) + (4 \times xy) + (2 \times xy)$

$= (8 + 4 + 2) \times xy$

$= 14 \times xy = 14xy$

अथवा $8xy + 4xy + 2xy = 14\ xy$

अधुना 7n इत्यस्मात् 4n इत्येतत् व्यवकलयामः ।

$7n - 4n = (7 \times n) - (4 \times n)$

$= (7 - 4) \times n = 3 \times n = 3n$

अथवा $7n - 4n = 3n$

अनेन एव प्रकारेण 11ab इत्यस्मात् 5ab इत्येतत् व्यवकलयामः ।

$11ab - 5ab = (11 - 5)\ ab = 6ab$

अनेन प्रकारेण द्वयोः अथवा द्व्यधिकानां समानपदनां योगः समानपदं भवति यस्य सङ्ख्यात्मकः गुणाङ्कः सर्वेषां समानपदानां गुणाङ्कानां योगेन समानः भवति ।

अनेन प्रकारेण द्वयोः समानपदयोः अन्तरम् एकं समानपदं भवति यस्य सङ्ख्यात्मकः गुणाङ्कः द्वयोः समानपदयोः सङ्ख्यात्मक-गुणाङ्कानाम् अन्तरस्य समानः भवति ।

अवधानं कुर्वन्तु यत् असमान-पदानि तथा न योजयितुम् अथवा व्यवकलयितुं शक्यन्ते यथा समानपदानि योजयितुम् अथवा व्यवकलयितुं शक्यन्ते । अस्य उदाहरणानि वयं पूर्वमेव दृष्टवन्तः । यदा वयम् x मध्ये 5 इति योजयामः तदा वयं परिणामम् (x + 5) इत्यस्मिन् रूपे लिखामः । अवधानं कुर्वन्तु यत् (x + 5) इत्यस्मिन् 5 तथा च x इति उभे पदे पूर्ववत् एव स्तः । अनेन एव प्रकारेण यदि वयम् 3xy तथा च 7 इत्येते असमानपदे योजयामः तदा 3xy + 7 इति योगः अस्ति ।

यदि 3xy इत्यस्मात् 7 इति व्यवकलयामः तदा 3xy – 7 इति परिणामः अस्ति ।

व्यापक-बीजीय-व्यञ्जकानां समाकलनं व्यवकलनं च

आयान्तु कानिचित् उदाहरणानि स्वीकुर्मः

- 3x + 11 तथा च 7x – 5 इति योजयन्तु ।

  वाञ्छितः योगः = 3x + 11 + 7x – 5

अधुना वयं जानीमः यत् 3x तथा च 7x इति समानपदे स्तः तथा च 11 एवञ्च – 5 इत्यपि समानपदे स्तः । सहैव 3x + 7x = 10 x तथा च 11 + (– 5) = 6 इति स्तः। अतः वयम् उपर्युक्तं योगं निम्नानुसारं सरलीकर्तुं शक्नुमः।

योगः $= 3x + 11 + 7x – 5$

$= 3x + 7x + 11 – 5$ (पदानां पुनर्व्यवस्थापने कृते)

$= 10x + 6$

अतः $3x + 11 + 7x – 5 = 10x + 6$

- $3x + 11 + 8z$ तथा च $7x – 5$ इति योजयन्तु ।

योगः $= 3x + 11 + 8z + 7x – 5$

$= 3x + 7x + 11 – 5 + 8z$ (पदानां पुनर्व्यवस्थापने कृते)

अवधानं कुर्वन्तु यत् अस्माभिः समानपदानि सार्धमेव स्थापितानि तथा च 8z इति एकाकि असमानपदं तथैव तिष्ठति ।

अतः योगः $= 10x + 6 + 8z$

- $3a – b + 4$ इत्यस्मात् $a – b$ इति व्यवकलयन्तु ।

अन्तरम् $= 3a – b + 4 – (a – b)$

$= 3a – b + 4 – a + b$

अवधानं कुर्वन्तु

यथा –(5-3) = -5 +3 इति अस्ति तथा एव –(a-b)= -a + b इति अस्ति । बीजीयचिह्नैः तथैव कार्यं क्रियते यथा सङ्ख्याचिह्नैः क्रियते ।

अवधानं कुर्वन्तु यत् केन प्रकारेण अस्माभिः $(a – b)$ इति कोष्ठके स्थापितं तथा च कथं कोष्ठकानाम् उद्घाटनसमये चिह्नानाम् अवधानं कृतम् अस्ति । समानपदानि सहैव स्थापयितुं पदानां पुनर्व्यवस्थापने कृते सति

अन्तरम् $= 3a – a + b – b + 4$

$= (3 – 1)\, a + (1 – 1)\, b + 4$

अन्तरम् $= 2a + (0)\, b + 4 = 2a + 4$

अथवा $3a – b + 4 – (a – b) = 2a + 4$

अधुना वयम् अभ्यासाय व्यञ्जकानां योग-व्यवकलन-सम्बन्धीनि कानिचित् उदाहरणानि सात्स्यामः।

उदाहरणम् 4 समानपदानि एकत्रीकृत्य

$12m^2 – 9m + 5m – 4m^2 – 7m + 10$ इति व्यञ्जकं सरलं कुर्वन्तु -

समाधानम् पदानां पुनर्व्यवस्थापने कृते सति अस्माभिः प्राप्यते :

$12m^2 – 4m^2 + 5m – 9m – 7m + 10$

$= (12 – 4)\, m^2 + (5 – 9 – 7)\, m + 10$

$= 8m^2 + (– 4 – 7)\, m + 10$

$= 8m^2 + (–11)\, m + 10$

$= 8m^2 – 11m + 10$

प्रयासं कुर्वन्तु

योजयन्तु व्यवकलयन्तु च

(i) m – n, m + n

(ii) mn+ 5 – 2, mn+ 3

उदाहरणम् 5 $24ab – 10b – 18a$ इत्यस्मात् $30ab + 12b + 14a$ इति व्यवकलयन्तु

समाधानम् $30ab + 12b + 14a – (24ab – 10b – 18a)$

$= 30ab + 12b + 14a – 24ab + 10b + 18a$

$= 30ab – 24ab + 12b + 10b + 14a + 18a$

$= 6ab + 22b + 32a$

वैकल्पिकरूपेण वयं व्यञ्जकान् अन्योऽन्यम् अधोऽधः कृत्वा अनेन प्रकारेण स्थापयामः यत् समानपदानि एकस्याम् एव पङ्क्तौ अर्थात् स्तम्भेषु एव तिष्ठेयुः यथा अधः निर्दर्शितम् अस्ति :

$$\begin{array}{r} 30ab + 12b + 14a \\ 24ab - 10b - 18a \\ \hline 6ab + 22b + 32a \end{array}$$

अवधानं कुर्वन्तु यत् कस्यचित् पदस्य व्यवकलनस्य अर्थः तस्य 'योज्य-प्रतिलोमस्य योजनम्' इति भवति। अतः –10b इत्यस्य व्यवकलनस्य अर्थः अस्ति यत् +10b इत्यस्य योजनम्। –18a इत्यस्य व्यवकलस्य अर्थः अस्ति यत् +18a इत्यस्य योजनं तथा च 24ab इत्यस्य व्यवकलस्य अर्थः अस्ति यत् – 24ab इत्यस्य योजनम् । व्यवकल्यमानस्य व्यञ्जकस्य अधः प्रदर्शितानि चिह्नानि व्यवकलनप्रक्रियाम् उचितरूपेण सम्पादयितुं सहायकाः भवन्ति।

उदाहरणम् 6 $2y^2 + 3yz, - y^2 - yz - z^2$ तथा च $yz + 2z^2$, इत्यनयोः योगात् $3y^2 - z^2$ एवञ्च $-y^2 + yz + z^2$ इत्यनयोः योगं व्यवकलयन्तु

समाधानम् सर्वप्रथमम् $2y^2 + 3yz, - y^2 - yz - z^2$ तथा च $yz + 2z^2$ इति योजयामः।

$$\begin{array}{r} 2y^2 + 3yz \\ -y^2 - yz - z^2 \\ + yz + 2z^2 \\ \hline y^2 + 3yz + z^2 \end{array} \qquad (1)$$

पुनः वयम् $3y^2 - z^2$ एवञ्च $-y^2 + yz + z^2$ इत्येतौ व्यञ्जकौ योजयामः

$$\begin{array}{r} 3y^2 \quad - z^2 \\ -y^2 + yz + z^2 \\ \hline 2y^2 + yz \end{array} \qquad (2)$$

अधुना वयम् (1) इत्स्मात् योगात् (2) इत्येतं योगं व्यवकलयामः।

$$\begin{array}{r} y^2 + 3yz + z^2 \\ 2y^2 + yz \\ - \quad - \\ \hline -y^2 + 2yz + z^2 \end{array}$$

प्रश्नावली 12.2

1. समानपदानि संयोज्य सरलीकुर्वन्तु -
   (i) $21b - 32 + 7b - 20b$
   (ii) $-z^2 + 13z^2 - 5z + 7z^3 - 15z$
   (iii) $p - (p - q) - q - (q - p)$
   (iv) $3a - 2b - ab - (a - b + ab) + 3ab + b - a$
   (v) $5x^2y - 5x^2 + 3yx^2 - 3y^2 + x^2 - y^2 + 8xy^2 - 3y^2$
   (vi) $(3y^2 + 5y - 4) - (8y - y^2 - 4)$

2. योजनं कुरूत -

(i) $3mn, -5mn, 8mn, -4mn$

(ii) $t - 8tz, 3tz - z, z - t$

(iii) $-7mn + 5, 12mn + 2, 9mn - 8, -2mn - 3$

(iv) $a + b - 3, b - a + 3, a - b + 3$

(v) $14x + 10y - 12xy - 13, 18 - 7x - 10y + 8xy, 4xy$

(vi) $5m - 7n, 3n - 4m + 2, 2m - 3mn - 5$

(vii) $4x^2y, -3xy^2, -5xy^2, 5x^2y$

(viii) $3p^2q^2 - 4pq + 5, -10p^2q^2, 15 + 9pq + 7p^2q^2$

(ix) $ab - 4a, 4b - ab, 4a - 4b$

(x) $x^2 - y^2 - 1, y^2 - 1 - x^2, 1 - x^2 - y^2$

3. व्यवकलयन्तु -

(i) y^2 इत्यस्मात्–$5y^2$ इति

(ii) $-12xy$ इत्यस्मात् $6xy$ इति

(iii) $(a + b)$ इत्यस्मात् $(a - b)$ इति

(iv) $b(5 - a)$ इत्यस्मात् $a(b - 5)$ इति

(v) $4m^2 - 3mn + 8$ इत्यस्मात्–$m^2 + 5mn$ इति

(vi) $5x - 10$ इत्यस्मात्– $x^2 + 10x - 5$ इति

(vii) $3ab - 2a^2 - 2b^2$ इत्यस्मात् $5a^2 - 7ab + 5b^2$ इति

(viii) $5p^2 + 3q^2 - pq$ इत्यस्मात् $4pq - 5q^2 - 3p^2$ इति

4. (a) $2x^2 + 3xy$ इति प्राप्तुम्, $x^2 + xy + y^2$ इत्यत्र किं योजनीयम् ?

(b) $-3a + 7b + 16$ इति प्राप्तुम् $2a + 8b + 10$ इत्यस्मात् किं व्यवकलनीयम् ?

5. $-x^2 - y^2 + 6xy + 20$ इति प्राप्तुम् $3x^2 - 4y^2 + 5xy + 20$ इत्यस्मात् किं निष्कासनीयम् ?

6. (a) $3x - y + 11$ तथा च $-y - 11$ इत्यनयोः योगात् $3x - y - 11$ इत्येतं व्यवकलयन्तु ?

(b) $4 + 3x$ एवञ्च $5 - 4x + 2x^2$ इत्यनयोः योगात् $3x^2 - 5x$ एवञ्च $-x^2 + 2x + 5$ इत्यनयोः योगं व्यवकलयन्तु ?

12.7 कस्यचित् व्यञ्जकस्य मानम् -

वयं जानीमः यत् कस्यचित् बीजीय-व्यञ्जकस्य मानं तस्य व्यञ्जकस्य निर्मातृ-चराणां मानेषु आश्रितं वर्तते। एतादृश्यः अनेकाः स्थितयः सन्ति यत्र अस्माभिः व्यञ्जकानां मानानि ज्ञातव्यानि भवन्ति यथा वयम् एतद् अवेक्षणं कर्तुम् इच्छामः यत् चरस्य एकं विशेषमानं दत्तं समीकरणं सन्तुष्टं करोति न वा। यदा वयं ज्यामितेः एवञ्च दैनिक-गणितीय-सूत्राणां प्रयोगं कुर्मः तदा अपि वयं व्यञ्जकानां मानं ज्ञातं कुर्मः।

उदाहराणार्थम् 1 इति भुजमतः वर्गस्य क्षेत्रफलम् 1^2 इति भवति। यदि 1 इति भुजा पञ्चसेण्टीमीटरमिता अस्ति तदा क्षेत्रफलं 5^2 से.मी.^{2} = 25 से.मी.^{2} इति अस्ति। यदि भुजा दशसेण्टीमीटरमिता अस्ति तदा क्षेत्रफलम् 10^2 से.मी^{2} = 100 से.मी^{2} अस्ति।

वयम् एतादृशानि अन्यानि कतिपयानि उदाहरणानि अग्रिमे अनुच्छेदे द्रक्ष्यामः।

उदाहरणम् 7 $x = 2$ इत्येतदर्थं निम्नलिखित-व्यञ्जकानां मानानि जानीत।

(i) $x+4$ (ii) $4x-3$ (iii) $19-5x^2$ (iv) $100-10x^3$

समाधानम्

(i) $x+4$ इत्यत्र $x = 2$ इति स्थापिते सति अस्माभिः $x+4$ इत्यस्य निम्नलिखितमानं प्राप्यते -

$x + 4 = 2 + 4 = 6$

(ii) $4x-3$ इत्यत्र $x = 2$ इति स्थापिते सति अस्माभिः प्राप्यते :

$4x - 3 = (4 \times 2) - 3 = 8 - 3 = 5$

(iii) $19-5x^2$ इत्यस्मिन् $x = 2$ इति संस्थाप्य वयम् $19-5x^2$ इत्यस्य निम्नलिखितमानं प्राप्नुमः

$19 - 5x^2 = 19 - (5 \times 2^2) = 19 - (5 \times 4) = 19 - 20 = -1$

(iv) $100-10x^3$ इत्यस्मिन् $x = 2$ इति संस्थाप्य वयम् $100-10x^3$ इत्यस्य निम्नलिखितमानं प्राप्नुमः:

$100 - 10x^3 = 100 - (10 \times 2^3) = 100 - (10 \times 8)$ (अवधानं यच्छन्तु यत् $2^3 = 8$)

$= 100 - 80 = 20$

उदाहरणम् 8 निम्नलिखित-व्यञ्जकानां मानानि जानीत यदा $n = -2$ इति अस्ति।

(i) $5n-2$ (ii) $5n^2+5n-2$ (iii) n^3+5n^2+5n-2

समाधानम्

(i) $5n-2$ इत्यस्मिन् $n = -2$ इति संस्थापिते सति अस्माभिः प्राप्यते -

$5(-2) - 2 = -10 - 2 = -12$

(ii) $5n^2+5n-2$ इत्यस्मिन् $n = -2$ एतदर्थम् $5n - 2 = -12$ इति अस्ति तथा च

$5n^2 = 5 \times (-2)^2 = 5 \times 4 = 20$ [यतोहि $(-2)^2 = 4$]

द्वयोः मेलनेन वयं प्राप्नुमः

$5n^2 + 5n - 2 = 20 - 12 = 8$

(iii) अधुना $n = -2$ एतदर्थम् $5n^2 + 5n - 2 = 8$

तथा च $n^3 = (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$ इति अस्ति।

द्वयोः मेलनेन वयं प्राप्नुमः

$n^3 + 5n^2 + 5n - 2 = -8 + 8 = 0$

अधुना वयं द्विचरात्मकेषु व्यञ्जकेषु यथा $x + y$, xy इत्यादिषु विचारं करिष्यामः। कस्यचित् द्विचरात्मक-व्यञ्जकस्य सङ्ख्यात्मकं मानं ज्ञातुम् अस्माकं कृते अस्मिन् व्यञ्जके द्वयोः चरयोः माननिवेशनम् आवश्यकम् अस्ति।

उदाहरणार्थम् $x = 3$ तथा च $y = 5$ एतयोः कृते $(x + y)$ इत्यस्य मानम् $3 + 5 = 8$ इति अस्ति।

उदाहरणम् 9 $a = 3$ तथा च $b = 2$ इत्येतयोः कृते

(i) $a + b$ (ii) $7a - 4b$ (iii) $a^2 + 2ab + b^2$ (iv) $a^3 - b^3$

समाधानम् प्रदत्तेषु व्यञ्जकेषु $a = 3$ तथा च $b = 2$ इत्यनयोः स्थापनेन अस्माभिः निम्नं प्राप्यते

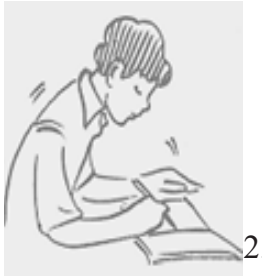
(i) $a + b = 3 + 2 = 5$

(ii) $7a - 4b = 7 \times 3 - 4 \times 2 = 21 - 8 = 13.$

(iii) $a^2 + 2ab + b^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 2 + 2^2 = 9 + 2 \times 6 + 4 = 9 + 12 + 4 = 25$

(iv) $a^3 - b^3 = 3^3 - 2^3 = 3 \times 3 \times 3 - 2 \times 2 \times 2 = 9 \times 3 - 4 \times 2 = 27 - 8 = 19$

प्रश्नावली 12.3



1. यदि $m = 2$ इति अस्ति तर्हि निम्नलिखितानां मानानि ज्ञातुं प्रयासं कुरूत।

   (i) $m - 2$ (ii) $3m - 5$ (iii) $9 - 5m$

   (iv) $3m^2 - 2m - 7$ (v) $\frac{5m}{2} - 4$

2. यदि $p = -2$ इति अस्ति तदा निम्नलिखितानां मानानि ज्ञातुं प्रयासं कुरूत।

   (i) $4p + 7$ (ii) $-3p^2 + 4p + 7$ (iii) $-2p^3 - 3p^2 + 4p + 7$

3. यदि$x = -1$ इति तदा निम्नलिखितानां व्यञ्जकानां मानानि ज्ञातुं प्रयासं कुरूत।

   (i) $2x - 7$ (ii) $-x + 2$ (iii) $x^2 + 2x + 1$ (iv)$2x^2 - x - 2$

4. यदि $a = 2$ तथा च $b = -2$ इति अस्तितदानिम्नलिखितानां मानानि ज्ञातुं प्रयासं कुरूत।

   (i) $a^2 + b^2$ (ii) $a^2 + ab + b^2$ (iii) $a^2 - b^2$

5. यदा$a = 0$ एवञ्च $b = -1$इति अस्ति तदा दत्त-व्यञ्जकानां मानानि ज्ञातुं प्रयासं कुरूत।

   (i) $2a + 2b$ (ii) $2a^2 + b^2 + 1$

   (iii) $2a^2b + 2ab^2 + ab$ (iv) $a^2 + ab + 2$

6. यदा x इत्यस्य मानम् 2 इति अस्ति तदा निम्न-व्यञ्जकान् सरलीकृत्य एतेषां मानानि ज्ञातुं प्रयासं कुरूत।

   (i) $x + 7 + 4(x - 5)$ (ii) $3(x + 2) + 5x - 7$

   (iii) $6x + 5(x - 2)$ (iv) $4(2x - 1) + 3x + 11$

7. एतान् व्यञ्जकान् सरलीकुर्वन्तु तथा च एतेषां मानानि ज्ञातुं प्रयासं कुरूत यदि $x = 3$, $a = -1$ एवञ्च $b = -2$ इति अस्ति।

   (i) $3x - 5 - x + 9$ (ii) $2 - 8x + 4x + 4$ (iii) $3a + 5 - 8a + 1$
   (iv) $10 - 3b - 4 - 5b$ (v) $2a - 2b - 4 - 5 + a$

8. (i) यदि $z = 10$ इति भवेत् तदा $z^3 - 3(z - 10)$ इत्यस्य मानं ज्ञायताम्।

   (ii) यदि $p = -10$ इति भवेत् तदा $p^2 - 2p - 100$ इत्यस्य मानं ज्ञायताम्।

9. यदा $x = 0$ इत्यनेन मानेन $2x^2 + x - a$ इत्यस्य मानम् (5) पञ्चानां समानम् अस्ति तदा a इत्यस्य मानं किं भवेत् ?

10. $2(a^2 + ab) + 3 - ab$ इति व्यञ्जकं सरलीकृत्य अस्य मानं ज्ञातुं प्रयासं कुरूत यदा $a = 5$ तथा च $b = -3$ इति भवेत्।

12.8 बीजीय-व्यञ्जकानां प्रयोग-सूत्राणि अथ च नियमाः

वयं पूर्वमेव दृष्टवन्तः स्मः यत् गणिते सूत्राणि नियमान् च सङ्क्षिप्तरूपेण व्यापकरूपेण च बीजीय-व्यञ्जकानां प्रयोगं कृत्वा लेखितुं शक्नुमः। वयम् अधः अनेकानि उदाहरणानि द्रक्ष्यामः

- **परिमापसूत्रम्**

1. कस्यचित् समबाहुत्रिभुजस्य परिमापः = 3 × तस्य भुजायाः दीर्घता इति भवति। यदि अस्य समबाहुत्रिभुजस्य भुजायाः दीर्घतां l द्वारा व्यक्तीकुर्मः तदा तस्य समबाहुत्रिभुजस्य परिमापः= 3*l* इति भविष्यति।
2. अनेन प्रकारेण कस्यचित् **वर्गस्य परिमापः= 4*l* इति भवति यत्र l इति** वर्गस्य भुजानां दीर्घता अस्ति।
3. कस्यचित् समबाहुत्रिभुजस्य **परिमापः = 5*l* इति** भवति यत्र च l इति तस्य भुजानां दीर्घता अस्ति। इत्यादि।

- **क्षेत्रफलसूत्रम्**

1. यदि वयं कस्यचित् वर्गस्य भुजाम् l द्वारा व्यक्तीकुर्मः तदा वर्गस्य क्षेत्रफलम् = l^2 इति भवति।
2. यदि वयं कस्यचित् आयतस्य दैर्घ्यं विस्तृतिं च क्रमशः *l* तथा च b इत्यनयोः द्वारा व्यक्तीकुर्मः तदा आयातस्य क्षेत्रफलम् = $l \times b = lb$ इति भवति।
3. अनेन प्रकारेण यदि कस्यचित् त्रिभुजस्य आधारः b एवञ्च औन्नत्यम् h इति अस्ति तदा त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{b \times h}{2} = \frac{bh}{2}$ इति भवति।

यदि एकवारं कस्यचित् प्रदत्तराशेः कृते सूत्रम् अर्थात् बीजीय-व्यञ्जकं ज्ञातं भवेत्तदा तस्य राशेः मानम् इष्ट-प्रतिबन्धानाम् अन्तर्गतं परिकलयितुं शक्यते।

उदाहरणार्थं 3 cm भुजामतः कस्यचित् प्रदत्तवर्गस्य परिमापः, वर्गस्य परिमापस्य व्यञ्जकाः अर्थात् 4*l* इत्यस्मिन् *l* = 3 से.मी.इति संस्थापनेन प्राप्यते।

प्रदत्तवर्गस्य परिमापः = (4 × 3) से.मी. = 12 से.मी.

अनेन एव प्रकारेण अस्य क्षेत्रफलं वर्गक्षेत्रफलस्य व्यञ्जके अर्थात् l^2 इत्यस्मिन् (*l* = 3 से.मी.) इति संस्थाप्य प्राप्यते।

प्रदत्तवर्गस्य क्षेत्रफलम् = 3^2 से.मी.^{2} = 9 से.मी.^{2}

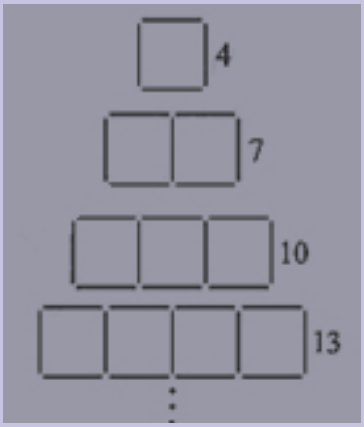
- **सङ्ख्याप्रतिरूपेभ्यः (patterns) नियमाः**

निम्नलिखित-कथनानां विषये अध्ययनं कुर्वन्तु -

1. यदि काञ्चित् प्राकृत-सङ्ख्याम् n द्वारा व्यक्तीकुर्मः तर्हि तस्याः परिवर्ती (successor) (n + 1) इति भवति। वयम् अस्य अवेक्षणं कस्याश्चिद् अपि प्राकृतसङ्ख्यायाः कृते कर्तुम् अर्हामः। उदाहरणार्थं यदि प्राकृतसङ्ख्या 10 अस्ति तर्हि तस्याः परिवर्ती 10+1 इति अस्ति यः सर्वविदितः अस्ति (ज्ञातम् अस्ति)।
2. यदि काचित् प्राकृत-सङ्ख्या n द्वारा व्यक्तीक्रियेत तदा 2n इति एका समसङ्ख्या भवति तथा च (2n + 1) इति काचित् विषमसङ्ख्या भवति। आयान्तु अस्य अवेक्षणम् अपि मन्यन्तां काञ्चित् पञ्चदश (15) इति प्राकृतसङ्ख्यां स्वीकृत्य कुर्मः। अधुना 2n = 2 × n = 2 × 15 = 30 इति अस्ति या यथार्थतः एका समसङ्ख्या अस्ति तथा च 2n + 1 = 2 × 15 + 1 = 30 + 1 = 31 इति एका विषमसङ्ख्या अस्ति। या यथार्थतः एका विषमसङ्ख्या अस्ति।

एतान् कुर्वन्तु

अग्निपेटिकायाः शलाकानां दन्तधावनशलाकानां शरकाण्डानां च समानदैर्घ्यखण्डानां लघुरेखाखण्डान् स्वीकुर्वन्तु। तान् आकृतिषु दर्शितानुसारं प्रतिरूपेषु योजयन्तु -

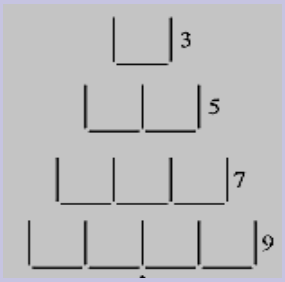


आकृतिः 12.1

1. 12.1 इति आकृत्यां निर्मितं प्रतिरूपं पश्यतु।

एतेषु चतसृभिः रेखाभिः इति निर्मिताकारस्य पुनरावृत्तिः जायमाना अस्ति । यथा भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् एकम् आकारं निर्मातुं चतुर्णां रेखाखण्डानाम् आवश्यकता भवति। द्वयोः आकारयोः कृते सप्तानां तथा च आकारत्रयस्य कृते दशानां रेखाखण्डानाम् आवश्यकता भवति। यदि आकाराणां सङ्ख्या n इति भवेत् तदा तान् निर्मातुम् अपेक्षित-रेखाखण्डानां सङ्ख्या (3n + 1) इति भविष्यति। भवन्तः अस्य प्रामाणिकतायाः अवेक्षणम् n = 1, 2,3, 4, ..., 10, ...इत्यादीन् स्वीकृत्य कर्तुं शक्नुवन्ति। यदि निर्मिताकाराणां सङ्ख्या 3 अस्ति तदा आवश्यक-रेखाखण्डानां सङ्ख्या $3 \times 3 + 1 = 9 + 1 = 10$ इति भवति यथा आकृत्यां द्रष्टुं शक्यते।

2. इदानीम् 12.2. इति आकृत्यां दत्तेषु प्रतिरूपेषु विचारं कुर्वन्तु। अत्र इति आकारस्य पुनरावृत्तिः जायमाना अस्ति।



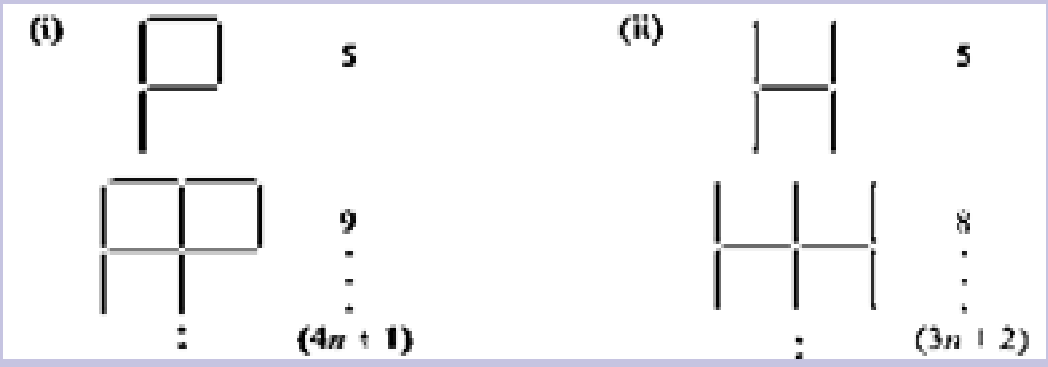
आकृतिः 12.2

1, 2, 3, 4, ... इत्यादीन् आकारान् निर्मातुम् आवश्यक-रेखाखण्डानां सङ्ख्याः क्रमशः 3, 5, 7, 9, ...इति सन्ति। यदि n द्वारा निर्मितानाम् आकाराणां सङ्ख्या क्रमशः व्यक्तीक्रियते तदा आवश्यक-रेखाखण्डानां सङ्ख्या (2n + 1) इति व्यञ्जकात् प्राप्स्यते। व्यञ्जकम् उचितम् अस्ति अथवा अनूचितम् अस्ति इत्यस्य अवेक्षणं

भवन्तः n, इत्यस्य किमपि मानं गृहीत्वा कर्तुम् अर्हन्ति। उदाहरणार्थम् n = 4 इति स्वीकृते सति अभीष्ट-रेखाखण्डानां सङ्ख्या $(2n + 1) = (2 \times 4) + 1 = 9$ इति भविष्यति या यथार्थतः 4 इति निर्मातुम् आवश्यकी अस्ति।

एतान् कुर्वन्तु

दर्शितान् आधारभूतान् आकारान् आदाय उपर्युक्त-प्रकारकाणि प्रतिरूपाणि रचयन्तु -



(Pआकारः) (Hआकारः)

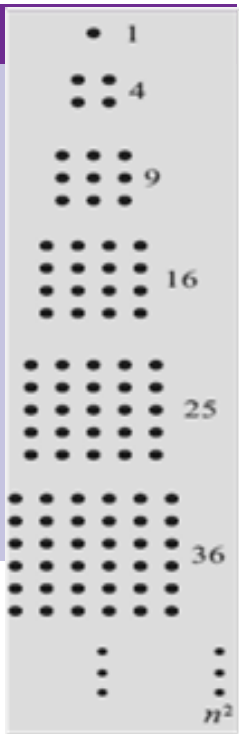
आकारान् निर्मातुम् आवश्यक-रेखाखण्डानां सङ्ख्या दक्षिणतः लिखिता अस्ति। सममेव आकारान् निर्मातुम् आवश्यक-रेखाखण्डानां दर्शयिता n इति व्यञ्जकः अपि दक्षिणतः दत्तः अस्ति।

अग्रे सरन्तु तथा च एतादृशानि अन्यानि प्रतिरूपाणि अन्वेष्टुं प्रयासं कुर्वन्तु।

एतान् कुर्वन्तु

आकृत्यां दर्शितम् अस्ति तदनुसारं बिन्दूनां (dots) प्रतिरूपाणि रचयन्तु । यदि भवन्तः एकम् आलेखकर्गदम् अथवा बिन्द्वङ्कितं कर्गदं (dot-paper) स्वीकुर्वन्ति तर्हि प्रतिरूपाणां रचना सरला भविष्यति।

पश्यन्तु यत् कथं बिन्दवः वर्गे व्यवस्थीकृताः सन्ति। यदि कस्मिंश्चित् विशिष्टाकारे एकस्यां पङ्क्तौ अथवा एकस्मिन् स्तम्भे बिन्दूनां सङ्ख्यां n चर-रूपेण स्वीकुर्मः तर्हि आकारे समस्त-बिन्दूनां सङ्ख्या n × n = n^2 इति व्यञ्जकात् प्राप्ता भविष्यति। उदाहरणार्थम् n = 4 इति स्वीकुर्वन्तु। तस्य आकारस्य कृते यस्य प्रत्येकस्यां पङ्क्तौ (प्रत्येकस्मिन् स्तम्भे) चत्वारः बिन्दवः सन्ति तदा समस्त-बिन्दूनां सङ्ख्या 4 × 4 = 16 इति भविष्यति या वस्तुतः आकृत्यां द्रष्टुं शक्यते। भवन्तः एतादृशम् अवेक्षणम् n इत्यस्य अन्यं मानं स्वीकृत्य अपि कर्तुम् अर्हन्ति। प्राक्तनैः यूनानीगणितज्ञैः इमाः सङ्ख्याः 1, 4, 9, 16, 25,... वर्गसङ्ख्याभिः (square numbers) नामाङ्किताः कृताः।



- **कानिचन अन्यानि सङ्ख्याप्रतिरूपाणि**

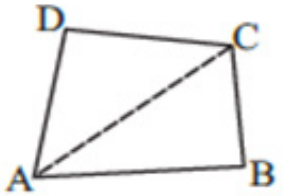
आयान्तु सङ्ख्यानाम् एकम् अन्यं प्रतिरूपं विचारयामः यस्मिन् अस्माकं सहायतार्थं कापि आकृतिः निर्मिता नास्ति : 3, 6, 9, 12,...,3n, ...

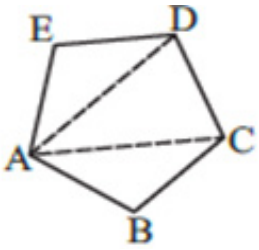
इमाः सङ्ख्याः 3 इत्यस्य गुणजाः सन्ति इमाः च 3 तः आरभ्य आरोहिक्रमेण व्यवस्थापिताः सन्ति। n तमे स्थाने आगम्यमानं पदम् 3n द्वारा व्यक्तीकृतम् अस्ति तथा च अस्य साहाय्येन भवन्तः सफलतापूर्वकं दशमे स्थाने आगम्यमानम् 3 × 10 = 30 इति पदम् एवञ्च शततमे स्थाने आगम्यमानम् 3 × 100 = 300 इति पदं ज्ञातुं शक्नुवन्ति।

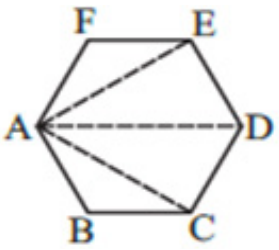
- **ज्यामितौ प्रतिरूपाणि**

कस्यचित् चतुर्भुजस्य कस्माच्चित् शीर्षात् तस्य कति विकर्णाः आलेखितुं शक्यन्ते ? अवेक्षणं कुर्वन्तु यत् एतेषां सङ्ख्या एका एव अस्ति।

कस्यचित् पञ्चभुजस्य कस्माच्चित् शीर्षात् तस्य कति विकर्णाः आलेखितुं शक्यन्ते ? अवेक्षणं कुर्वन्तु यत् एतेषां सङ्ख्या 2 अस्ति।







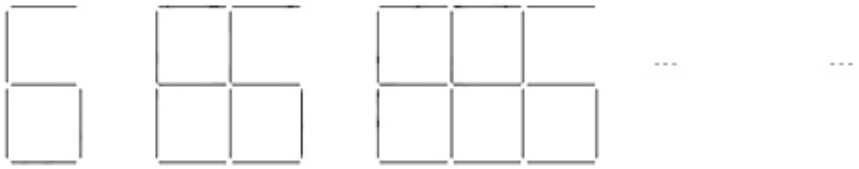
कस्यचित् षड्भुजस्य कस्माच्चित् शीर्षात् तस्य कति विकर्णाः आलेखितुं शक्यन्ते ? अवेक्षणं कुर्वन्तु यत् एतेषां सङ्ख्या 3 अस्ति।

n भुजावतः कस्यचित् बहुभुजस्य कस्माच्चित् शीर्षात् वयम् आहत्य (n – 3) विकर्णान् आलेखितुं शक्नुमः। वयं कस्यचित् सप्तभुजस्य (7 भुजाः) तथा च अष्टभुजस्य (8 भुजाः) कृते तयोः आकृतीः आलिख्य अस्य अवेक्षणं कुर्वन्तु। एषा सङ्ख्या कस्यचित् त्रिभुजस्य (3 भुजाः) कृते का अस्ति ? अवधानं कुर्वन्तु यत् कस्यचित् बहुभुजस्य कस्माच्चित् शीर्षात् आलिखिताः विकर्णाः तं तावत्सु अनानिव्यापिषु (non-over_lapping) (यौ मिथः न आवृणुतः) त्रिभुजेषु विभक्तीकुर्वन्ति यावती विकर्णानां सङ्ख्यातः एकस्माद् अधिका भवति।

प्रश्नावली 12.4

1. समानदीर्घतायुक्तैः रेखाखण्डैः निर्मितानि अङ्काय-प्रतिरूपाणि पश्यन्तु। भवन्तः रेखाखण्डैः निर्मितान् एतादृशान् अङ्कान् इलेक्ट्रानिक-घटिकासु अथवा परकलकेषु द्रष्टुं शक्नुवन्ति।

(a)

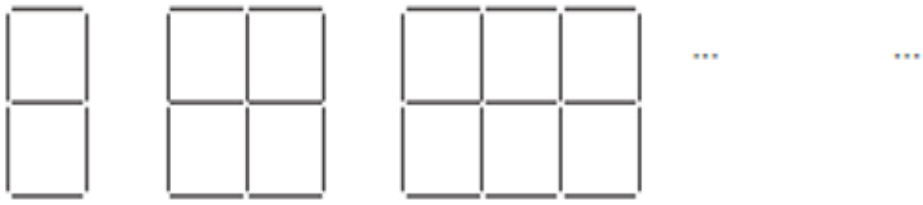


6 11 16 21 ... (5n + 1)...

(b)

4 7 10 13 ... (3n + 1)...

(c)



7 12 17 22 ... (5n + 2)...

यदि निर्मितानाम् अङ्कानां सङ्ख्या n इति स्वीकुर्मः तर्हि तदर्थम् अपेक्षित-रेखाखण्डानाम् (n) इति सङ्ख्यायाः दर्शयितारः बीजीय-व्यञ्जकः प्रत्येकं प्रतिरूपस्य दक्षिणतः लिखितः अस्ति।

इत्येवं प्रकारकान् 5,10,100 इति अङ्कान् निर्मातुं कतीनां रेखाखण्डानाम् आवश्यकता भविष्यति ?

2. सङ्ख्याप्रतिरूपाणां निम्नलिखित-तालिकां पूरयितुं प्रदत्तानां बीजीय-व्यञ्जकानां प्रयोगं कुर्वन्तु ;

क्र.स.	पदम्										
	व्यञ्जकः	प्रथमः	द्वितीयः	तृतीयः	चतुर्थः	पञ्चमः		दशमः	....	शतमः	-
(i)	2n – 1	1	3	5	7	9	-	19	-	-	-
(ii)	3n + 2	2	5	8	11	-	-	-	-	-	-
(iii)	4n + 1	5	9	13	17	-	-	-	-	-	-
(iv)	7n + 20	27	34	41	48						
(v)	$n^2 + 1$	2	5	10	17	-	-	-	-	10,001	-

अस्माभिः का चर्चा विहिता ?

1. चरैः अचरैः च व्यञ्जकाः निर्मीयन्ते। व्यञ्जकान् निर्मातुं वयं चरान् अचरान् च आधारीकृत्य योगः, व्यवकलनम्, गुणनम् अथ च विभाजनम् इति सङ्क्रियाः कुर्मः। उदाहरणार्थम् $4xy + 7$ इति व्यञ्जकः x तथा च y इति चराभ्याम् एवञ्च 4 तथा च 7 इति अचराभ्यां निर्मितः अस्ति। 4इति अचरं तथा च x एवं च y इति चरौ गुणयित्वा $4xy$ इति निर्माय तस्मिन् 7 योजयित्वा $4xy + 7$ इति निर्मीयते।

2. व्यञ्जकाः पद-योजनेन निर्मिताः भवन्ति। पदानि संयोज्य व्यञ्जकः निर्मीयते। उदाहरणार्थम् $4xy$ एवञ्च 7 इत्यनयोः योजनेन $4xy + 7$ इति निर्मितः भवति।

3. किमपि पदं गुणनखण्डानाम् एकं गुणनफलं भवति। $4xy + 7$ इत्यस्मिन् व्यञ्जके $4xy$ इति पदम् x, y एवञ्च 4 इत्येतेषां गुणनखण्डानां गुणनफलम् अस्ति। चरयुक्ताः गुणनखण्डाः बीजीय-गुणनखण्डाः इति कथ्यन्ते।

4. पदस्य गुणाङ्कः तस्य सङ्ख्यात्मकः गुणनखण्डः भवति।कदाचित् पदस्य कोऽपि एकः गुणनखण्डः पदस्य शेषभागस्य ¬गुणाङ्कः कथ्यते।

5. एकपदेन अथवा एकाधिकपदैः निर्मितः व्यञ्जकः बहुपदम् इति नाम्ना उच्यते। विशिष्टरूपेण एकपदयुतः व्यञ्जकः एकपदी द्वाभ्यां पदाभ्यां युक्तः व्यञ्जकः द्विपदी तथा च त्रिभिः पदैः युक्तः व्यञ्जकः त्रिपदी इति कथ्यते।

6. तानि पदानि येषु बीजीय-गुणनखण्डाः एकसमानाः स्युः, समानपद-नाम्ना कथ्यन्ते। भिन्न-बीजीय-गुणनखण्डैः युक्तानि पदानि असमानपदनाम्ना उच्यन्ते। अनेन प्रकारेण $4xy$ तथा च– $3xy$ इति समानपदे स्तः किन्तु $4xy$ एवञ्च $– 3x$ इति समानपदे न स्तः।

7. द्वयोः समानपदयोः योगः (अथवा अन्तरम्) एकम् अन्यं समानपदं भवति यस्य गुणाङ्कः तेषां समानपदानां गुणाङ्कानां योगेन (अथवा अन्तरेण) समानः भवति। अनेन प्रकारेण $8xy – 3xy = (8 – 3) xy$ अर्थात् $5xy$ इति।

8. यदा वयं द्वौ बीजीय-व्यञ्जकौ योजयामः तदा समानपदयोः योजनम् उपरि वर्णित-नियमानुसारं क्रियते। यानि पदानि समानानि न सन्ति तानि तथैव त्यज्यन्ते। अनेन प्रकारेण $4x^2 + 5x$तथा च $2x + 3$ इत्यनयोः योगः $4x^2 + 7x + 3$ इति अस्ति। अत्र $5x$ एवञ्च $2x$ इति समानपदे संयोज्य $7x$ इति भवतः तथा च $4x^2$ एवञ्च 3 इति असमानपदे तथैव त्यज्येते।

9. कस्यचित् समीकरणस्य समाधाने अथ च सूत्रप्रयोगस्य स्थितौ अस्माकं कृते व्यञ्जकस्य मानज्ञानम् आवश्यकं भवति। बीजीय-व्यञ्जकस्य मानं तेषां चराणां मानेषु आश्रितं वर्तते यैः तद् निर्मितम् अस्ति। अनेन प्रकारेण $x = 5$ कृते $7x – 3$ इत्यस्य मानं 32 अस्ति यतो हि $7 (5) – 3 = 35 – 3 = 32$ इति अस्ति।

10. गणिते बीजीय-व्यञ्जकान् प्रयुञ्जानाः नियमान् सूत्राणि च संक्षिप्तरूपेण व्यापकरूपेण च लिखामः।

    अनेन प्रकारेण आयतस्य क्षेत्रफलम् = lb इति अस्ति यत्र l इति आयतस्य दीर्घता तथा च b इति आयतस्य विस्तृतिः अस्ति।

कस्याश्चित् सङ्ख्यायाः (अथवा अनुक्रमः) प्रतिरूपस्य (n तमम्) व्यापकपदम् n मध्ये एकः व्यञ्जकः भवति। अनेन प्रकारेण 11, 21, 31, 41, . . . इत्येषां सङ्ख्याप्रतिरूपाणां n तमं पदम् (10n + 1) इति अस्ति।

घाताङ्कः अथ च घातः

अध्यायः 13

13.1 भूमिका

किं भवन्तः जानन्ति यत् पृथिव्याः द्रव्यमानं कियद् अस्ति ?

एतत् 5,970,000,000,000,000,000,000,000 इति किलोग्राममितम् अस्ति।

किं भवन्तः एतां सङ्ख्यां पठितुं शक्नुवन्ति ?

अरूणग्रहस्य द्रव्यमानम् 86,800,000,000,000,000,000,000,000 इति किलोग्रामपरिमितम् अस्ति।

अरूणपृथिव्योर्मध्ये कस्य द्रव्यमानम् अधिकम् अस्ति ?

सूर्यशनिग्रहयोः मध्यवर्तिनी दूरता 1,433,500,000,000 मीटरमिता अस्ति अथ च अरूणशन्योर्मध्ये 1,439,000,000,000 मीटरमिता दूरता अस्ति। किं भवन्तः इमाः सङ्ख्याः पठितुं शक्नुवन्ति ? एतयोर्मध्ये कतमा दूरता अल्पीयसी अस्ति ?

एतादृशीनां दीर्घसङ्ख्यानां पठनम् अधिगमनम् अथ च तुलना इत्यादि कठिनकार्यम् अस्ति। इमाः सङ्ख्याः सारल्येन पठितुम् अधिगन्तुम् आसां च तुलनार्थं वयं घाताङ्कानां प्रयोगं कुर्मः। अध्यायेऽस्मिन् वयं घाताङ्कानां विषये अधिगमिष्यामः तथा च एतद् अपि अधिगमिष्यामः यत् एषां प्रयोगः कथं क्रियते।

13.2 घताङ्कः

वयं घाताङ्कानां प्रयोगं कृत्वा विशाल-सङ्ख्याः सङ्क्षिप्तरूपेण लेखितुं शक्नुमः। अधोलिखितं पश्यन्तु

$10,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

10^4 इति सङ्क्षिप्त-सङ्केतः $10\times10\times10\times10$ इति गुणनफलं व्यक्तीकरोति। अत्र 10 आधारः इति कथ्यते अथ च 4 घाताङ्कः इति कथ्यते। 10^4 इत्येतद् दशानाम् उपरि घातः चत्वारः इति अथवा केवलं दशानां चतुर्थः घातः इति पठ्यते।

10^4 इत्येतद् अयुतस्य (10,000) घाताङ्कीय-रूपम् इति कथ्यते।

अनेन प्रकारेण वयं सहस्रम् अपि दशानां घातरूपेण व्यक्तीकर्तुम् अर्हामः। यतोहि सहस्रम् (1,000) दशानाम् आत्मना त्रिगुणितम् अस्ति अतः

$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$ इति अस्ति।

अत्र पुनः 10^3 इति सङ्ख्या सहस्रस्य (1,000) घाताङ्कीयरूपम् अस्ति।

अनेन प्रकारेण एव $1,00,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$ इति अस्ति।

अर्थात् 10^5 इति सङ्ख्या लक्षस्य (1,00,000) घाताङ्कीय-रूपम् अस्ति। एतयोः

उदाहरणयोः आधारः दश (10) अस्ति। 10^3 इत्यत्र घाताङ्कः 3 तथा च 10^5 इत्यत्र घाताङ्कः 5 अस्ति। वयं सङ्ख्याः विस्तारित-रूपेण अथवा प्रसारित-रूपेण लेखितुम् 10, 100, 1000 इत्यादीनां सङ्ख्यानां प्रयोगं कृतवन्तः।

उदाहरणार्थम् $47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$ इति अस्ति।

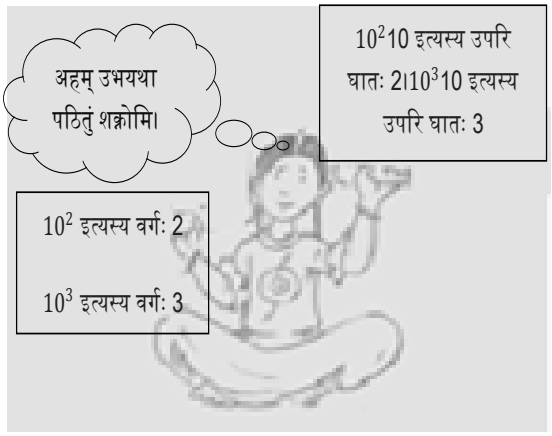
एतत् $4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10 + 1$ इत्यनेन रूपेण लेखितुं शक्यते।

अनेन प्रकारेण अधोलिखित-सङ्ख्याः अपि लेखितुं प्रयासं कुर्वन्तु -

172, 5642, 6374

उपर्युक्तेषु उदाहरणेषु वयं ताः सङ्ख्याः दृष्टवन्तः यासाम् आधारः दश (10) अस्ति। परन्तु आधारः तु कापि सङ्ख्या भवितुम् अर्हति। उदाहरणार्थम् 81 = 3 × 3 × 3 × 3 = 3^4 इति रूपेण लेखितुं शक्यते। अत्र त्रयः (3) आधारः घाताङ्कः च चत्वारः अस्ति।

केषाञ्चित् घातानां विशिष्ट-नामानि सन्ति। उदाहरणार्थम्



10^2 यत् 10 इत्यस्य उपरि यः घातः 2 इति अस्ति तत् दशानां वर्गः इति अपि पठ्यते।

10^3 दशसङ्ख्यायाः उपरि यः घातः 3 अस्ति सः दशानां घनः इति अपि पठ्यते।

किं भवन्तः सूचयितुं शक्नुवन्ति यत् 5^3 (5 इत्यस्य घनः) इत्यस्य कः अर्थः ?

5^3 इत्यस्य अर्थःपञ्चानाम् आत्मना त्रिवारं गुणनम् अस्ति अर्थात् $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

अतः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् 125 इति सङ्ख्या पञ्चानां तृतीय-घातः अस्ति। 5^3 इत्यत्र आधारः तथा च घाताङ्कः किम् अस्ति ?

अनेन प्रकारेण $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ इति अस्ति यः 2 इत्यस्य पञ्चः घातः अस्ति।

2^5 इत्यत्र 2 इति आधारः अस्ति अथ च 5 इति घाताङ्कः अस्ति।

अनेन विधिना $243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$

$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$

$625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$

भवन्तः सङ्क्षिप्तरूपेण लेखनस्य एतं विधिं तदापि प्रयोक्तुं शक्नुवन्ति यदा आधारः एकः ऋणात्मकपूर्णाङ्कः भवेत्। -2^3 इत्यस्य कः अर्थः ?

एतत् $-2^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$ इति अस्ति।

किम् $-2^4 = 16$ इति अस्ति ? अस्य अवेक्षणं कुर्वन्तु।

आयान्तु अधुना कस्याश्चिदपि निश्चितसङ्ख्यायाः स्थाने कामपि a इति सङ्ख्याम् आधाररूपेण स्वीकुर्मः अथ च सङ्ख्याम् अधोलिखितरूपेण लिखामः -

$a \times a = a^2$ (एतत् a इत्यस्य वर्गः अथवा aइत्यस्य उपरि घातः 2 इति पठ्यते)

$a \times a \times a = a^3$ (एतत् a इत्यस्य घनः अथवा a इत्यस्य उपरि घातः 3 इति पठ्यते)

$a \times a \times a \times a = a^4$ (एतत् a इत्यस्य उपरि घातः 4 अथवा a इत्यस्य चतुर्थः घातः इति पठ्यते)

$a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^7$ (एतत् a इत्यस्य उपरि घातः 7 अथवा a इत्यस्य सप्तमः घातः इति पठ्यते) इत्यादि।

प्रयासं कुर्वन्तु

एतादृशानि पञ्च अन्योदाहरणानि यच्छन्तु यत्र काचित् सङ्ख्या घाताङ्कीयरूपेण व्यक्तीक्रियते। प्रत्येकस्यां स्थितौ घाताङ्कस्य आधारस्य च परिज्ञानं कुर्वन्तु।

$a \times a \times a \times b \times b$ इति $a^3\ b^2$ इत्यनेन रूपेण व्यक्तीकर्तुं शक्यते (अस्य पठनम् a इत्यस्य घनः गुणा b इत्यस्य वर्गः इति रूपेण क्रियते)।

$a \times a \times b \times b \times b \times b$ इति $a^2\ b^4$ इत्यनेन रूपेण व्यक्तीकर्तुं शक्यते (अस्य पठनम् a इत्यस्य वर्गः गुणा b इत्यस्य उपरि घातः चतुर्थः इत्यनेन रूपेण क्रियते)।

प्रयासं कुर्वन्तु

व्यक्तीकुरूत :

(i) 729 इत्येतम् 3 इत्यस्य घातरूपेण

(ii) 128 इत्येतम् 2 इत्यस्य घातरूपेण

(iii) 343 इत्येतम् 7 इत्यस्य घातरूपेण

उदाहरणम् 1 256 इति सङ्ख्याम् 2 इत्यस्य घातरूपेण व्यक्तीकुरूत।

समाधानम् $256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ इति अस्माकं कृते प्राप्तम् अस्ति।

अतः वयं वक्तुं शक्नुमः $256 = 2^8$ इति।

उदाहरणम् 2 2^3 तथा च 3^2 इति एतयोः मध्ये कः गुरूतरः अस्ति ?

समाधानम् $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ इति एवञ्च $3^2 = 3 \times 3 = 9$ इति अस्माकं कृते प्राप्तम् अस्ति।

यतोहि $9 > 8$ इति अस्ति अतः 3^2 इति 2^3 इत्यस्माद् गुरुः अस्ति।

उदाहरणम् 3 8^2 तथा च 2^8 इति एतयोः मध्ये कः गुरूतरः अस्ति ?

समाधानम् $8^2 = 8 \times 8 = 64$

$2^8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$ इति अस्ति।

स्पष्टतया $2^8 > 8^2$ इति अस्ति।

उदाहरणम् 4 $a^3\ b^2$, $a^2\ b^3$, $b^2\ a^3$ तथा च $b^3\ a^2$ इति प्रसारितरूपेण लिखन्तु। किम् एतानि सर्वाणि समानानि सन्ति ?

समाधानम्

$a^3\ b^2 = a^3 \times b^2$

$= (a \times a \times a) \times (b \times b)$

$= a \times a \times a \times b \times b$

$a^2\ b^3 = a^2 \times b^3$

$= a \times a \times b \times b \times b$

$b^2\ a^3 = b^2 \times a^3$

$= b \times b \times a \times a \times a$

$b^3\ a^2 = b^3 \times a^2$

$= b \times b \times b \times a \times a$

अवधानं कुर्वन्तु यत् $a^3\ b^2$ एवञ्च $a^2\ b^3$ इति पदयोः स्थितौ a तथा च b इत्यनयोः घातौ भिन्नौ स्तः।

अनेन प्रकारेण $a^3\ b^2$ एवञ्च $a^2\ b^3$ इति भिन्नपदे स्तः।

अस्माद् विपरीतम् $a^3\ b^2$ एवञ्च $b^2\ a^3$ इतिसमाने (एकम् एव) स्तः यतोहि a तथा च b इत्यनयोः घातौ समानौ स्तः। गुणनखण्डानां क्रमेण कश्चन प्रभावः नैव जायते।

अनेन प्रकारेण $a^3\ b^2 = a^3 \times b^2 = b^2 \times a^3 = b^2\ a^3$ इति अस्ति।

अनेन प्रकारेण $a^2\ b^3$ एवञ्च $b^3\ a^2$ अपि समाने स्तः।

उदाहरणम् 5 अधोलिखित-सङ्ख्याः अभाज्यगुणनखण्ड-घातानां गुणनफलस्य रूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु

(i) 72 (ii) 432 (iii) 1000 (iv) 16000

समाधानम् (i) $72 = 2 \times 36 = 2 \times 2 \times 18$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

अनेन प्रकारेण $72 = 2^3 \times 3^2$ (इष्टाभाज्य-गुणनखण्डानां घातानां गुणनफल-रूपम्)

(ii) $432 = 2 \times 216 = 2 \times 2 \times 108 = 2 \times 2 \times 2 \times 54$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 27 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

अथवा $432 = 2^4 \times 3^3$ (इष्टं रूपम्)

(iii) $1000 = 2 \times 500 = 2 \times 2 \times 250 = 2 \times 2 \times 2 \times 125$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 25 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

अथवा $1000 = 2^3 \times 5^3$

अतुलः इदम् उदाहरणम् अधोलिखितविधिना साधयितुम् इच्छति

$1000 = 10 \times 100 = 10 \times 10 \times 10$

$= (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$ (यतोहि $10 = 2 \times 5$)

$= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

अनेन $1000 = 2^3 \times 5^3$

किम् अतुलस्य विधिः उचितः अस्ति ?

(iv) $16{,}000 = 16 \times 1000 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 1000 = 2^4 \times 10^3$ (यतोहि $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$)

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5) = 2^4 \times 2^3 \times 5^3$

(यतोहि $1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$)

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5)$

अथवा $16{,}000 = 2^7 \times 5^3$

उदाहरणम् 6 निम्नलिखितानां मानं ज्ञातुं प्रयासं कुरूत।

$(1)^5, (-1)^3, (-1)^4, (-10)^3, (-5)^4$

(–1) विषमसङ्ख्या = –1
(–1) समसङ्ख्या = +1

समाधानम्

(i) अस्माकं पार्श्वे अस्ति $(1)^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

यथार्थतः 1 इत्यस्य कश्चिदपि घातः 1 इत्यस्य समानः एव भवति।

(ii) $(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times (-1) = -1$

(iii) $(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times 1 = 1$

भवन्तः अस्य अवेक्षणं कर्तुं शक्नुवन्ति यत् (–1) इत्यस्य कश्चिदपि विषमघातः (–1) इत्यस्य समानः एव भवति अथ च (–1) इत्यस्य कश्चिदपि समघातः (+1) इत्यस्य समानः एव भवति।

(iv) $(-10)^3 = (-10) \times (-10) \times (-10) = 100 \times (-10) = -1000$

(v) $(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 25 \times 25 = 625$

प्रश्नावली 13.1

1. अधोलिखितानां मानानि ज्ञातुं प्रयासं कुर्वन्तु -

   (i) 2^6 (ii) 9^3 (iii) 11^2 (iv) 5^4

2. अधोलिखितान् घाताङ्कीयरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु -

   (i) $6 \times 6 \times 6 \times 6$ (ii) $t \times t$ (iii) $b \times b \times b \times b$ (iv) $5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$

(v) $2 \times 2 \times a \times a$ (vi) $a \times a \times a \times c \times c \times c \times c \times d$

3. अधोलिखित-सङ्ख्यासु प्रत्येकं सङ्ख्यां घाताङ्कीय-सङ्केतरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु -

(i) 512 (ii) 343 (iii) 729 (iv) 3125

4. अधोलिखितेषु प्रत्येकस्मिन् भागे यत्र कुत्रापि सम्भवं स्यात् दीर्घसङ्ख्यां परिचिन्वन्तु -

(i) 4^3 तथा च 3^4 (ii) 5^3 तथा च 3^5 (iii) 2^8 तथा च 8^2

(iv) 100^2 तथा च 2^{100} (v) 2^{10} तथा च 10^2

5. अधोलिखितेषु एकैकं तेषाम् अभाज्य-गुणनखण्डानां घातीय-गुणनफल-रूपेण व्यक्तं कुर्वन्तु -

(i) 648 (ii) 405 (iii) 540 (iv) 3,600

6. सरलीकुरूत -

(i) 2×10^3 (ii) $7^2 \times 2^2$ (iii) $2^3 \times 5$ (iv) 3×4^4

(v) 0×10^2 (vi) $5^2 \times 3^3$ (vii) $2^4 \times 3^2$ (viii) $3^2 \times 10^4$

7. सरलीकुरूत -

(i) $(-4)^3$ (ii) $(-3) \times (-2)^3$

(iii) $(-3)^2 \times (-5)^2$ (iv) $(-2)^3 \times (-10)^3$

8. अधोलिखित-सङ्ख्यानां तुलनां कुरूत -

(i) 2.7×10^{12} ; 1.5×10^8 (ii) 4×10^{14} ; 3×10^{17}

13.3 घाताङ्कानां नियमाः

13.3.1 समानाधाराणां घातानां गुणनम्

(i) आयान्तु $2^2 \times 2^3$ इत्यस्य परिकलनं कुर्मः

$$2^2 \times 2^3 = (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 2^{2+3}$$

अवधानं कुर्वन्तु यत् 2^2 एवञ्च 2^3 इत्यत्र आधारः एकः एव अस्ति अर्थात् समानः अस्ति तथा च 2 एवञ्च 3 इत्यनयोः घाताकाङ्कयोः योगः 5 अस्ति।

(ii) $(-3)^4 \times (-3)^3 = [(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)] \times [(-3) \times (-3) \times (-3)]$

$$= (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$$
$$= (-3)^7$$
$$= (-3)^{4+3}$$

पुनः अवधानं कुर्वन्तु यत् अत्र आधारः एकः एव अस्ति तथा च घाताङ्कानां योगः 4 +3= 7 इति अस्ति।

(iii) $a^2 \times a^4 = (a \times a) \times (a \times a \times a \times a)$

$$= a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$$

(टिप्पणी - आधारः एकः एव अस्ति तथा च घाताङ्कानां योगः 2 + 4 = 6 इति अस्ति।)

अनेन प्रकारेण सत्यापितं कुर्वन्तु यत् :

$4^2 \times 4^2 = 4^{2+2}$

$3^2 \times 3^3 = 3^{2+3}$

किं भवन्तः मञ्जूषायाम् उपयुक्तसङ्ख्यां लेखितुं शक्नुवन्ति ?

$(-11)^2 \times (-11)^6 = 11^{\square}$

प्रयासं कुर्वन्तु

सरलीकृत्य घाताङ्कीय-रूपेण लिख्यताम्

(i) $2^5 \times 2^3$

(ii) $p^3 \times p^2$

(iii) $4^3 \times 4^2$

(iv) $a^3 \times a^2 \times a^7$

(v) $5^3 \times 5^7 \times 5^{12}$

(vi) $(-4)^{100} \times (-4)^{20}$

$b^2 \times b^3 = b^{\square}$(ध्यानं यच्छन्तु यत् आधारः एकः एव अस्ति तथा च b कश्चन शून्येतर-पूर्णाङ्कः अस्ति)।

$c^3 \times c^4 = c^{\square}$(c कश्चिद्शू न्येतर पूर्णाङ्कः अस्ति)।

$d^{10} \times d^{20} = d^{\square}$

इतः वयं व्यापकरूपेण एतद् वक्तुं शक्नुमः यत् शून्येतरस्य a इति पूर्णाङ्कस्य कृते $a^m \times a^n = a^{m+n}$ इति भवति यत्र m तथा च n इति पूर्णाङ्कसङ्ख्ये स्तः।

अवधानम्

$2^3 \times 3^2$ इत्यस्मिन् विचारं कुर्वन्तु।

किं भवन्तः घाताङ्कान् योजयितुं शक्नुवन्ति ? न ! किं भवन्तः सूचयितुं शक्नुवन्ति 'किमर्थम्' ?

2^3 इत्यस्य आधारः 2 इति अस्ति तथा च 3^2 इत्यस्य आधारः 3 इति अस्ति। आधारः एकः समानः नास्ति।

13.3.2 समानाधारवतां घातानां विभाजनम्

आयान्तु $3^7 \div 3^4$ इति सरलीकुर्मः।

$$3^7 \div 3^4 = \frac{3^7}{3^4} = \frac{3\times3\times3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3}$$

$$= 3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 3^{7-4}$$

अनेन प्रकारेण $3^7 \div 3^4 = 3^{7-4}$

(अवधानं कुर्वन्तु 3^7 एवञ्च 3^4 इत्यनयोः आधारः एकः एव अस्ति अन्यच्च $3^7 \div 3^4 = 3^{7-4}$ इति जायते।)

अनेन प्रकारेण $5^6 \div 5^2 = \frac{5^6}{5^2} = \frac{5\times5\times5\times5\times5\times5}{5\times5}$

$$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 5^{6-2}$$

अथवा $5^6 \div 5^2 = 5^{6-2}$ इति अस्ति।

कल्पनां कुर्वन्तु यत् a इति कश्चित् शून्येतरः पूर्णाङ्कः अस्ति। तदानीम्

$$a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = \frac{a\times a\times a\times a}{a\times a} = a\times a = a^2 = a^{4-2}$$

प्रयासं कुर्वन्तु

सरलीकृत्य घाताङ्कीय-रूपेण लिख्यताम् -

(यथा- $11^6 \div 11^2 = 11^4$)

(i) $2^9 \div 2^3$

(ii) $10^8 \div 10^4$

(iii) $9^{11} \div 9^7$

(iv) $20^{15} \div 20^{13}$

(v) $7^{13} \div 7^{10}$

$a^4 \div a^2 = a^{4-2}$

किम् अधुना भवन्तः सद्यः एव उत्तरं दातुं शक्नुवन्ति ?

$10^8 \div 10^3 = 10^{8-3} = 10^5$

$7^9 \div 7^6 = 7^{\square}$

$a^8 \div a^5 = a^{\square}$

b एवञ्च c इति शून्येतरपूर्णाङ्कयोः कृते

$b^{10} \div b^5 = b^{\square}$

$c^{100} \div c^{90} = c^{\square}$

व्यापकरूपेण कस्यचित् a इति शून्येतरपूर्णाङ्कस्य कृते

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

इति भवति यत्र m एवञ्च n इति पूर्णसङ्ख्ये स्तः अथ च $m > n$ इति अस्ति।

13.3.3 कस्यचित् घातस्य घातग्रहणम्

निम्नलिखितेषु विचारं कुर्वन्तु

$(2^3)^2$ तथा च $(3^2)^4$ इति सरलं कुरूत।

अधुना $(2^3)^2$ इत्यस्य अर्थः अस्ति यत् 2^3 इत्यस्य स्वयं द्वारा द्विवारं गुणनम्।

$$(2^3)^2 = 2^3 \times 2^3$$
$$= 2^{3+3} \quad (\text{यतोहि } a^m \times a^n = a^{m+n})$$
$$= 2^6 = 2^{3\times 2}$$

अर्थात् $(2^3)^2 = 2^{3\times 2}$

अनेन प्रकारेण $(3^2)^4 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2$

$$= 3^{2+2+2+2}$$
$$= 3^8 \quad \text{(पश्यन्तु यत् 2 तथा च 4 इत्यनयोः गुणनफलम् 8 इति अस्ति।)}$$
$$= 3^{2\times 4}$$

प्रयासं कुर्वन्तु

सरलीकृत्य उत्तरं घाताङ्कीयरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु।

(i) $(6^2)^4$ (ii) $(2^2)^{100}$

(iii) $(7^{50})^2$ (iv) $(5^3)^7$

किं भवन्तः बोधयितुं शक्नुवन्ति यत् $(7^2)^{10}$ इति कस्य समानम् अस्ति ?

अतः

$(2^3)^2$	$= 2^{3\times2}$	$= 2^6$
$(3^2)^4$	$= 3^{2\times4}$	$= 3^8$
$(7^2)^{10}$	$= 7^{2\times10}$	$= 7^{20}$
$(a^2)^3$	$= a^{2\times3}$	$= a^6$
$(a^m)^3$	$= a^{m\times3}$	$= a^{3m}$

उपर्युक्तवर्णनेन वयं व्यापकरूपेण एतद् वक्तुं शक्नुमः यत् कस्यचित् 'a' इति पूर्णाङ्कस्य कृते

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

इति भवति यत्र 'm' तथा च 'n' इति पूर्णसङ्ख्ये स्तः।

उदाहरणम् 7 किं भवन्तः सूचयितुम् अर्हन्ति यत् $(5)^2 \times 3$ तथा च $(5^2)^3$ इत्यनयोः मध्ये कः दीर्घतरः अस्ति ?

समाधानम् $(5^2)\times 3$ इत्यस्य अर्थः अस्ति यत् 5^2 इति 3 इत्यनेन गुणितं वर्तते अर्थात् एतत् $5 \times 5 \times 3 = 75$ इति अस्ति।

किन्तु $(5)^2$ इत्यस्य अर्थः अस्ति यत् 5^2 इत्यस्य स्वयं द्वारा त्रिवारं गुणनम् अस्ति अर्थात् एतत्

$5^2 \times 5^2 \times 5^2 = 5^6 = 15{,}625$ इति अस्ति।

अतः $(5^2)^3 > (5^2)x3$ इति।

13.3.4 समानघाताङ्क-घातानां गुणनम्

किं भवन्तः $2^3\times3^3$ इति सरलं कर्तुं शक्नोति ? अवधानं कुर्वन्तु यत् अत्र 2^3 एवञ्च 3^3 इत्यनयोः उभयोः पदयोः आधारः भिन्नः अस्ति। किन्तु घाताङ्कौ समानौ स्तः।

इदानीम् $2^3 \times 3^3 = (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$

$$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$$
$$= 6 \times 6 \times 6$$
$$= 6^3 \text{ (पश्यन्तु यत् 2 एवञ्च 3 इत्यनयोः आधारयोः गुणनफलम् 6 अस्ति।)}$$

पश्यन्तु $4^4 \times 3^4 = (4 \times 4 \times 4 \times 4) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$

सममेव पश्यन्तु

$3^2 \times a^2 = (3 \times 3) \times (a \times a)$

$= (3 \times a) \times (3 \times a)$

$= (3 \times a)^2$

$= (3a)^2$ (अवधानं यच्छन्तु $3 \times a = 3a$)

अनेन प्रकारेण $a^4 \times b^4 = (a \times a \times a \times a) \times (b \times b \times b \times b)$

$= (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b)$

$= (a \times b)^4$

$= (ab)^4$ (अवधानं यच्छन्तु यत् $a \times b = ab$ इति अस्ति)

$= (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3)$

$= 12 \times 12 \times 12 \times 12$

$= 12^4$

प्रयासं कुर्वन्तु

$a^m \times b^m = (ab)^m$ इति प्रयुज्य अन्यरूपेण परिवर्तयन्तु :

(i) $4^3 \times 2^3$ (ii) $2^5 \times b^5$

(iii) $a^2 \times t^2$ (iv) $5^6 \times (-2)^6$

(v) $(-2)^4 \times (-3)^4$

व्यापकरूपेण कस्यचिदपि a इति शून्येतरपूर्णाङ्कस्य कृते इति भवति यत्र m इति एका पूर्णसङ्ख्या अस्ति।

उदाहरणम् 8 अधोलिखित-पदानि घाताङ्कीयरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु:

(i) $(2 \times 3)^5$ (ii) $(2a)^4$ (iii) $(-4m)^3$

समाधानम्

(i) $(2 \times 3)^5 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$= 2^5 \times 3^5$

(ii) $(2a)^4 = 2a \times 2a \times 2a \times 2a$

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (a \times a \times a \times a)$

$= 2^4 \times a^4$

(iii) $(-4m)^3 = (-4 \times m)^3$

$= (-4 \times m) \times (-4 \times m) \times (-4 \times m)$

$= (-4) \times (-4) \times (-4) \times (m \times m \times m) = (-4)^3 \times (m)^3$

13.3.5 समानघाताङ्कैः घातैः विभजनम्

प्रयासं कुर्वन्तु

$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ इत्यस्य प्रयोगं कृत्वा अन्यस्मिन् रूपे परिवर्तयन्तु

(i) $4^5 \div 3^5$

(ii) $2^5 \div b^5$

(iii) $(-2)^3 \div b^3$

(iv) $p^4 \div q^4$

(v) $5^6 \div (-2)^6$

अधोलिखित-समीकरणानि पश्यन्तु :

(i) $\frac{2^4}{3^4} = \frac{2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

(ii) $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a\times a\times a}{b\times b\times b} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$

एभिःउदाहरणैः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् व्यापकरूपेण

$a^m \div b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ यत्र a एवञ्च b कौचित् द्वौ शून्येतर-पूर्णाङ्कौ स्तः

तथा च m इति एका पूर्णसङ्ख्या अस्ति।

उदाहरणम् 9 प्रयासं कुरूत (i) $\left(\frac{3}{5}\right)^4$ (ii) $\left(\frac{-4}{7}\right)^5$

समाधानम्

(i) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{3\times3\times3\times3}{5\times5\times5\times5}$

(ii) $\left(\frac{-4}{7}\right)^5 = \frac{(-4)^5}{7} = \frac{(-4)\times(-4)\times(-4)\times(-4)\times(-4)}{7\times7\times7\times7\times7}$

- **शून्यघाताङ्काः सङ्ख्याः -**

किं भवन्तः निर्देशं कर्तुं शक्नुवन्ति यत् $\frac{3^5}{3^5}$ इति कस्य तुल्यम् अस्ति?

$\frac{3^5}{3^5} = \frac{3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3}$ इति अस्ति।

$3^5 \div 3^5 = 3^{5-5} = 3^0$ इति अस्ति। अतः $3^0 = 1$ इति अस्ति।

घाताङ्कीय-नियमानां प्रयोगं कुर्वन्तः किं भवन्तः सूचयितुं शक्नुवन्ति यत् 7^0 इति कस्य तुल्यम् अस्ति ?

$7^3 \div 7^3 = 7^{3-3} = 7^0$

सहैव $\frac{7^3}{7^3} = \frac{7\times7\times7}{7\times7\times7} = 1$ इति अस्ति।

अतः $7^0 = 1$

अनेन प्रकारेण $a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0$

सहैव $a^3 \div a^3 = \frac{a^3}{a^3} = \frac{a\times a\times a}{a\times a\times a} = 1$ इति अस्ति।

a^0 इति किम् अस्ति ?

अधोलिखित-प्रतिरूपाणि पश्यन्तु -

$2^6 = 64$

$2^5 = 32$

$2^4 = 16$

$2^3 = 8$

$2^2 = ?$

$2^1 = ?$

$2^0 = ?$

भवन्तः केवलमात्रं प्रतिरूपाणि वीक्ष्य एव 2^0 इत्यस्य मानस्य अनुमानं कर्तुं शक्नुवन्ति।

भवन्तः द्रष्टुम् अर्हन्ति यत् $2^0 = 1$ अस्ति

यदि $3^6 = 729$ इतः प्रारम्भं कुर्मः तदा पूर्व-दर्शितविधिना $3^5, 3^4, 3^3, \ldots$ इत्यादि ज्ञातं कुर्वन्तः किं भवन्तः 3^0 इत्यस्य मानं वक्तुं शक्नुवन्ति ?

अतः $a^0 = 1$ (a इति कस्यचित् शून्येतरपूर्णाङ्कस्य कृते)

अतः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् कस्याञ्चित् सङ्ख्यायाम् (शून्येतरायाम्) 0 इति घातस्य (अथवा घाताङ्कस्य) मानम् 1 इति भवति।

13.4 घाताङ्क-नियमानानां विविधेषु उदाहरणेषु प्रयोगः

आगच्छन्तु उपरि विकसितनान् घाताङ्क-नियमानान् प्रयुज्य कानिचित् उदाहरणानि साधयामः।

उदाहरणम् 10 $8 \times 8 \times 8 \times 8$ कृते 2 इति आधारं स्वीकृत्य एतान् अङ्कान् घाताङ्कीयरूपेण लिखन्तु।

समाधानम् वयं जानीमः यत् $8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4$

परन्तु वयं जानीमः यत् $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

अतः $8^4 = (2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3$

$= 2^{3\times4}$ [भवन्तः $(a^m)^n = a^m$ इत्यस्य अपि प्रयोगं कर्तुं शक्नुवन्ति]

$= 2^{12}$

उदाहरणम् 11 सरलीकृत्य उत्तराणि घाताङ्कीय-रूपेण लिखन्तु :

(i) $\frac{3^7}{3^2} \times 3^5$ (ii) $2^3 \times 2^2 \times 5^5$ (iii) $(6^2 \times 6^4) \div 6^3$

(iv) $[(2^2)^3 \times 3^6] \times 5^6$ (v) $8^2 \div 2^3$

समाधानम्

(i) $\left(\frac{3^7}{3^2}\right) \times 3^5 = (3^{7-2}) \times 3^5$

$= 3^5 \times 3^5 = 3^{5+5} = 3^{10}$

(ii) $2^3 \times 2^2 \times 5^5 = 2^{3+2} \times 5^5$

$= 2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5$

(iii) $(6^2 \times 6^4) \div 6^3 = 6^{2+4} \div 6^3$

$= \frac{6^3}{6^3} = 6^{6-3} = 6^3$

(iv) $[(2^2)^3 \times 3^6] \times 5^6 = [2^6 \times 3^6] \times 5^6$

$= (2 \times 3)^6 \times 5^6$

$= (2 \times 3 \times 5)^6 = 30^6$

(v) $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

अतः $8^2 \div 2^3 = (2^3)^2 \div 2^3$

$= 2^6 \div 2^3 = 2^{6-3} = 2^3$

उदाहरणम् 12 सरलीकुरूत -

(i) $\frac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27}$ (ii) $2^3 \times a^3 \times 5a^4$ (iii) $\frac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2}$

समाधानम्

(i) अत्र $\frac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27} = \frac{(2^2 \times 3)^4 \times (3^2)^3 \times 2^2}{(2 \times 3)^3 \times (2^3)^2 \times 3^3}$

$= \frac{(2^2)^4 \times (3)^4 \times 3^{2\times3} \times 2^2}{2^3 \times 3^3 \times 2^{2\times3} \times 3^3} = \frac{2^8 \times 2^2 \times 3^4 \times 3^6}{2^3 \times 2^6 \times 3^3 \times 3^3}$

$= \frac{2^{8+2} \times 3^{4+6}}{2^{3+6} \times 3^{3+3}} = \frac{2^{10} \times 3^{10}}{2^9 \times 3^6}$

$= 2^{10-9} \times 3^{10-6} = 2^1 \times 3^4$

$= 2 \times 81 = 162$

(ii) $2^3 \times a^3 \times 5a^4 = 2^3 \times a^3 \times 5 \times a^4$

$= 2^3 \times 5 \times a^3 \times a^4 = 8 \times 5 \times a^{3+4}$

$= 40\, a^7$

(ii) $\frac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2} = \frac{2 \times 3^4 \times 2^5}{3^2 \times (2^2)^2} = \frac{2 \times 2^5 \times 3^4}{3^2 \times 2^{2\times2}}$

$$= \frac{2^{1+5}\times 3^4}{2^4\times 3^2} = \frac{2^6\times 3^4}{2^4\times 3^2} = 2^{6-4}\times 3^{4-2}$$

$$= 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$$

टिप्पणी अस्मिन् अध्याये अस्माभिः अधिकांशरूपेण तादृशानि उदाहरणानि स्वीकृतानि येषु आधारः कश्चन पूर्णाङ्कः अस्ति। परन्तु अस्य अध्यायस्य सर्वे परिणामाः तासां स्थितीनां कृते अपि प्रमाणिताः सन्ति यत्र आधारत्वेन परिमेयसङ्ख्याः सन्ति।

प्रश्नावली 13.2

1. घाताङ्कीय-नियमानां प्रयोगं कुर्वन्तः अधोलिखितान् सरलीकुर्वन्तु तथा च उत्तरं घाताङ्कीय-रूपेण लिखन्तु -

   (i) $3^2 \times 3^4 \times 3^8$ (ii) $6^{15} \div 6^{10}$ (iii) $a^3 \times a^2$ (iv) $7^x \times 7^2$

   (v) $(5^2)^3 \div 5^3$ (vi) $2^5 \times 5^5$ (vii) $a^4 \times b^4$ (viii) $(3^4)^3$

   (ix) $(2^{20} \div 2^{15}) \times 2^3$ (x) $8^t \div 8^2$

2. अधोलिखितेषु एकैकं सरलीकृत्य घाताङ्कीय-रूपेण व्यक्तीकुरूत -

   (i) $\frac{2^3\times 3^4\times 4}{3\times 32}$ (ii) $[(5^2)^3\times 5^4]\div 5^7$ (iii) $25^4 \div 5^3$

   (iv) $\frac{3\times 7^2\times 11^8}{21\times 11^3}$ (v) $\frac{3^7}{3^4\times 3^3}$ (vi) $2^0 + 3^0 + 4^0$

   (vii) $2^0 \times 3^0 \times 4^0$ (viii) $(3^0+2^0) \times 5^0$ (ix) $\frac{2^8\times a^5}{4^3\times a^3}$

   (x) $\frac{a^5}{a^3} \times a^8$ (xi) $\frac{4^5\ a^8\ b^3}{4^5\ a^5\ b^2}$ (xii) $(2^3\times 2)^2$

3. अधोलिखित-कथनानि सत्यानि असत्यानि वा इति सूचयन्तु सकारणं च स्व-उत्तरं यच्छन्तु -

   (i) $10 \times 10^{11} = 100^{11}$ (ii) $2^3 > 5^2$

   (iii) $2^3 \times 3^2 = 6^5$ (iv) $3^0 = (1000)^0$

4. अधोलिखितेषु एकैकं केवलम् अभाज्य-गुणनखण्डानां घातीय-गुणनफलरूपेण व्यक्तं कुरूत -

   (i) 108×192 (ii) 270 (iii) 729×64 (iv) 768

5. सरलीकुरूत -

   (i) $\frac{(2^5)^2\times 7^3}{8^3\times 7}$ (ii) $\frac{25\times 5^2\times t^8}{10^3\times t^4}$ (iii) $\frac{3^5\times 10^2\times 25}{5^7\times 6^5}$

13.5 दशमलवसङ्ख्या-पद्धतिः

आयान्तु, 47561 इत्यस्य अधोलिखितं प्रसारं पश्यामः येन सह वयं पूर्वमेव परिचिताः स्मः -

$$47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$$

वयम् 10 इत्यस्य घातानां प्रयोगं कुर्वन्तः घाताङ्कीय-रूपेण अधोलिखितप्रकारेण व्यक्तीकर्तुं शक्नुमः -

अतः $47561 = 4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 1 \times 10^0$

(अवधानं कुर्वन्तु - $10,000 = 10^4$, $1000 = 10^3$, $100 = 10^2$, $10 = 10^1$ तथा च $1 = 10^0$)

आयान्तु अन्याम् एकां सङ्ख्यां प्रसारित-रूपेण लिखामः

$$104278 = 1 \times 100,000 + 0 \times 10,000 + 4 \times 1000 + 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8 \times 1$$
$$= 1 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0$$
$$= 1 \times 10^5 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0$$

अवधानं यच्छन्तु यत् केन प्रकारेण 10 इत्यस्य घाताङ्काः 5 इति अधिकतममानात् आरम्भमाणाः एकैकशः व्यवकल्यमानाः (घाताङ्काः) शून्यपर्यन्तम् (0) आगच्छन्ति।

13.6 दीर्घसङ्ख्यानां मानकरूपेण व्यक्तीकरणम्

आयान्तु, अस्य अध्यायस्य प्रारम्भिकस्थितिं प्रत्यागच्छामः। अस्माभिः उक्तम् आसीत् यत् दीर्घ-सङ्ख्याः घाताङ्कानां प्रयोगं कृत्वा सौविध्येन व्यक्तीकर्तुं शक्यन्ते। अस्माभिः एतावत् पर्यन्तम् एतत् न दर्शितम् आसीत्। सम्प्रति वयम् एतत् करिष्यामः।

1. सूर्यः अस्माकम् आकाशगङ्गायाः केन्द्रात् 300,000,000,000,000,000,000 मीटरपरिमित-दूरे अस्ति।
2. अस्माकम् आकाशगङ्गायाम् (100,000,000,000) एकनिखर्वं तारकाः सन्ति।
3. पृथ्व्याः द्रव्यमानम् 5,976,000,000,000,000,000,000,000 किलोग्रामपरिमितम् अस्ति।

प्रयासं कुर्वन्तु

10 इत्यस्य घातानां प्रयोगं कुर्वन्तः अधोलिखितसङ्ख्यानां घाताङ्कीय-रूपेण प्रसारणं कुर्वन्तु

(i) 172

(ii) 5,643

(iii) 56,439

(iv) 1,76,428

इमाः सङ्ख्याः पठन-लेखनदृष्ट्या सरलाः न सन्ति। वयं इमाः सङ्ख्याः सरलीकर्तुं वयं घातानाम् अथवा घाताङ्कानां प्रयोगं कुर्मः।

अधोलिखिताः सङ्ख्याः पश्यन्तु

$59 = 5.9 \times 10 = 5.9 \times 10^1$

$590 = 5.9 \times 100 = 5.9 \times 10^2$

$5900 = 5.9 \times 1000 = 5.9 \times 10^3$

$59000 = 5.9 \times 10000 = 5.9 \times 10^4$ इत्यादयः।

अस्माभिः इमाः सर्वाः सङ्ख्याः **मानकरूपेण व्यक्तीकृताः**। काचिद् अपि सङ्ख्या 1.0 एवञ्च 10.0 एतन्मध्यस्थेन दशमलवसङ्ख्यारूपेण तथा च (1.0 इति अपि सम्मिलिता अस्ति) 10 इत्यस्य घात-गुणनफलरूपेण व्यक्तीकर्तुं शक्यते। सङख्यायाः इदं रूपं तस्याः **मानकरूपम्** इति कथ्यते। अनेन प्रकारेण

$5,985 = 5.985 \times 1,000 = 5.985 \times 10^3$ इति 5,985 इत्यस्याः सङ्ख्यायाः मानकरूपम् अस्ति।

अवधानं कुर्वन्तु यत् 5,985 इति सङ्ख्या 59.85×100 अथवा 59.85×10^2 इत्यनेन रूपेण अपि व्यक्तीकर्तुं शक्यते। परन्तु इदम् 5,985 इत्यस्याः सङ्ख्यायाःमानकरूपं नास्ति। अनेन प्रकारेण $5,985 = 0.5985 \times 10,000 = 0.5985 \times 10^4$ इति अपि 5,985 इत्यस्याः मानकरूपं नास्ति।

अधुना वयम् अस्य अध्यायस्य प्रारम्भे आगताः सङ्ख्याः अनेन मानकरूपेण व्यक्तीकर्तुं सक्षमाः संजाताः स्मः। अस्माकम् आकाशगङ्गायाः केन्द्रात् सूर्यस्य 300,000,000,000,000,000,000 मीटरमितम् अन्तरालम् $3.0 \times 100,000,000,000,000,000,000 = 3.0 \times 10^{20}$ मीटरमितम् इत्यनेन रूपेण लेखितुं शक्नुमः। किम् अधुना भवन्तः 40,000,000,000 इत्येतां सङ्ख्याम् अपि अनेन एव रूपेण व्यक्तीकर्तुं शक्नुवन्ति ? अस्यां सङ्ख्यायां शून्यानि गणयन्तु तानि च 10 इति सन्ति।

अतः $40,000,000,000 = 4.0 \times 10^{10}$

पृथ्व्याः द्रव्यमानम् = 5,976,000,000,000,000,000,000,000 किलोग्रामः

$= 5.976 \times 10^{24}$ किलोग्रामपरिमितम् अस्ति।

किं भवन्तः अस्य तथ्यस्य समर्थनं कुर्वन्ति यत् पठन-अधिगमन-तुलनादृष्ट्या मानकरूपेण लिखिता इयं सङ्ख्या तस्याः पञ्चविंशत्यङ्कात्मक-सङ्ख्यायाः अपेक्षया अतीव सरला सुगमा च अस्ति ?

अधुना अरूणग्रहस्य द्रव्यमानम् = 86,800,000,000,000,000,000,000,000 किलोग्रामपरिमितम्

$= 8.68 \times 10^{25}$ किलोग्रामपरिमितम् अस्ति।

उपर्युक्तयोः व्यञ्जकयोः केवलमात्रम् 10 इत्यस्य घातानां तुलनां कृत्वा एव भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् सूर्यस्य द्रव्यमानं पृथ्व्याः द्रव्यमानाद् अधिकम् अस्ति।

शनिसूर्ययोः मध्ये विद्यमानः अन्तरालः 1,433,500,000,000 मीटरमितः अथवा 1.4335×10^{12} मीटरमितः अस्ति। सूर्यशन्योः मध्ये विद्यमानः अन्तरालः 1,439,000,000,000 मीटरमितः अथवा 1.439×10^{12} मीटरमितः अस्ति। सूर्यपृथ्व्योः मध्ये अन्तरालः 149, 600,000,000 मीटरमितः अथवा 1.496×10^{11} मीटरमितः वर्तते।

किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् एषु त्रिषु अन्तरालेषु कतमः अन्तरालः न्यूनतमः अस्ति ?

उदाहरणम् 13 अधोलिखितसङ्ख्याः मानकरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु :

(i) 5985.3 (ii) 65,950

(iii) 3,430,000 (iv) 70,040,000,000

समाधानम्

(i) $5985.3 = 5.9853 \times 1000 = 5.9853 \times 10^3$

(ii) $65,950 = 6.595 \times 10,000 = 6.595 \times 10^4$

(iii) $3,430,000 = 3.43 \times 1,000,000 = 3.43 \times 10^6$

(iv) $70,040,000,000 = 7.004 \times 10,000,000,000 = 7.004 \times 10^{10}$

अत्र अवधातव्यः अंशः एषः अस्ति यत् दशमलवबिन्दुतः वामभागीयाम् अङ्कसङ्ख्यां गणयित्वा तस्यां संख्यायाम् एकं व्यावकल्य यत् प्राप्यते तद् एव 10 इत्यस्य घाताङ्कः भवति यत् मानकरूपेण प्रयुज्यते। वयम् अस्य बिन्दोः कल्पनां सङ्ख्यायाः दक्षिणभागे कुर्मः। अत्र वामदिशं प्रति अङ्कानां सङ्ख्या 11 अस्ति। अतः मानकरूपेण व्यक्तीकर्तुम् 11 इत्यस्य घाताङ्कः $11 - 1 = 10$ इति अस्ति। अतः अस्य मानकरूपेण 10 इत्यस्य घाताङ्कः $4 - 1 = 3$ इति अस्ति।

प्रश्नावली 13.3

1. अधोलिखित-सङ्ख्याः प्रसारितरूपेण लिखन्तु

   279404, 3006194, 2806196, 120719, 20068

2. अधोलिखितेषु प्रसारितरूपेषु एकैकस्य कृते सङ्ख्यां ज्ञातुं प्रयासं कुर्वन्तु

   (a) $8 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

   (b) $4 \times 10^5 + 5 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10^0$

   (c) $3 \times 10^4 + 7 \times 10^2 + 5 \times 10^0$

   (d) $9 \times 10^5 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1$

3. अधोलिखित-सङ्ख्याः मानकरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु

   (i) 5,00,00,000 (ii) 70,00,000 (iii) 3,18,65,00,000

(iv) 3,90,878 (v) 39087.8 (vi) 3908.78

4. अधोलिखित-कथनेषु आगम्यमानाः सङ्ख्याः मानकरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु

(a) पृथ्वीचन्द्रमसोः मध्ये विद्यमानः अन्तरालः 384,000,000 मीटरमितः अस्ति।

(b) निर्वात-स्थाने प्रकाशस्य वेगः प्रतिविपलम् 300,000,000 मीटरमित्या अस्ति

(c) भूमेः व्यासः 1,27, 56,000 मीटरमितः अस्ति।

(d) सूर्यस्य व्यासः 1,400,000,000 मीटरमितः अस्ति।

(e) एकस्याम् आकाशगङ्गायां मध्यमानेन 100,000,000,000 तारकाः सन्ति।

(f) सौरमण्डलम् 12,000,000,000 वर्षपुरातनम् आकलितम्।

(g) आकाशागङ्गायाः केन्द्रात् सूर्यस्य अन्तरालः 300,000,000,000,000,000,000 मीटरमितः आकलितः अस्ति।

(h) 1.8 मितग्रामभारयुते कस्मिंश्चिद् जलबिन्दौ 60,230,000,000,000,000,000,000 मिताः अणवः भवन्ति।

(i) पृथ्व्याम् 1,353,000,000km^3 मितं सामुद्रिकजलम् अस्ति।

(j) 2001 तमे वर्षे मार्चमासे भारतस्य जनसङ्ख्या 1,027,000,000 आसीत्।

अस्माभिः का चर्चा कृता ?

1. बृहत्तमाः सङ्ख्याः पठनम्, अवगमनम्, तोलनम् अथ च सङ्क्रिया इत्येषां दृष्ट्या कठिनाः भवन्ति । वयम् इमाः बृहत्तम-सङ्ख्याः सरलीकर्तुं घाताङ्कं प्रयुज्य सङ्क्षिप्तरूपेण लिखामः।

2. कासाञ्चित् सङ्ख्यानां घाताङ्कीय-रूपाणि अधोलिखितानि सन्ति :

$10,000 = 10^4$ (एतत् 10 इत्यस्य उपरि घातः 4 इति रूपेण पठ्यते।)

$243 = 3^5$, $128 = 2^7$

अत्र 10, 3 एवञ्च 2 इति आधाराः सन्ति तथा च 4, 5 एवञ्च 7 इति क्रमशः एतेषां घाताङ्काः सन्ति। वयम् एतद् अपि वक्तुं शक्नुमः यत् 10 इत्यस्य चतुर्थः घातः 10,000 इति अस्ति , 3 इत्यस्य पञ्चमः घातः 243 इति अस्ति इत्यादि।

3. अधः केचन नियमाः लिखिताः सन्ति येषां घाताङ्कीयरूपेण सङ्ख्यानां लेखने आवश्यकता वर्तते - a तथा च b इति कयोश्चित् शून्येतर-पूर्णाङ्कयोः कृते अथ च m एवञ्च n इति पूर्णसङ्ख्ययोः कृते

(a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$, $m > n$

(c) $(a^m)^n = a^{mn}$ (d) $a^m \times b^m = (ab)^m$

(e) $a^m \div b^n = (a/b)^m$ (f) $a^0 = 1$

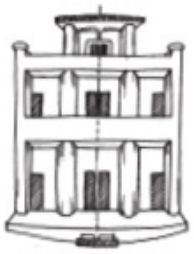
(g) $-1^{\text{समसङ्ख्या}} = 1$, $-1^{\text{विषमसङ्ख्या}} = -1$

अध्यायः 14

सममितिः

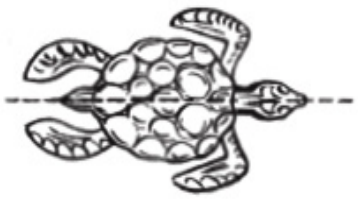
14.1 भूमिका

सममितिः एका महत्त्वपूर्णा ज्यामितीया अवधारणा अस्ति, या सामान्यतः प्रकृतौ प्रदर्शिता भवति तथा च प्रायेण अस्याः प्रयोगः क्रियाविधीनां सर्वेषु क्षेत्रेषु भवति । कलाकारः, उद्यमी, वस्त्राणाम् अथवा आभूषणानां प्रारूप-कर्ता, याननिर्माता, वास्तुशिल्पी तथा च नैके अन्ये सममिति-सङ्कल्पनायाः प्रयोगं कुर्वन्ति । भवद्भिः मधुमक्षिकाणां मधुकोशेषु (करण्डेषु), पुष्पेषु, वृक्षपर्णेषु, धार्मिकचिह्नेषु, आविकेषु तथा च करवस्त्रेषु इत्यादिषु स्थानेषु सममिति-प्रारूपाणि दृश्यन्ते ।



स्थापत्यम्

आभियान्त्रिकी

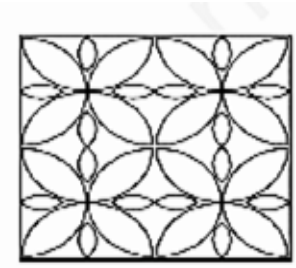


प्रकृतिः

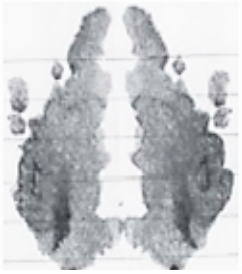
भवन्तः गतकक्ष्यायां रैखिकसममितेः विषये कञ्चन अनुभवं लब्धवन्तः सन्ति ।

यदि कस्याञ्चित् आकृत्याम् एका रेखा एतादृशी स्यात् यस्याः अनुदिशं तस्याम् आकृत्यां वक्रीकृतायां सत्याम् आकृत्याः उभौ भागौ परस्परं सम्पातिनौ भवेतां तदा साः आकृतिः रैखिक-सममितिः भवति ।

भवन्तः इमाः अवधारणाः स्मर्तुम् अर्हन्ति । भवतां साहाय्यार्थम् अत्र केचन क्रियाविधयः दीयमानाः सन्ति ।



सममितिं दर्शयमाणाम् एकां चित्रपञ्जिकां निर्मान्तु



कानिचन वर्णयुतानि आकर्षकाणि सममितेः मषी-पिशाचचिह्नानि निर्मान्तु

कानिचन कर्गदकर्तितानि सममिति-प्रारूपाणि निर्मान्तु

एकत्रीकृतेषु प्रारूपेषु सममित-रेखाणां परिज्ञानस्य आनन्दं गृह्णन्तु ।

आयान्तु इदानीं सममितीनां विषये स्वीयाः अवधारणाः इतोऽपि दृढीकुर्म । अधोलिखितानाम् आकृतीनां विषये अध्ययनं कुर्वन्तु यासु सममित-रेखाः बिन्द्वङ्कित-रेखाभिः अङ्किताः सन्ति । [आकृतिः 14.1 (i) - (iv)]

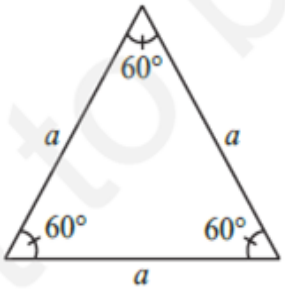
आकृतिः 14.1

14.2 समबहुभुजानां कृते सममितरेखाः

भवन्तः जानन्ति यद् एकं बहुभुजम् एका एतादृशी पिहितमुखाकृतिः अस्ति या अनेकैः रेखाखण्डैः निर्मिता भवति । एकं त्रिभुजं न्यूनतमैः रेखाखण्डैः निर्मितं बहुभुजम् अस्ति । (किं भवन्तः एतेभ्यः रेखाखण्डेभ्यः अपि न्यूनरेखाखण्डयुतं किमपि बहुभुजं निर्मातुं शक्नुवन्ति ? अस्मिन् विषये विचारयन्तु ।)

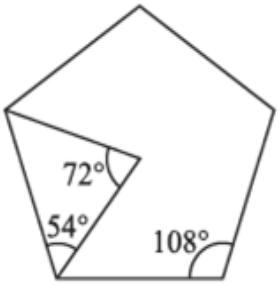
यदि कस्यचित् त्रिभुजस्य सर्वासां भुजानां दैर्घ्यं समानं तथा च सर्वेषां कोणानां मापः समानः भवेत् तदा तद् बहुभुजं समबहुभुजम् इति कथ्यते । अनेन प्रकारेण किमपि समबाहुत्रिभुजं त्रिभुजायुतम् एकं समबहुभुजं भवति । किं भवन्तः चतुर्भुजवतः कस्यचित् समबहुभुजस्य नाम वक्तुं शक्नुवन्ति ?

किमपि समबाहुत्रिभुजम् एकं समबहुभुजम् अस्ति यतो हि अस्य प्रत्येकं भुजायाः दैर्घ्यं समानं भवति तथा च अस्य प्रत्येकं कोणस्य मापः 60°मितः भवति (आकृतिः 14.2) ।



आकृतिः 14.2

आकृतिः 14.3

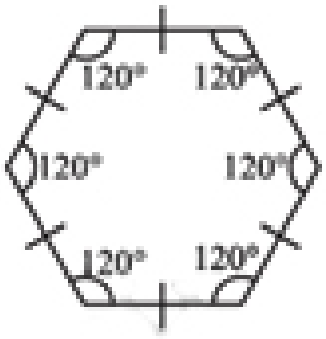


आकृतिः 14.4

वर्गः अपि एकं समबहुभुजम् अस्ति यतो हि अस्य सर्वाः भुजाः समानाः भवन्ति अथ च अस्य प्रत्येकं कोणः एकः समकोणः (अर्थात् 90°) भवति । वर्गस्य विकर्णौ परस्परं समकोणे मिथः समद्विभाजितौ भवतः (आकृतिः 14.3) ।

यदि किमपि पञ्चभुजम् एकं समबहुभुजम् अस्ति तदा स्वाभाविकम् अस्ति यत् अस्य भुजाः अपि समानदीर्घाः कोणाः च समानमापाः स्युः । भवन्तः अग्रे पठिष्यन्ति यद् अस्य प्रत्येकं कोणस्य मापः 108°मितः इति भवति (आकृतिः 14.4) ।

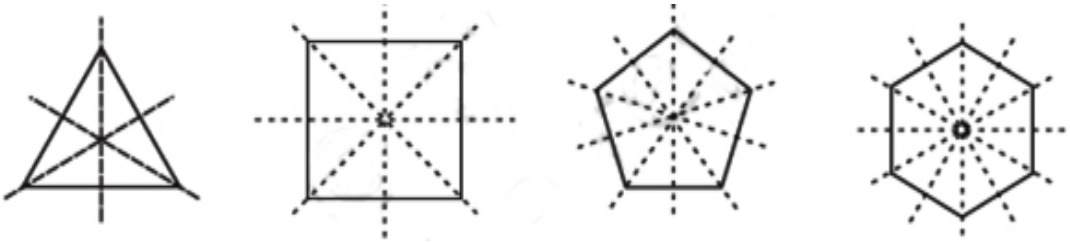
कस्यचित् समषड्भुजस्य सर्वाः भुजाः समानाः भवन्ति तथा च अस्य प्रत्येकं कोणस्य मापः 120°मितः भवति । अस्याः आकृत्याः विषये भवन्तः इतोऽपि अधिकम् अनन्तरं पठिष्यन्ति (आकृतिः 14.5) ।



आकृतिः 14.5

समबहुभुजाः सममिताकृतयः भवन्ति अत एव आसां सममितरेखाः अतीव रूचिकराः भवन्ति । प्रत्येकं समबहुभुजस्य तावत्यः एव सममितरेखाः भवन्ति यावत्यः तस्य भुजाः भवन्ति [आकृतिः 14.6 (i) - (iv)]।

तिस्रः सममितरेखाः चतस्रः सममितरेखाः पञ्च सममितरेखाः षड् सममितरेखाः

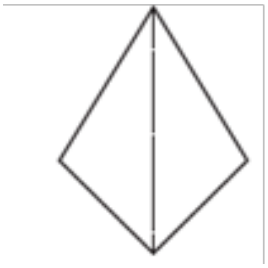


समबाहुत्रिभुजम् (i) वर्गः (ii) समपञ्चभुजम् (iii) समषड्भुजम् (iv)

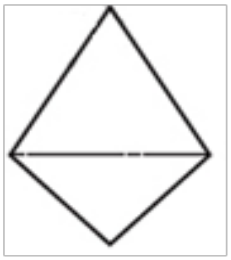
आकृतिः 14.6

सम्भवतः भवन्तः कर्गदवक्रि-क्रियाविधिभिः अस्य अन्वेषणं कर्तुम् एषिष्यन्ति । चिन्ता नास्ति अग्रे सरन्तु । रैखिक-सममितेः अवधारणायाः सम्बन्धः दर्पण-परावर्तनेन सह निकट-सम्बन्धः अस्ति । कस्मिंश्चिद् आकारे रैखिक-सममितिः तदा भवति यदा तस्य अर्धः भागः अपरस्य अर्धभागस्य दर्पण-प्रतिबिम्बः स्यात् (आकृतिः 14.7) । अनेन प्रकारेण काचित् दर्पणरेखा काञ्चित् सममितरेखां द्रष्टुं ज्ञातुं वा अस्माकं साहाय्यं करोति। (आकृतिः 14.8)।

आकृतिः 14.7



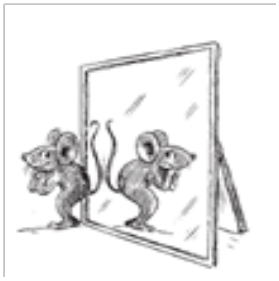
किं बिन्दुभिः अङ्किता रेखा दर्पणरेखा अस्ति ? आम् ।



किं बिन्दुभिः अङ्किता रेखा दर्पणरेखा अस्ति ? न ।

आकृतिः 14.8

अत्र आकारौ तु समानौ स्तः परन्तु दिशा विपरीता अस्ति ।

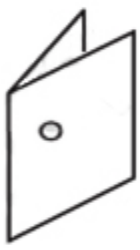


आकृतिः 14.9

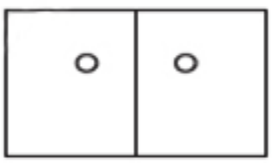
दर्पण-परावर्तनेन सह कार्यकरणसमये एतद् अवधातव्यं भवेत् यद् कस्याश्चित् आकृतेः अभिमुखेषु दक्षिण-वाम- परिवर्तनं जायते (आकृतिः 14.9)।

इमां छिद्रकर्त्रीं क्रीडां क्रीडत !

कमपि कर्गदं भागद्वये वक्रीकुर्वन्तु



एकं छिद्रं कुर्वन्तु



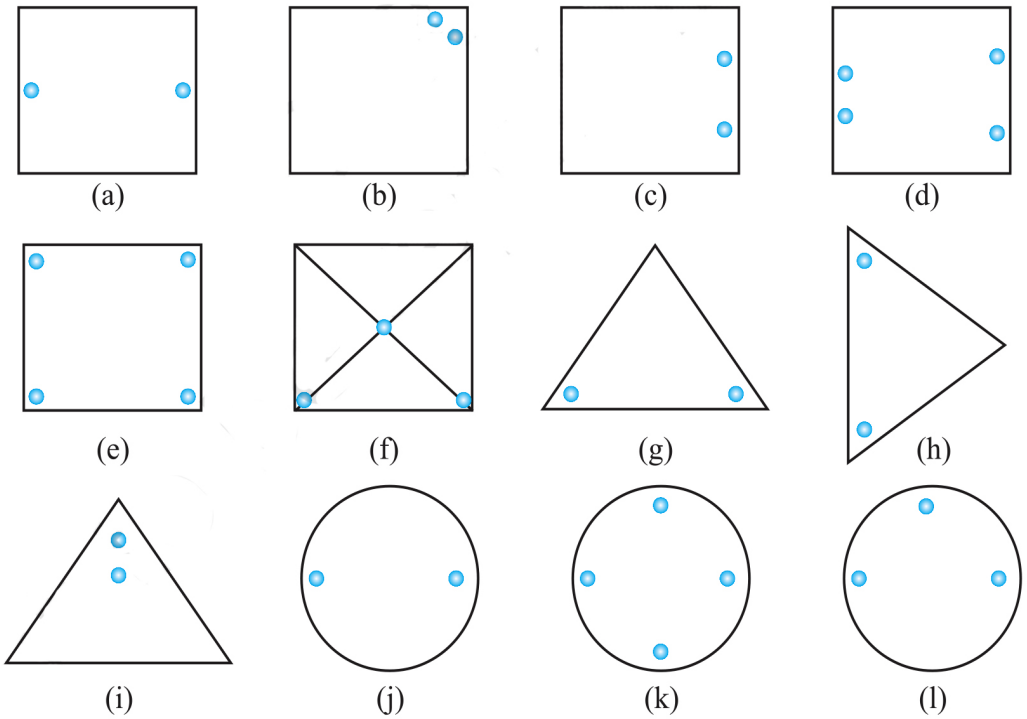
वक्रचिह्नस्य अनुदिशं छिद्रद्वयम्

आकृतिः 14.10

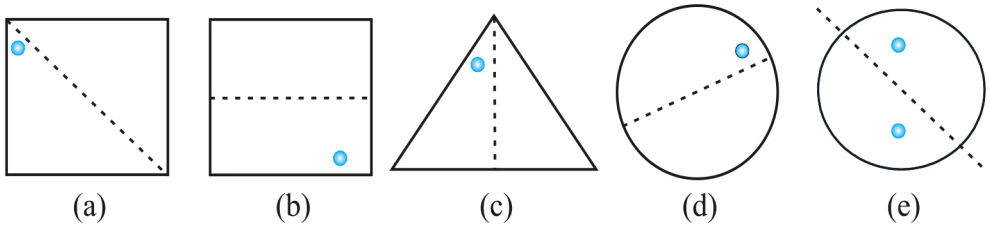
वलयचिह्नम् एका सममितरेखा (अथवा अक्षः) अस्ति । वक्रीभूते कर्गदे विभिन्न-स्थानेषु निर्मित-छिद्राणां तथा च सङ्गत-सममितरेखाणाम् अध्ययनं कुर्वन्तु (आकृतिः 14.10) ।

प्रश्नावली 14.1

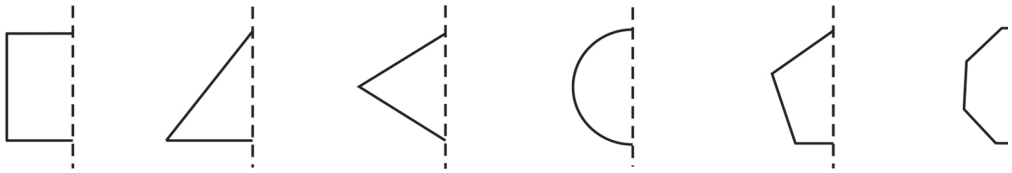
1. अधोलिखितानां छिद्रीकृतीनाम् आकृतीनां प्रतिलिपीः निर्माय (आलिख्य) तासु एकैकस्याः सममितरेखां ज्ञातुं प्रयासं कुर्वन्तु :



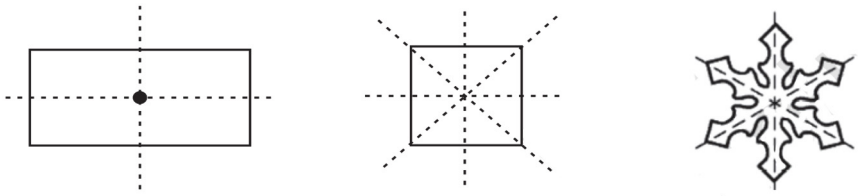
2. अधः सममितरेखाः दत्ताः सन्ति। अन्यस्य छिद्रस्य ज्ञानं कुरूत।



3. अधः लिखितासु आकृतिषु दर्पणरेखा (अर्थात् सममितरेखा) बिन्द्वङ्कित-रेखारूपेण दत्ता अस्ति। बिन्द्वङ्कित-रेखायां प्रत्येकम् आकृतेः परावर्तनं कृत्वा प्रत्येकम् आकृतिं पूर्णीकुर्वन्तु। (भवन्तः बिन्द्वङ्कित-रेखायाः अनुदिशम् एकं दर्पणं स्थापयितुम् अर्हन्ति पुनश्च प्रतिबिम्बाय दर्पणे द्रष्टुं शक्नुवन्ति।) किं भवन्तः पूर्णीकृतायाः आकृतेः नाम स्मरन्ति ?

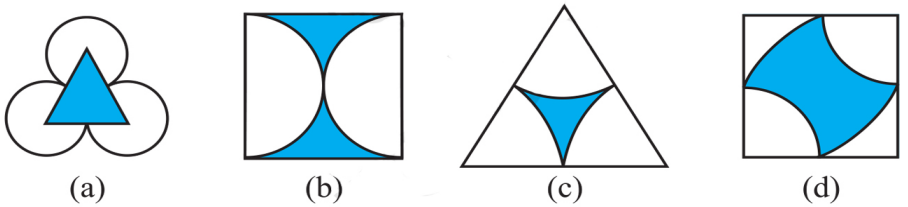


4. अधोलिखिताकृतीनाम् एकाधिकाः सममितरेखाः सन्ति। एतादृशीनाम् आकृतीनां कृते कथ्यते यत् एतासाम् अनेकाः सममितरेखाः सन्ति।

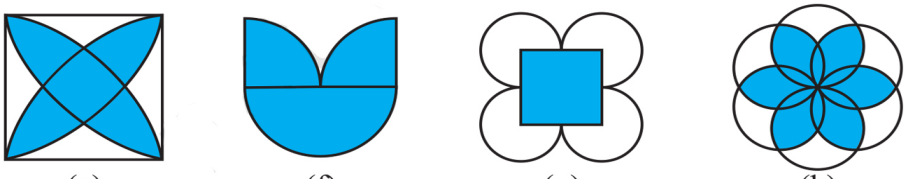


(a) (b) (c)

अधोलिखिताकृतिषु प्रत्येकस्यां विविध-सममितरेखाणाम् (यदि स्यात् तदा) परिचयनं कुरूत :

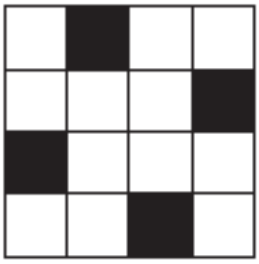


(a) (b) (c) (d)

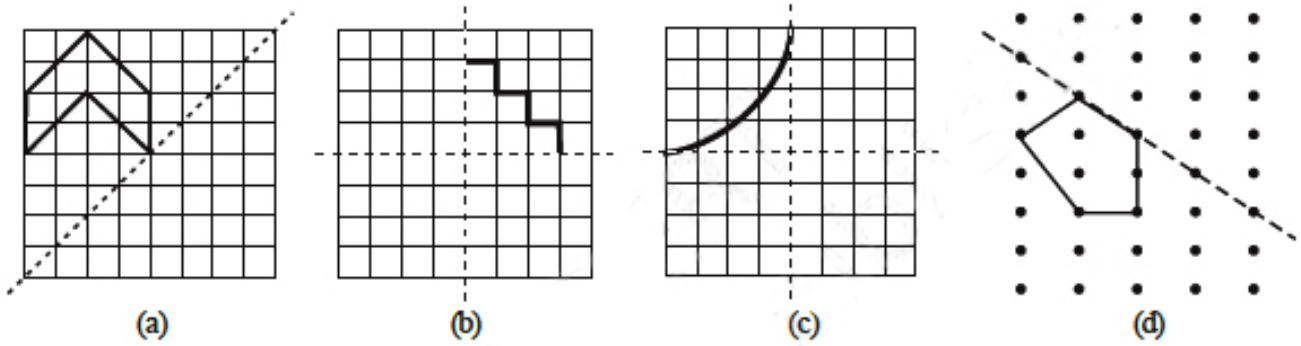


(e) (f) (g) (h)

5. अत्र प्रदत्तायाः आकृतेः प्रतिलिपिं निर्मान्तु।
कस्यचित् एकस्य विकर्णस्य सममितरेखाः स्वीकुर्वन्तु तथा च कांश्चन वर्गान् तथा छायाङ्कितान् कुर्वन्तु यत् इयम् आकृतिः अस्य विकर्णस्य अनुदिशं सममिता भवेत्। किम् एतत् कर्तुम् एकाधिकाः विधयः सन्ति ? किम् एषा आकृतिः द्वयोः विकर्णयोः अनुदिशं सममिता भविष्यति ?



6. अधोलिखितारेखाणां प्रतिलिपिं कुर्वन्तु तथा च प्रत्येकम् आधारं तथा च पूर्णं कुर्वन्तु येन सः आकारः दर्पणरेखायाः अनुदिशं सममितः स्यात् :



(a) (b) (c) (d)

7. अधोलिखिताकृतीनां कृते सममित-रेखाणां सङ्ख्याः ज्ञापयन्तु :

(a) एकं समबाहुत्रिभुजम् (b) एकं समद्विबाहुत्रिभुजम् (c) एकं विषमबाहुत्रिभुजम्
(d) एकः वर्गः (e) एकः आयतः (f) एकं समचतुर्भुजम्
(g) एकं समान्तर-चतुर्भुजम् (h) एकं चतुर्भुजम् (i) एकं समषड्भुजम्
(j) एकं वृत्तम्

8. आङ्ग्लवर्णमालायाः केषु वर्णेषु अधोलिखितस्य अनुदिशं परावर्तन-सममितिः (दर्पण-परावर्तनेन सम्बधिता सममितिः) अस्ति -

(a) एकः ऊर्ध्वाधरः दर्पणः (b) एकः क्षैतिज दर्पणः (c) उभौ ऊर्ध्वाधर-क्षैतिज-दर्पणौ

9. एतादृशानाम् आकाराणाम् त्रीणि उदाहरणानि यच्छन्तु येषु काचिद् अपि सममितरेखा न स्यात् ।

10. भवन्तः अधोलिखिताकृतीनां सममित-रेखाणां कृते अन्यत् किं नाम दातुं शक्नुवन्ति ?

(a) एकं समद्विबाहुत्रिभुजम् ? (b) एकं वृत्तम् ?

14.3 घूर्णनसममितिः

यदा घटिकायाः सूचिकाः घूर्णन्ति तदा भवन्तः किं कथयन्ति ? भवन्तः कथयन्ति यद् इमाः घूर्णनं कुर्वत्यः सन्ति ।

घटिकायाः सूचिकाः एकस्यामेव दिशायां घूर्णन्ति । एतद् घूर्णनम् एकं बिन्दुं परितः भवति यश्च (बिन्दुः) घटिकायाः केन्द्रम् अस्ति ।

घटिकायाः सूचिकाः यस्यां दिशायां घूर्णन्ति तद् घूर्णनं दक्षिणावर्त-घूर्णनम् इति उच्यते अन्यथा घूर्णनं वामावर्तम् इति कथ्यते ।

छदेः व्यनक-पत्राणां घूर्णन-विषये भवन्तः किं वक्तुम् अर्हन्ति ? किम् इमानि दक्षिणावर्त-दिशायां घूर्णन्ति अथवा वामावर्त-दिशायां घूर्णन्ति ? अथवा उभयोः दिशयोः घूर्णन्ति ?

यदि भवन्तः द्विचक्रिकायाः एकं चक्रं भ्रामयन्ति तदा तद् घूर्णनं करोति । एतद् उभयोः एव दिशयोः अर्थाद् दक्षिणावर्तदिशायाम् अथ च वामावर्त-दिशायां घूर्णनं कर्तुम् अर्हति (i) दक्षिणावर्त-वामावर्त-घूर्णनयोः प्रत्येकार्थं त्रीणि उदाहरणानि यच्छन्तु ।

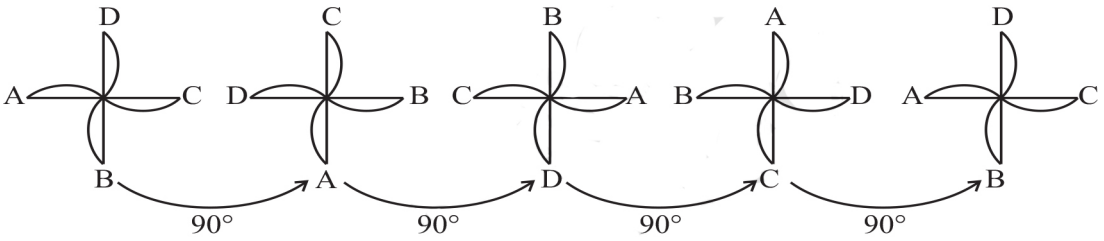
यदि किमपि वस्तु घूर्णति तर्हि तस्य आकारे मापे च किमपि परिवर्तनं न जायते । घूर्णनं नाम कस्यचिद् वस्तुनः एकं निश्चितबिन्दुं परितः भ्रमणम् इति अस्ति । एषः निश्चितबिन्दुः घूर्णन-केन्द्रम् इति उच्यते । घटिकासूचिकानां घूर्णनकेन्द्रं किम् अस्ति ? अस्मिन् विषये विचारं कुर्वन्तु । घूर्णनावधौ घूर्णितः कोणः घूर्णन-कोणः इति उच्यते ।

भवन्तः जानन्ति यत् एकस्मिन् वृत्ते 360°मितं घूर्णनं भवति । (i) एकस्य अर्धावर्तस्य (ii) चतुर्थांशावर्तस्य च घूर्णनकोणानां मापः क्रमशः कः अस्ति ? कस्यचित् अर्धावर्तस्य अर्थः 180°मितं घूर्णनम् अस्ति अथ च चतुर्थांशावर्तस्य अर्थः नवतिः 90°मितं घूर्णनम् अस्ति ।

यदा द्वादशवादनं भवति तदा घटिकायाः उभे एव सूचिके समानस्थाने तिष्ठतः । त्रिवादनं यावत् तदा निमेष-सूचिका आवृति-त्रयं पूर्णं करोति परन्तु होरासूचिका केवलम् 1/4 आवृत्तिम् एव करोति । तयोः षड्वादने का स्थितिः भवति इति विषये भवतां कः विचारः अस्ति ?

किं भवद्भिः कदाचित् कर्गदस्य वातपेषणी निर्मिता ? आकृतौ दर्शिता कर्गदस्य वातपेषणी सममिता दृश्यते । (आकृतिः 14.11) परन्तु भवद्भिः अस्याः कापि सममितरेखा न प्राप्यते । यदि एतां केनापि प्रकारेण वक्रीकुर्मः तदापि उभौ अर्धभागौ सम्पातिनौ न भविष्यतः । यदि भवन्तः एतां स्थिरबिन्दुम् (केन्द्रम्)परितः 90°मिते कोणे भ्रामयन्ति तदा भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यद् वातपेषण्याः आकारः 14.11 इति आकृत्यनुसारं पूर्ववद् एव अस्ति । वयं कथयामः यत् वातपेषण्याम् एका घूर्णन-सममितिः अस्ति ।

आकृतिः 14.11

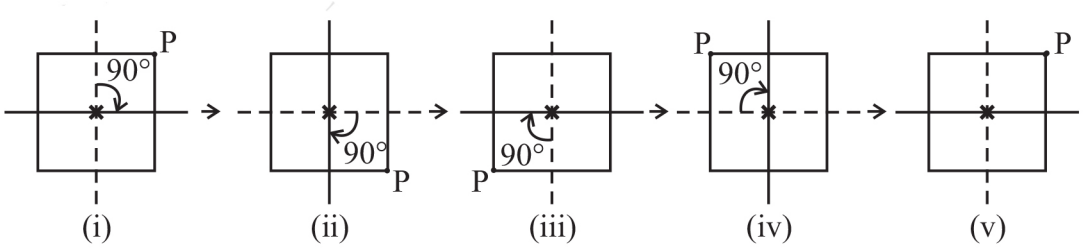


आकृतिः 14.12

एकस्यां पूर्णावृत्तौ एतादृश्यः चतस्रः स्थितयः भवन्ति (90°,80°, 270° तथा च 360° इति कोणेषु भ्रामयामः चेत् अथवा घूर्णने सति) यदा वातपेषणी पूर्ववद् दृश्यते (आकृतिः 14.12)। अनेन कारणेन वयं कथयामः यद् वातपेषण्यां चतुर्थ-क्रमस्य घूर्णन-सममितिः अस्ति।

घूर्णनसममितेःएकम् अन्यम् उदाहरणं पश्यन्तु। कस्मिंश्चिद् वर्गे विचारं कुर्वन्तु यस्य कोणः (अथवा शीर्षम्) P इति अस्ति (आकृतिः 14.13)।

आगच्छन्तु अस्य वर्गस्य केन्द्रम् x द्वारा अङ्कीकृत्य एतं बिन्दुं परितः इमं वर्गं चतुर्थांशावृत्त्या भ्रामयन्तु।



आकृतिः 14.13

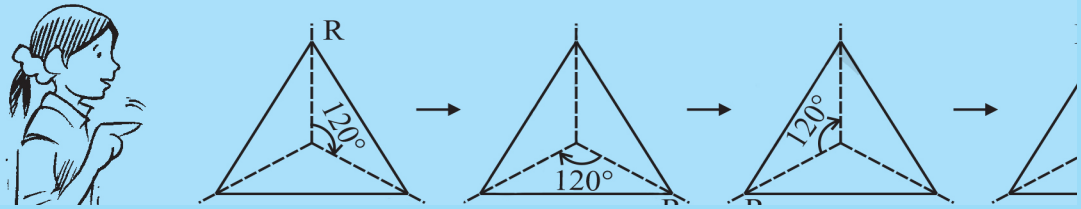
14.13 (i) इति आकृतौ अस्य प्रारम्भिकी स्थितिः अस्ति। केन्द्रं परितः 90°मिते कोणे भ्रामिते सति 14.13 (ii) इति आकृतिः प्राप्यते। इदानीम् P इति बिन्दोः स्थितिं पश्यन्तु। वर्गं पुनः 90°मितेन कोणेन भ्रामयन्तु। भवद्भिः 14.13 (iii) इति आकृतिः प्राप्यते। अनेन प्रकारेण यदा भवन्तः एतद् वर्गं चतुरः ¼ भ्रमणानि भ्रामयन्ति तदा अयं वर्गः स्वीयां प्रारम्भिक-स्थितिं प्राप्नोति। अधुना इयम् 14.13 (i) इति आकृतिः इव दृश्यते। एतत् P द्वारा गृहीताभिः विभिन्नाभिः स्थितिभिः द्रष्टुं शक्यते।

अनेन प्रकारेण कस्मिंश्चिद् वर्गे तत्केन्द्रं परितः चतुर्थ-क्रमस्य घूर्णन-सममितिः भवति। अवधानं कुर्वन्तु यत् अस्यां स्थितौ

(i) घूर्णनस्य केन्द्रं वर्गस्य केन्द्रम् अस्ति।
(ii) घूर्णनस्य कोणः 90° मितः अस्ति।
(iii) घूर्णनस्य दिशा दक्षिणावर्ता अस्ति।
(iv) घूर्णन-सममितेः क्रमः चतुर्थः अस्ति।

प्रयासं कुर्वन्तु

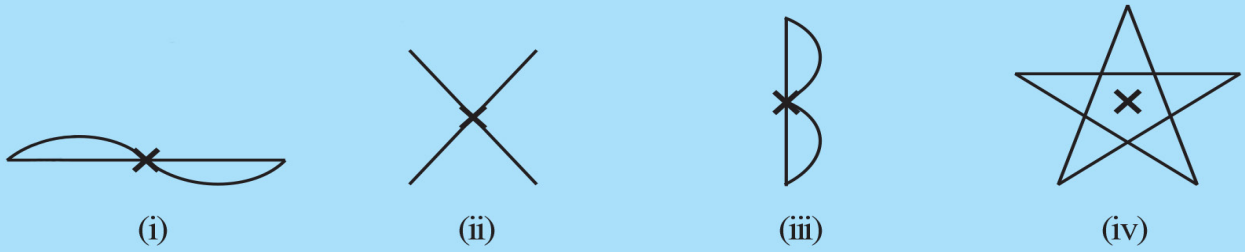
1. (a) किं भवन्तः कस्यचित् समबाहुत्रिभुजस्य कृते घूर्णन-सममितेः क्रमं ज्ञापयितुं शक्नुवन्ति (आकृतिः 14.14) ?



आकृतिः 14.14

(b) यदा उपर्युक्तं त्रिभुजं तत्केन्द्रं परितः 120° मिते कोणे भ्राम्यते तदा कतिषु स्थितिषु त्रिभुजं पूर्ववद् दृश्यते ?

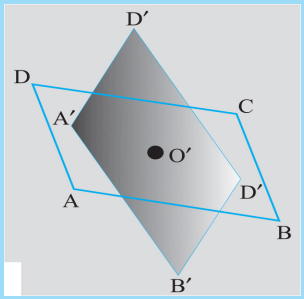
2. अधोलिखितेषु केषु आकारेषु (आकृतिः 14.15) अङ्कित-बिन्दुं परितः घूर्णन-सममितिः अस्ति ?



आकृतिः 14.15

एतान् कुर्वन्तु

द्वे सर्वासम-समान्तर-चतुर्भुजे आलिखन्तु। एकम् ABCD इति समान्तरं चतुर्भुजम् कस्मिंश्चित् कर्गदे तथा च द्वितीयम् A' B' C' D' इति समान्तर-चतुर्भुजम् कस्मिंश्चिद् पारदर्शिकर्गदे आलिखन्तु। तयोः विकर्णयोः प्रतिच्छेदबिन्दून् क्रमशः O एवञ्च O' इत्यनेन अङ्कयन्तु (आकृतिः 14.16)।



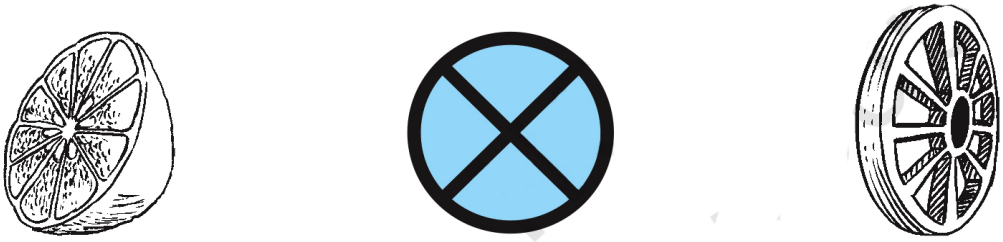
आकृतिः 14.16

समान्तरचतुर्भुजे तथा स्थापयन्तु यत् A' इति शीर्षम् A इति शीर्षे, B' इति शीर्षम् B इति शीर्षे स्यात्। एषु आकारेषु अधुना भवन्तः O इति बिन्दौ एकं धातुकण्टकं योजयन्तु। अधुना पारदर्शिककर्गदं दक्षिणावर्त-दिशायां परिभ्रामयन्तु। एकस्याम् आवृत्तौ पारदर्शि-कर्गदे निर्मितः आकारः कर्गद-निर्मिताकारेण सह कतिवारं सम्पाती भवति ? अस्मिन् घूर्णनसममितेः कः क्रमः अस्ति ?

सः बिन्दुः यत्र अस्माभिः धातुकण्टकम् (pin) योजितं तद् घूर्णनस्य केन्द्रम् अस्ति। अस्यां स्थितौ अयं विकर्णानां प्रतिच्छेदबिन्दुः अस्ति।

प्रत्येकस्मिन् वस्तुनि 1 इति क्रमस्य घूर्णन-सममितिः भवति यतो हि 360°मित-घूर्णनस्य पश्चात् (अर्थात् एकावृत्तेः अन्तरम्) तत् स्वीयां प्रारम्भिकीं स्थितिं प्राप्नोति। एतादृशीषु स्थितिषु अस्माकं रूचिः न भविष्यति। भवतां परिवेशे अनेके एतादृशाः आकाराः सन्ति येषु घूर्णन-सममितिः भवति (आकृतिः 14.17)।

उदाहरणार्थं यदा वयं कानिचित् फलानि कर्तयामः तदा तेषाम् अनुप्रस्थ-परिच्छेदाः आकार-दृष्ट्या तादृशाः भवन्ति येषु घूर्णन-सममितिः भवति। यदा भवन्तः एतान् द्रक्ष्यन्ति तदा भवन्तः विस्मिताः भविष्यन्ति (आकृतिः 14.17) (i)।



फलम् (i) मार्गचिह्नम् (ii) चक्रम् (iii)

आकृतिः 14.17

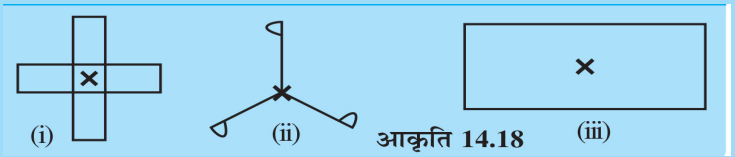
एतादृशानि बहूनि मार्गचिह्नानि सन्ति यानि घूर्णन-सममितिं प्रदर्शयन्ति। अग्रिमवारं यदा भवन्तः कस्मिंश्चित् व्यस्तमार्गे भ्रमितुं निर्गमिष्यन्ति तदा मार्गे एतादृशानि मार्गचिह्नानि परिचिन्वन्तु तेषां च घूर्णन-सममितेः क्रमम् अपि ज्ञातुं प्रयासं कुर्वन्तु [आकृतिः 14.17(ii)]।

घूर्णन-सममितेः केषाञ्चिद् अन्येषाम् उदाहरणानां विषये चिन्तनं कुर्वन्तु। प्रत्येकस्यां स्थितौ अधोलिखितानां विषये चर्चाम् अपि कुर्वन्तु आकृतिः -

(i) घूर्णन-केन्द्रम्
(ii) घूर्णनकोणः
(iii) घूर्णनं कस्यां दिशायाम् अभवत्
(iv) घूर्णन-सममितेः क्रमः

प्रयासं कुर्वन्तु

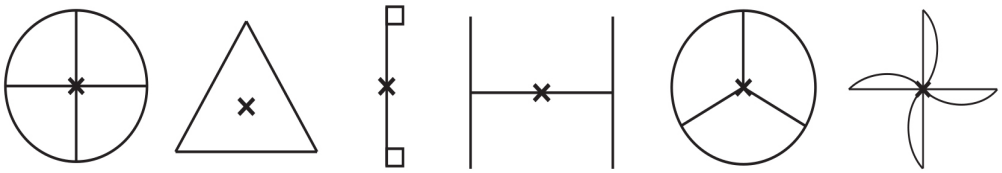
प्रदत्ताकृतीनां कृते x इति अङ्कितबिन्दुं परितः घूर्णनसमितेः क्रमं बोधयन्तु(आकृतिः 14.18)।



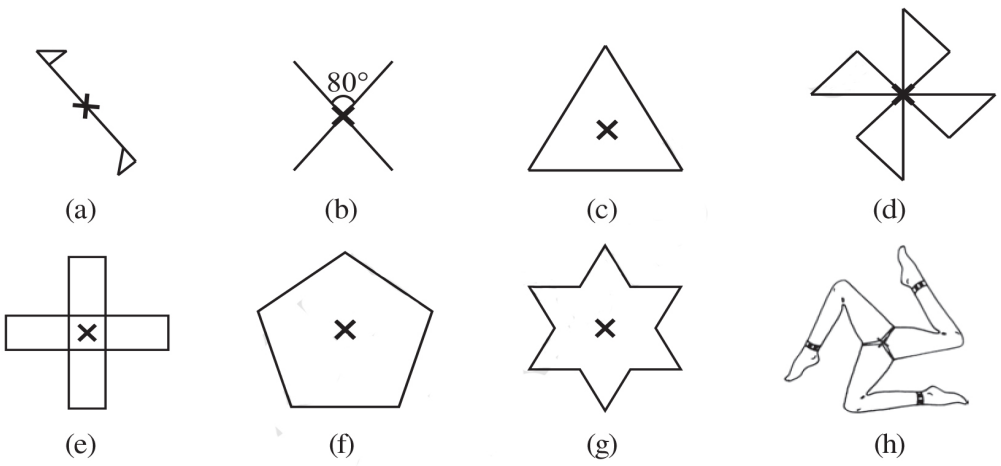
आकृति 14.18

प्रश्नावली 14.2

1. अधोलिखिताकृतिषु कासु आकृतिषु एकाधिक-क्रमा घूर्णन-सममितिः अस्ति :



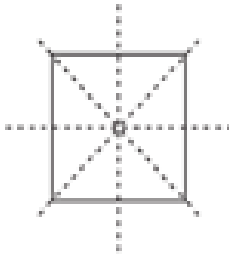
2. प्रत्येकम् आकृतेः घूर्णन-सममितेः क्रमं बोधयन्तु।

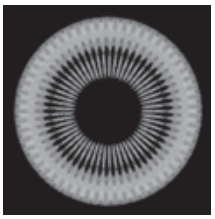


14.4 रैखिक-सममितिः अथ च घूर्णन-सममितिः

भवन्तः अधुना पर्यन्तम् अनेकान् आकारान् तेषां च सममितीः पश्यन्तः सन्ति। अधुना पर्यन्तं भवद्भिः एतत् अधिगतं स्याद् यत् केषुचिद् आकारेषु केवलं रैखिक-सममितिः एव भवति, केषुचिद् केवलं घूर्णन-सममितिः भवति अथ च केषुचिद् आकारेषु उभयविधा रैखिक-घूर्णन-सममितिः भवति।

उदाहरणार्थं कस्यचिद् वर्गस्य आकारं पश्यन्तु (आकृतिः 14.19)।


आकृतिः 14.19



अस्मिन् कति सममित-रेखाः सन्ति ?

किम् अस्मिन् काचिद् घूर्णनसममितिः अस्ति ?

यदि उत्तरम् 'आम्' इति अस्ति तर्हि घूर्णन-सममितेः क्रमः कः अस्ति ?

अस्मिन् विषये विचारं कुर्वन्तु।

किमपि वृत्तं सर्वाधिकपूर्णा सममिताकृतिः अस्ति यतो हि वृत्तं तदीय-केन्द्रं परितः कस्मिंश्चिदपि कोणे भ्रामयित्वा सा आकृतिः (वृत्तम्) एव प्राप्तुं शक्यते अर्थाद् अस्मिन् अपरिमितरूपेण अनेक-क्रमाणां घूर्णनसममितयः सन्ति तथा च सममेव अस्य अपरिमित-सममितरेखाः सन्ति। वृत्तस्य किमपि प्रतिरूपं पश्यन्तु। केन्द्रात् भूत्वा गम्यमाना प्रत्येकं रेखा (अर्थात् प्रत्येकं व्यासः) परावर्तन-सममितेः एका सममितरेखा अस्ति तथा च केन्द्रं परितः प्रत्येकं कोणस्य कृते अस्य एका घूर्णनसममितिः अस्ति।

एतान् कुर्वन्तु

आङ्ग्ल-वर्णमालायाः केषुचिद् वर्णेषु अद्भुताः आकर्षकाः च सममिति-संरचनाः सन्ति। केषु दीर्घवर्णेषु केवलम् एका एव सममितरेखा अस्ति (यथा E) ? केषु दीर्घवर्णेषु द्वितीय-क्रमस्य घूर्णन-समितिः अस्ति (यथा I) ?

उपर्युक्तविधिना विचारयन्तः भवन्तः अधोलिखित-तालिकां पूरयितुं समर्थाः भविष्यन्ति :

वर्णमालायाः वर्णः	रैखिक-सममितिः	सममितरेखाणां सङ्ख्या	घूर्णनसममितिः	घूर्णनसममितेः क्रमः
Z	न	0	आम्	2
S				
H			आम्	
O	आम्		आम्	
E	आम्			
N	आम्		आम्	
C				

प्रश्नावली 14.3

1. कयोश्चिद् द्वयोः आकृत्योः नाम बोधयन्तु ययोः रैखिकसममितिः तथा च प्रथम-क्रमाद् अधिका घूर्णनसममितिः इति उभे एव स्याताम्।
2. यत्र सम्भावना स्यात् तत्र अधोलिखितानाम् अभ्यासाकृतिम् आलिखन्तु -
   (i) एकं त्रिभुजं यस्मिन् रैखिकसममितिः अथ च प्रथम-क्रमाद् अधिका घूर्णनसममितिः इति उभे स्याताम्।
   (ii) एकं त्रिभुजं यस्मिन् केवलं रैखिकसममितिः तथा च प्रथम-क्रमाद् अधिका घूर्णनसममितिः न स्यात्।
   (iii) एकं चतुर्भुजं यस्मिन् प्रथम-क्रमाद् अधिका घूर्णनसममितिः स्यात् किन्तु रैखिकसममितिः न स्यात्।
   (iv) एकं चतुर्भुजं यस्मिन् केवलं रैखिकसममितिः स्यात् परन्तु प्रथम-क्रमाद् अधिका घूर्णनसममितिः न स्यात्।

3. यदि कस्याश्चिद् आकृतेः द्वे अथवा द्व्यधिकाः सममित-रेखाः स्युः तर्हि किम् एतद् आवश्यकम् अस्ति यत् तस्मिन् प्रथम-क्रमाद् अधिका घूर्णनसममितिः भविष्यति ?

4. रिक्त-स्थानानि पूरयन्तु :

आकारः	वर्गः	आयतः	समचतुर्भुजम्	समबाहुत्रिभुजम्	समषड्भुजम्	वृत्तम्	अर्धवृत्तम्
घूर्णनकेन्द्रम्							
घूर्णनसममितेः क्रमः							
घूर्णनकोणः							

5. एतादृशानां चतुर्भुजानां नामानि बोधयन्तु येषु रैखिकसममितिः तथा च प्रथम-क्रमाद् अधिका घूर्णनसममितिः इति उभे एव स्याताम् ।

6. यदि काञ्चिद् आकृतिं तदीय-केन्द्रं परितः 60°मिते कोणे भ्रामयामः तर्हि सा आकृतिः स्वीयप्रारम्भिक-स्थितिः इव दृश्यते । अस्याः आकृतेः कृते अन्ये के कोणाः भवितुम् अर्हन्ति ?

7. किम् अस्माभिः काचिद् एतादृशी प्रथम-क्रमाद् अधिका घूर्णन-सममितिः प्राप्तुं शक्यते यस्याः घूर्णनस्य कोणौ अधोलिखितौ स्याताम् ?

(i) 45° (ii) 17°?

अस्माभिः का चर्चा कृता ?

1. यदि कस्याञ्चित् आकृत्याम् एका रेखा एतादृशी स्यात् यस्याः अनुदिशं तस्याम् आकृत्यां वक्रीकृतायां सत्याम् आकृत्याः उभौ भागौ परस्परं सम्पातिनौ भवेतां तदा सा आकृतिः रैखिक-सममितिः भवति

2. समबहुभुजेषु समानभुजाः समानाः च कोणाः भवन्ति। तेषाम् अनेकाः अथवा तदधिकाः सममितरेखाः भवन्ति ।

3. प्रत्येकं समबहुभुजस्य तावत्यः एव सममितरेखाः भवन्ति यावत्यः तस्य भुजाः भवन्ति ।

समबहुभुजम्	समषड्भुजम्	समपञ्चभुजम्	वर्गः	समबाहुत्रिभुजम्
सममितरेखाणां सङ्ख्या	6	5	4	3

4. दर्पण-परावर्तनेन एतादृशी सममितिः प्राप्यते यस्यां वामदक्षिणस्थानाम् अभिमुखानाम् अवधानं करणीयं भवति ।

5. घूर्णने किमपि वस्तु एकं निश्चितबिन्दुं परितः परिभ्राम्यते। अयं बिन्दुः घूर्णनकेन्द्रम् इति उच्यते । यस्मिन् कोणे किमपि वस्तु भ्रमति सः घूर्णनकोणः इति कथ्यते । अर्धवृत्तस्य अथवा अर्धावृत्तेः अर्थः 180° मितं ... घूर्णनम् अस्ति अथ च चतुर्थांशावृत्तेः अर्थः 90°मितं घूर्णनम् अस्ति । घूर्णनं दक्षिणावर्तं वामावर्तम् उभयमेव भवितुं शक्नोति ।

6. यदि घूर्णनान्तरं वस्तु स्थित्यनुसारं पूर्ववद् दृश्यते तदा वयं कथयामः यत् तस्मिन् घूर्णन-सममितिः अस्ति ।

7. यदि एकस्यां पूर्णावृतौ (360°मिते) किमपि वस्तु यावद्-वारं स्थित्यनुसारं पूर्ववद् एव दृश्यते तदा सा सङ्ख्या तस्याः घूर्णनसममितेः क्रमः इति उच्यते । उदाहरणार्थं कस्यचिद् वर्गस्य घूर्णन-सममितिक्रमः 4 अस्ति तथा च कस्यचित् समबाहुत्रिभुजस्य घूर्णनसममितिक्रमः 3 अस्ति ।

8. केषुचिद् आकारेषु केवलम् एका एव सममिति-रेखा भवति यथा E वर्णः ; केषुचिद् घूर्णनसममितिः एव भवति, यथा S वर्णः तथा च केषुचिद् अन्येषु उभयविधा सममितिः भवति यथा H वर्णः । सममितेः अध्ययनम् एतदर्थं महत्त्वपूर्णम् अस्ति यतो हि अस्याः प्रयोगः अधिकांशतः अस्माकं दैनन्दिनव्यवहारे भवति अथ च अस्माद् अपि अधिकं महत्त्वम् अनेन कारेण अस्ति यद् इयम् अस्माकं कृते सुन्दरम् आकर्षकञ्च प्रारूपं प्रदातुं शक्नोति ।

सान्द्राकाराणां चित्रणम्

अध्यायः 15

15.1 भूमिका तलाकृतयः अथ च सान्द्राकाराः

अस्मिन् अध्याये भवन्तः एतावत्-पर्यन्तम् अवलोकिताः आकृतीः तद्-विमारूपेण (आयामरूपेण) वर्गीकरिष्यन्ति।

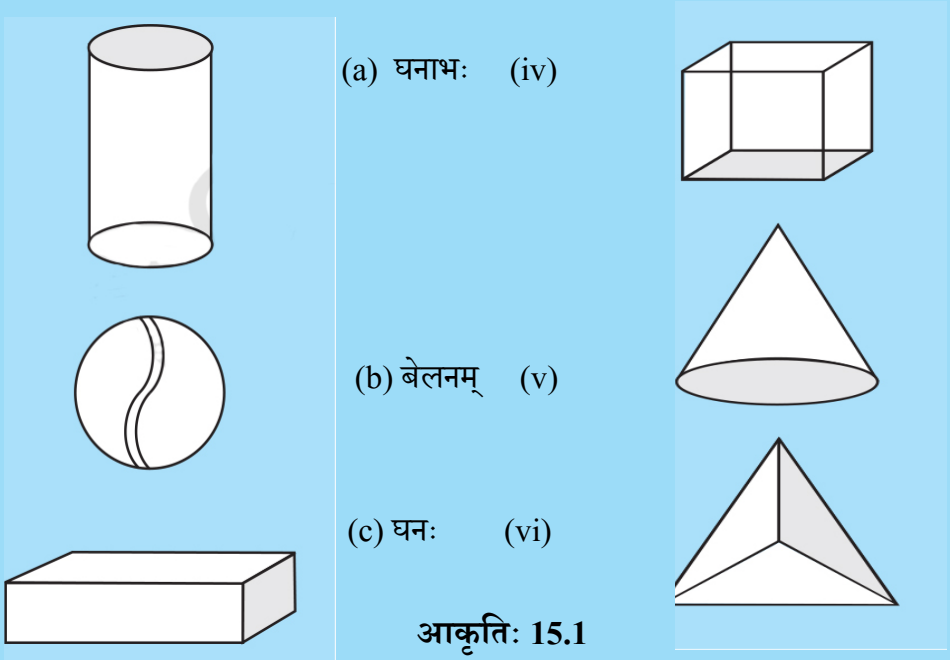
स्वीये दैनिक-जीवने वयं निजपरिवेशे पुस्तकम्, कन्दुकम्, पयोहिमशङ्कुः इत्यादीनि विभिन्नाकाराणि वस्तूनि पश्यामः। अधिकांशतः एतेषु सर्वेषु वस्तुषु एकं तथ्यं सर्वनिष्ठम् अस्ति तच्चास्ति यद् एषु प्रत्येकं वस्तुनः किञ्चिद् दैर्घ्यम्, विस्तृतिः, औन्नत्यम् अथवा गहनता भवति।

अनेन कारणेन एतानि सर्वाणि स्थानं परिवेष्टयन्ति तथा च एतेषां तिस्रः विमाः भवन्ति। अतः इमे आकाराः त्रिविमीयाकाराः इति कथ्यन्ते।

किं भवन्तः गतकक्ष्यासु अवलोकितानां केषाञ्चन त्रिविमीयाकाराणां (सान्द्राकाराणाम्) विषये स्मरन्ति ?

प्रयासं कुर्वन्तु

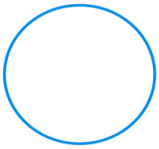
एतान् आकारान् तदाय-नामभिः सह मेलयन्तु :

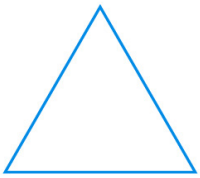


आकृतिः 15.1

उपर्युक्तेषु आकारेषु प्रत्येकम् आकारस्य इव केषाञ्चिद् वस्तूनां परिचयनं कर्तुं प्रयासं कुर्वन्तु।
अनेन तर्केण वयं वक्तुं शक्नुमः यत् कस्मिंश्चिद् कर्गदे आलिख्यमानाः आकृतयः (यासां दीर्घता तथा च विस्तृतिः भवति) द्विविमीयाः वक्तव्याः। वयं द्विविमाः काश्चन आकृतीः गतकक्ष्यासु अपि दृष्टवन्तः स्मः। द्विविमीयाकृतीनां नामाभिः सह मेलनं कुरूत (आकृतिः15.2) -

(i) (a) वृत्तम्

(ii)  (b) आयातः

(iii)  (c) वर्गः

(iv) (d) चतुर्भुजम्

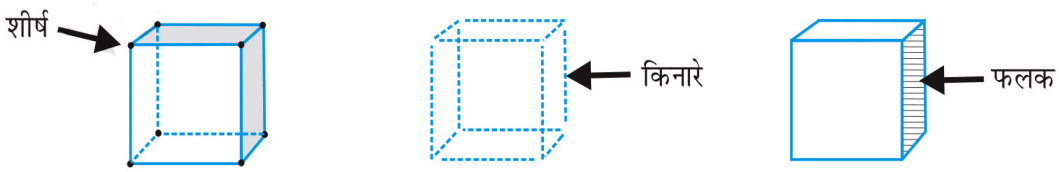
(v) (e) त्रिभुजम्

आकृतिः 15.2

टिप्पणी - सङ्क्षेपेण वयं द्विविमीयम् '2-D' इति अथ च त्रिविमीयम् '3-D' इति लेखितुं शक्नुमः।

15.2 फलकानि उपान्ताः अथ च शीर्षाणि

किं भवन्तः पूर्वपठितानां सान्द्राकाराणाम् उपान्त-फलक-शीर्षाणां विषये किमपि स्मरन्ति ? कस्यचिद् घनस्य कृते एतद् दर्शितम् अस्ति :



(i) (ii) (iii)

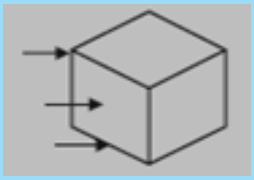
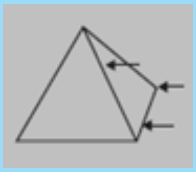
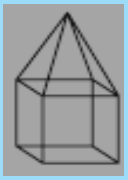
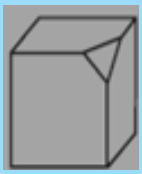
आकृतिः 15.3

घनस्य अष्टौ कोणाः तस्य शीर्षाणि सन्ति। घनाकारस्य निर्मातारः द्वादश रेखाखण्डाः तस्य पार्श्वाः अथवा उपान्ताः इति कथ्यन्ते। षट् समतलपृष्ठानि (यानि घनस्य त्वग् इति सन्ति) तस्य फलकानि इति कथ्यन्ते।

एतान् कुर्वन्तु

अधोलिखित-तालिकां पूरयन्तु

तालिका 15.1

	शीर्षम् फलकम् उपान्तः 	 फलकम् शीर्षम् उपान्तः		
फलकानि	6	4		
उपान्ताः	12			
शीर्षाणि	8	4		

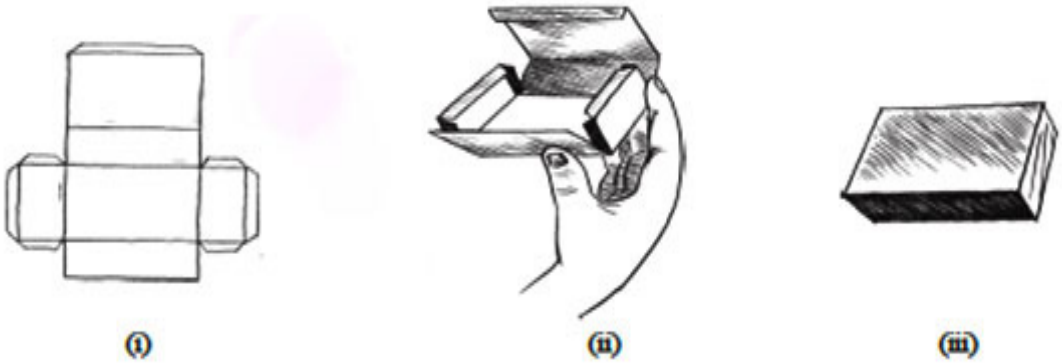
किं भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यद् द्विविमीयाकृतीनां रूपेण त्रिविमीयाकाराणां फलकानि परिज्ञातुं शक्यन्ते ? उदाहराणार्थं कस्यचिद् बेलनस्य द्वे फलके एतादृशे स्तः ये वृत्ते स्तः तथा च दर्शितस्य पिरामिडस्य फलकानि त्रिभुजानि सन्ति।

अधुना वयम् एतद् द्रष्टुं प्रयतिष्यामहे यत् केन प्रकारेण केचन त्रिविमीयाकाराः (3-D) द्विविमीयाकृतीनाम् (2-D) (अर्थात् कर्गदे) चित्रीयरूपेण निरूपयितुं शक्यन्ते।

एतत् कर्तुं वयं त्रिविमीय-वस्तुभिः सह निकटतमरूपेण परिचिताः भवितुम् एषिष्यामः। आयान्तु इमानि वस्तूनि तदीयैः जालैः निर्मातुं प्रयासं कुर्मः।

15.3 3-D आकारं निर्मातुम् आनायः / जालकम् (नेट)

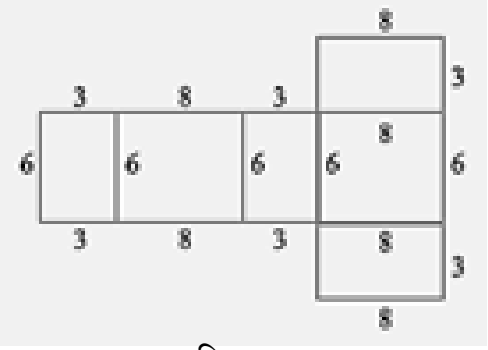
स्थूलकर्गदस्य कञ्चिद्संवृतपुटं स्वीकुर्वन्तु। एतत् केषाञ्चिद् उपान्तभागानाम् अनुदिशं छित्त्वा समतलं कुर्वन्तु। अधुना भवतां पार्श्वे अस्य संवृतपुटस्य जालकम् अस्ति। 2-D इत्यस्मिन् जालके एतादृशः कश्चन आकारः भवति [आकृतिः15.4 (i)] यस्मिन् वक्रीकृते सति [आकृतिः15.4 (ii)] वयं परिणामस्वरूपम् 3-D इति आकारं प्राप्नुमः [आकृतिः15.4 (iii)]।



आकृतिः 15.4

अत्र भवन्तः उपान्तान् उपयुक्तरूपेण पृथक् कृत्वा एकं जालकं प्राप्तवन्तः ? किम् अस्य विपरीत-प्रक्रिया अपि सम्भवा अस्ति ? अत्र एकसंवृत्तपुट-जालकस्य प्रतिरूपं दत्तम् अस्ति (आकृतिः 15.5)। अस्य प्रतिरूपं निर्माय तस्य विस्तारं कुर्वन्तु। पुनश्च उपयुक्तप्रकारेण एतत् वक्रीकृत्य अथ च संश्लिष्य एकं संवृत्तपुटं निर्मान्तु।

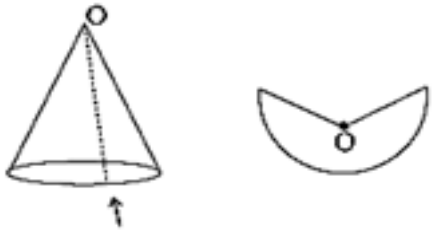
भवन्तः उपर्युक्तानाम् एककानाम् अथवा मात्रकाणां प्रयोगं कर्तुं शक्नुवन्ति। प्राप्तः संवृत्तपुटः एकः सान्द्रः



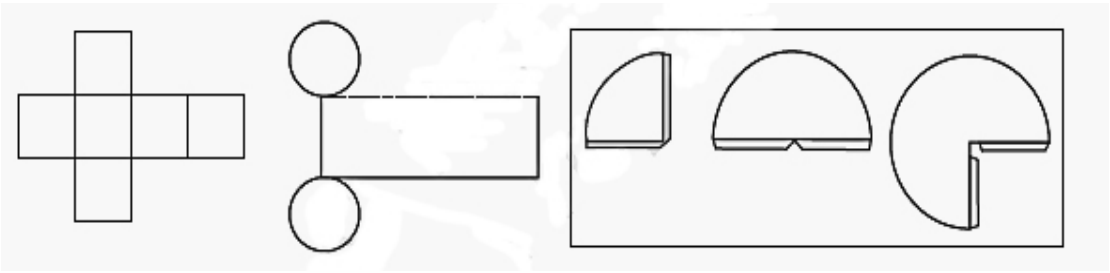
आकृतिः 15.5

अस्ति। अयं घनाभसदृशम् एकम् 3-D वस्तु अस्ति। अनेन एव प्रकारेण भवन्तः एकं शङ्कुं तदीय-तिर्यक्-पृष्ठस्य अनुदिशम् एकसुक्ष्मपट्टिकारूपेण छित्वा अस्य जालकं प्राप्तुं शक्नुवन्ति (आकृतिः 15.6)।

भिन्नाकाराणां कृते भिन्नानि जालकानि भवन्ति। प्रदत्तानां जालकानां प्रतिरूपाणि निर्माय तेषां च विस्तारं कुर्वन्तु अथवा प्रदत्त-जालकानां विस्तारितरूपाणां प्रतिरूपाणि कुर्वन्तु (आकृतिः 15.7) तत्पश्चाद् एतेषाम् अधः आलिखितान् त्रिविमीयाकारान् (3-D) निर्मातुं प्रयासं कुर्वन्तु। भवन्तः स्थूलकर्गदस्य सुक्ष्मपट्टिकाः आदाय ताः कर्गदसंदशिकाभिः बद्ध्वा आकाराणां प्रतिरूपाणि अपि निर्मातुं शक्नुवन्ति।



आकृतिः 15.6 इतः छिन्दन्तु



(i) घनः (iii) वेलनम् (ii) शङ्कुः

आकृतिः 15.7

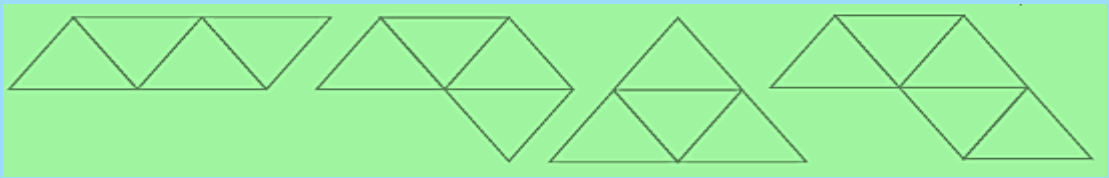
वयं मिस्रस्य गिजायाः ग्रेट-पिरामिडेन सदृशस्य (आकृतिः 15.8) पिरामिडस्य कृते अपि जालकनिर्माणस्य प्रयासं कर्तुं शक्नुमः। अस्य पिरामिडस्य आधारः एकः वर्गः अस्ति अथ च चतसृषु भुजासु त्रिभुजानि निर्मितानि सन्ति। पश्यन्तु किं भवन्तः प्रदत्त-जालकाद् (आकृतिः 15.9) एतं पिरामिडं निर्मातुं शक्नुवन्ति ?

आकृतिः 15.8

आकृतिः 15.9

प्रयासं कुर्वन्तु

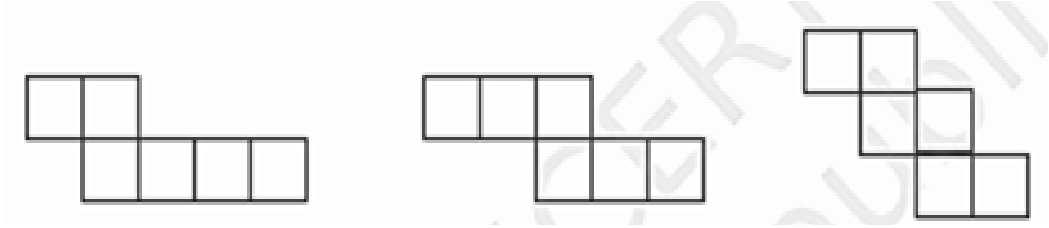
अत्र भवन्तः चतुरः आनायान् ईक्षमाणाः सन्ति (आकृतिः 15.10)। किमपि चतुष्फलकं निर्मातुम् एषु द्वौ आनायौ उचितौ स्तः। पश्यन्तु यत् किं भवन्तः एतद् ज्ञातुं शक्नुवन्ति यत् कतमाभ्याम् आनायाभ्यां चतुष्फलकं निर्मातुं शक्यते।



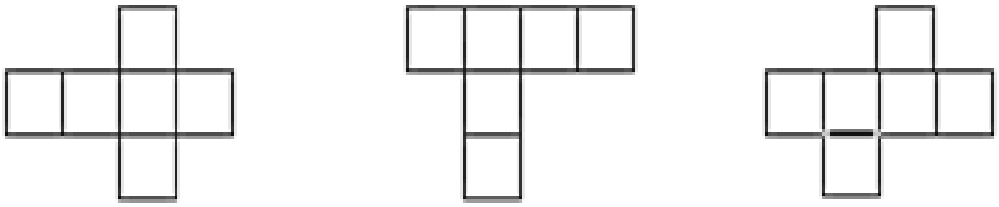
आकृतिः 15.10

प्रश्नावली 15.1

1. तान् आनायान् परिचिवन्तु यान् प्रयुज्य भवन्तः घनान् निर्मातुं शक्नुवन्ति (एतेषां जालकानां प्रतिरूपाणि छित्त्वा एतत् कर्तुं प्रयासं कुर्वन्तु)

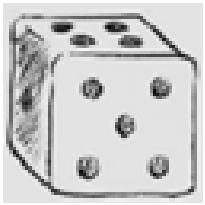


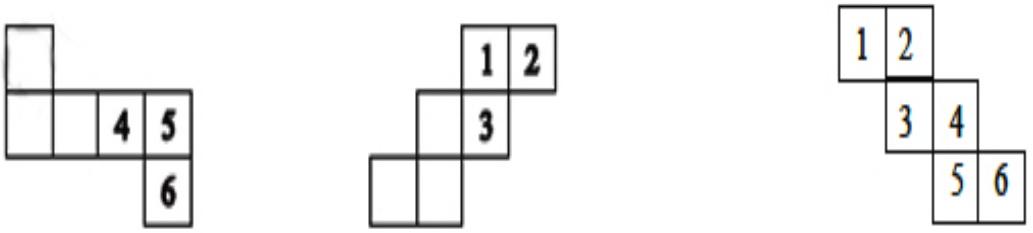
(i) (ii) (iii)



(iv) (v) (vi)

2. अक्षाः तादृशाः घनाः भवन्ति येषां प्रत्येकस्मिन् फलके बिन्दवः अङ्किताः भवन्ति । कस्यचित् अक्षस्य सम्मुखफलकानां अङ्कित-बिन्दूनां सङ्ख्यायाः योगः सदैव 7 भवति। अत्र अक्षान् निर्मातुं द्वे जालके दत्ते स्तः । प्रत्येकस्मिन् वर्गे लिखितसङ्ख्या तस्य संवृत्तपुटस्य बिन्दून् दर्शयति।



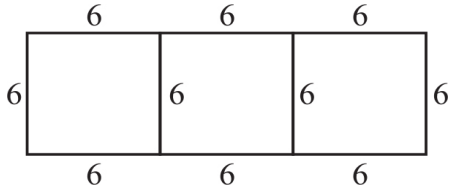


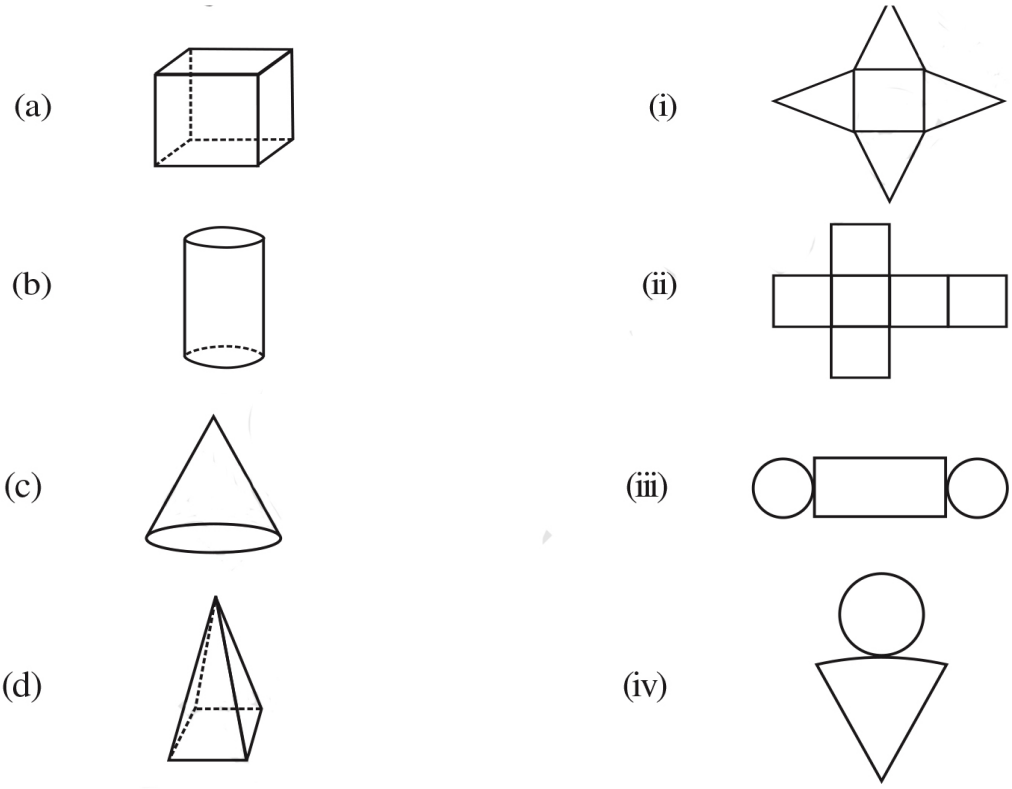
अक्षस्य सम्मुख-फलकानां सङ्ख्यायाः योगः सदैव 7 एव भवति इति स्मरन्तः रिक्तस्थानेषु उपयुक्त-सङ्ख्यां लिखन्तु ।

3. किम् एतत् अक्षस्य कृते एकं जालकं भवितुम् अर्हति ? स्वीयम् उत्तरं स्पष्टीकुरूत।

4. अत्र एकं घनं निर्मातुं एकम् अपूर्णं जालकं दत्तम् अस्ति ? एतत् न्यूनातिन्यूनं द्वाभ्यां विधिभ्यां पूर्णं कुरूत। स्मरणं भवेत् यद् कस्यचिद् घनस्य षट् फलकानि भवन्ति ।अत्र अस्मिन् जालके कति फलकानि दत्तानि सन्ति । (पृथक् पृथक् द्वे चित्रे यच्छन्तु । कार्यं सरलीकर्तुं भवन्तः वर्गाङ्कित-कर्गदस्य प्रयोगं कर्तुं शक्नुवन्ति।)

5. उपयुक्त-सान्ध्राकारैः सह जालकानां मेलनं कुरूत :





इमां क्रीडां क्रीडत

भवान् भवदीयं मित्रं च परस्परं सम्मिलितपृष्ठौ उपविष्टौ स्तः। भवत्सु एकः जनः एकं त्रिविमीयम् (3-D) आकारं निर्मातुम् एकम् आनायं पठति अपरन्तु द्वितीयजनः अस्य प्रतिरूपं निर्माय उक्तं त्रिविमीयम् (3-D) आकारम् आलेखितुं रचयितुं वा प्रयतते।

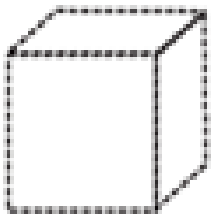
15.4 कस्मिंश्चित् समतलपृष्ठे सान्द्राकाराणाम् आलेखनम्

एतत् समतलपृष्ठं भवताम् एकं कर्गदम् अस्ति। भवन्तः यदा कञ्चित् सान्द्राकारम् आलिखन्ति तदा प्रतिबिम्बाः किञ्चिद् विकृतीक्रियन्ते (वक्रीक्रियन्ते) येन ते त्रिविमीयाः दृश्येरन्। एतत् कश्चन दृष्टिभ्रमः अस्ति। अत्र भवतां साहाय्यार्थं द्वौ प्रविधी दीयमानौ स्तः।

15.4.1 तिर्यक् अथवा अनियमित-चित्रम्

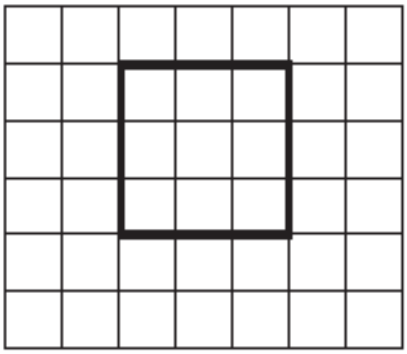
अत्र एकं घनचित्रं दत्तम् अस्ति (आकृतिः 15.11)। यदा एतत् पुरस्ताद् दृश्येत तदा एतेन स्पष्टतः ज्ञायते यद् घनः कथं दृश्यते। भवन्तः अस्य कानिचिद् फलकानि द्रष्टुं न शक्नुवन्ति। आलिखितेऽस्मिन् चित्रे दीर्घता समाना नास्ति। अपरन्तु घने इयं समाना भवेत्।

पुनरपि भवन्तः एतत् परिज्ञानं कुर्वन्ति यद् एतत् कश्चिद् घनः अस्ति। कस्यचित् सान्द्राकारस्य एतादृशं चित्रम् एकं तिर्यक् चित्रम् इति कथ्यते। भवन्तः एतादृशानि तिर्यक्चित्राणि कथम् आलिखन्ति ?



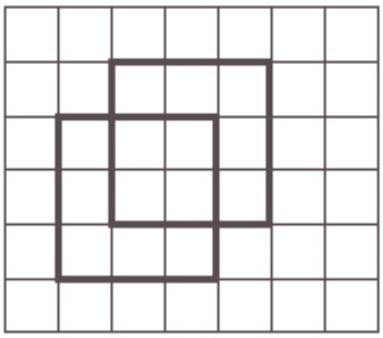
आकृतिः 15.11

आयान्तु अस्य प्रविधिम् अधिगन्तुं प्रयतामहे। भवतां कृते वर्गाङ्कितस्य (बिन्दुरेखाङ्कितस्य) कर्गदस्य आवश्यकता वर्तते। आरम्भे एतादृशे बिन्दुरेखाङ्किते कर्गदे चित्राकर्षणस्य अभ्यासानन्तरं भवन्तः बिन्दुरेखाङ्कितकर्गदं विना अपि साधारणकर्गदे एतानि चित्राणि सरलतया आलेखितुं शक्नुवन्ति। आगच्छन्तु 3 × 3 × 3 इति परिमापमितस्य चित्रम् (एतादृशः घनः यस्य प्रत्येकम् उपान्तः त्रि-एककम् अस्ति) आलेखितुं प्रयासं कुर्मः (आकृतिः 15.12)।



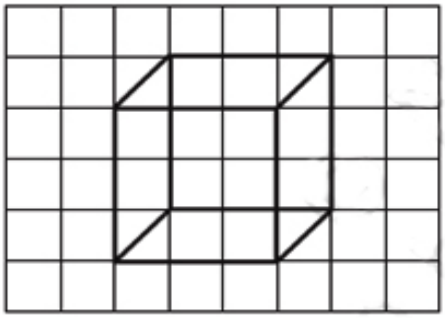
प्रथमं चरणम्

पुरतः स्थितं फलकम् आलिखन्तु।



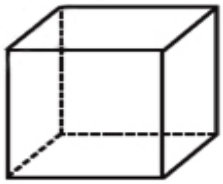
द्वितीयं चरणम्

पुरतः स्थितस्य फलकस्य सम्मुख-फलकं कर्षयन्तु । फलकानां मापनं समानं भवेत् । किन्तु एतत् चित्रम् प्रथमचरणस्य चित्रं किञ्चिद् अपसार्य निर्मितम् अस्ति।



तृतीयं चरणः

सङ्गतकोणान् मेलयन्तु।



चतुर्थं चरणम्

अन्तर्हित-प्रान्तभागानां कृते चित्रं बिन्द्वङ्कित-रेखाः प्रयुज्य पुनः आलिखन्तु (इयं काचित् परम्परा अस्ति) अधुना अभीष्टं चित्रं सिद्धम् अस्ति।

आकृतिः 15.12

किम् उपर्युक्ते तिर्यक्-चित्रे भवन्तः अधोलिखित-तथ्यानि पश्यन्तः सन्ति ?

(i) पुरतः स्थित-फलकस्य तथा च तदीय-सम्मुख-फलकस्य मापः समानः अस्ति

(ii) घनस्य ये उपान्ताः समानाः भवन्ति चित्रे अपि ते समानाः एव प्रतीयन्ते यद्यपि ते समानतः न गृहीताः सन्ति।

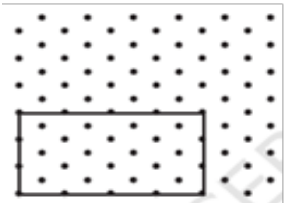
इदानीं भवन्तः कस्यचिद् घनाभस्य तिर्यक्-चित्रं निर्मातुम् अर्हन्ति (स्मरणं भवतु यद् अस्यां स्थितौ फलकम् एकः आयतः अस्ति)।

टिप्पणी : भवन्तः एतादृशानि चित्राणि अपि आलेखितुम् अर्हन्ति येषु मापः (मापनं वा) प्रदत्तस्य सान्द्रस्य मापेन अनुकूलः एव स्यात् । एतदर्थम् अस्माकं कृते एतादृशं कर्गदम् अपेक्षितं वर्तते यत् समदूरीकम् अर्थात् समानदैर्घ्ययुतं कर्गदम् इति उच्यते। आगच्छन्तु वयम् एकस्मिन् समदूरीक-कर्गदे एतादृशं घनाभं निर्मातुं प्रयत्नं कुर्मः यस्य दीर्घता 4 cm मिता, विस्तृतिः 3 cm मिता अथ च औन्नत्यं 3 cm मितम् अस्ति।

15.4.2 समदूरीक-चित्रम्

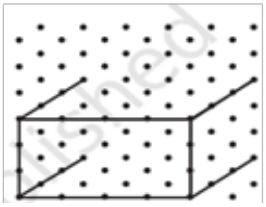
किं भवद्भिः बिन्दुभिः अङ्कितं समदूरीकर्गदं दृष्टम् अस्ति ? (अस्य एकः प्रतिदर्शः अस्य पुस्तकस्य अन्ते दत्तः अस्ति ।) एवंविधे आस्तरणे सम्पूर्णकर्गदम् (अर्थाद् एतद् आस्तरणम् एव) बिन्दुरेखाभिः निर्मितेषु त्रिभुजेषु विभक्तं जायते । येषां मापाः दत्त-सान्द्र-मापानुकूलाः स्युः तादृशानि चित्राणि आलेखितुं वयं बिन्द्वङ्कितानां समदूरीकास्तरणानां प्रयोगं कर्तुम् अर्हामः।

आयान्तु, $4 \times 3 \times 3$ इति विमा-युतस्य कस्यचित् घनाभस्य (यस्य अर्थः अस्ति अस्य दीर्घता,विस्तृतिः तथा च औन्नत्यं क्रमशः 4, 3 तथा च 3 मात्रकम् अस्ति।) किमपि समदूरीकचित्रं निर्मातुं प्रयत्नं कुर्मः।(आकृतिः 15.13)।



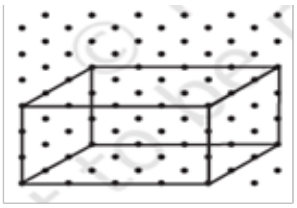
प्रथमं चरणम्

पुरतः स्थितं फलकं दर्शयितुम् 4×3 इति मापयुतम् एकम् आयतम् आलिखन्तु।



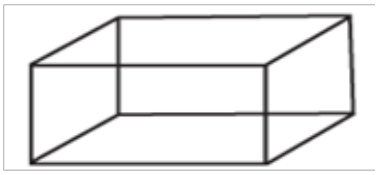
द्वितीयं चरणम्

आयतस्य चतुर्भ्यः कोणेभ्यः एतादृशान् चतुरः रेखाखण्डान् आलिखन्तु येषाम् एककं दैर्घ्यं त्रयं भवेत्।



तृतीयं चरणम्

सुमेलितकोणान् उपयुक्तरेखाखण्डैः सह मेलयन्तु।

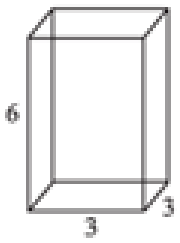


चतुर्थं चरणम्

एतद् घनाभस्य एकं समदूरीकं चित्रम् अस्ति।

आकृतिः 15.13

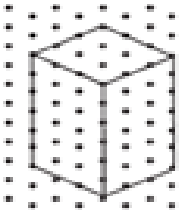
अवधानं कुर्वन्तु यत् कस्मिंश्चिद् समदूरीक-चित्रे मापनं यथार्थतः सान्ध्राणां दत्तमापानां भवति अपरन्तु तिर्यक्-चित्रस्य स्थितौ एवं भवति।



आकृतिः 15.14(i)

उदाहरणम् 1 अत्र कस्यचित् घनाभस्य तिर्यक्चित्रं दत्तम् अस्ति। अस्य चित्रस्य एकं समदूरीकचित्रम् आलिखन्तु।

समाधानम् अस्य समाधानम् 15.14 (ii) इति आकृत्यां चित्रम् आकृतिः 15.14 (i) आलिख्य दर्शितं वर्तते। अवधानं कुर्वन्तु यत् कथं मापानुसारं चित्रम् आलिखितम् अस्ति।

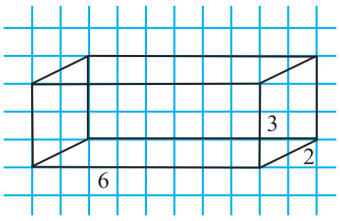


आकृतिः 15.14 (ii)

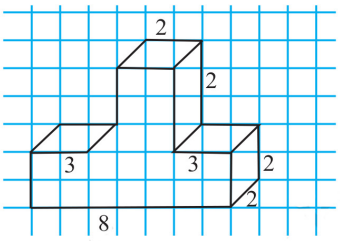
भवद्भिः (i) 'दीर्घता'? (ii) 'विस्तृतिः'? (iii) 'औन्नत्यम्'? इत्येतेषु एकैकस्य अनुदिशं कति एककानि गृहीतानि सन्ति ? किम् इमानि तिर्यक्-चित्रे दर्शितैः एककैः सह सुमेलितानि सन्ति ?

प्रश्नावली 15.2

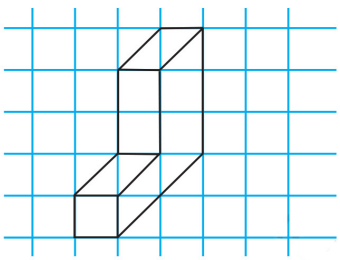
1. कस्यचिद् बिन्द्वङ्कित-समदूरीक-कर्गदस्य प्रयोगं कुर्वन्तः अधोलिखितासु आकृतिषु एकैकस्याः कृते एकं समदूरीकचित्रं निर्मान्तु :



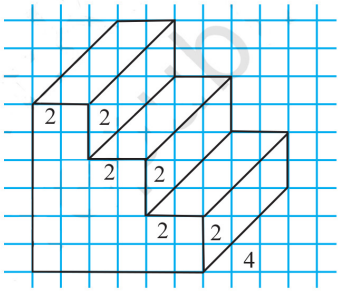
(i)



(ii)



(iii)



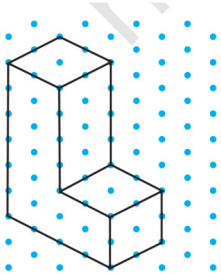
(iv)

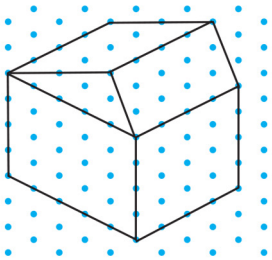
आकृतिः 15.15

2. कस्यचिद् घनाभस्य विमाः 5 सेण्टीमीटरमिता, 3सेण्टीमीटरमिता अथ च 2 सेण्टीमीटरमिता सन्ति। अस्य घनाभस्य त्रीणि विभिन्नानि समदूरीकचित्राणि आलिखिन्तु।

3. 2 cm मितोपान्तभागान् त्रीन् घनान् परस्परं संस्पृश्य संस्थापयन्तः कश्चिद् घनाभः निर्मितः। अस्य घनाभस्य एकं तिर्यग् अथवा समदूरीकचित्रम् आलिखन्तु।

4. अधोलिखितेषु समदूरीकाकारेषु एकैकस्मै एकं तिर्यक् चित्रम् आलिखन्तु :





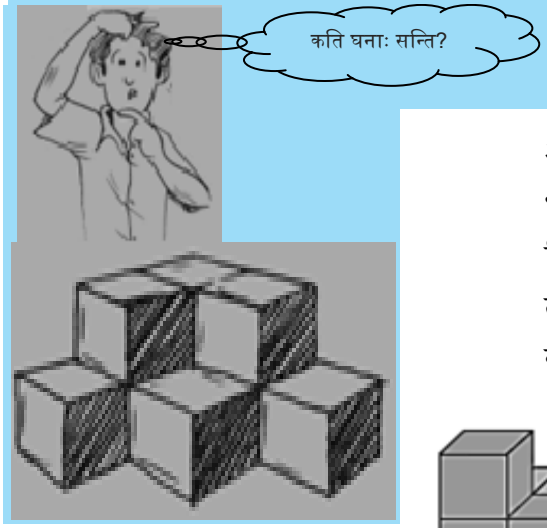
5. अधोलिखितेषु एकैकस्य कृते (i) तिर्यक् चित्रम् अथ च (ii) एकं समदूरीकचित्रम् आलिखन्तु :

(a) 5 से.मी., 3 से.मी. एवञ्च 2 से.मी. इति विमायुतः कश्चिद् घनाभः (किं भवतः चित्रम् अद्वितीयम् अस्ति ?)

(b) कश्चित्चतुःसेण्टीमीटरमितः लम्बमानः घनः।
अस्य पुस्तकस्य अन्ते एकं समदूरीकम् आस्तरणं युक्तं वर्तते। भवन्तः अस्मिन् आस्तरणे निजमित्रेण निर्दिष्ट-विमानां घनम् अथवा घनाभम् आलेखितुम् अर्हन्ति।

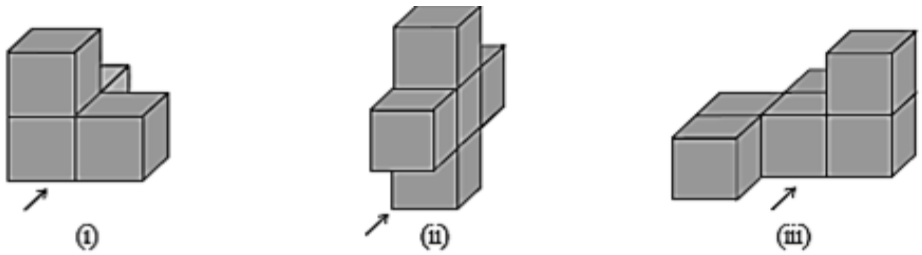
15.4.3 सान्द्रवस्तूनां चित्रणम्

एतान् कुर्वन्तु



यदा कदा भवन्तः संयोजितान् अथवा संयुक्तान् आकारान् पश्यन्ति तदा एषु केचन भवतां दृष्टिपथे न आयान्ति अर्थात् भवन्तः इमान् न द्रष्टुम् अर्हन्ति।

अत्र केचन क्रियाविधयः दीयमानाः सन्ति यान् कर्तुं भवन्तः अवकाश-काले प्रयत्नं कर्तुं शक्नुवन्ति। एषां क्रियविधीनां द्वारा भवतां सान्द्रवस्तु-चित्रणे अथवा तानि सान्द्रवस्तूनि कथं दृश्यन्ते इति तेषां विषये कल्पानाकरणे साहाय्यं भविष्यति।

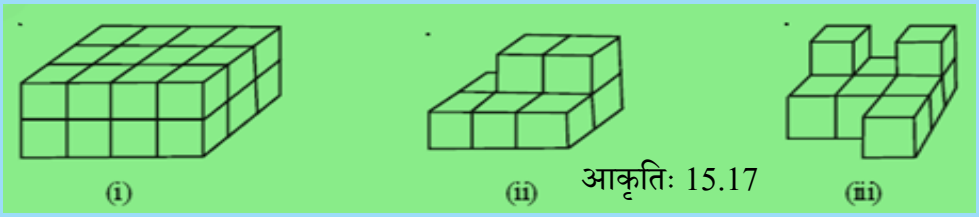


आकृतिः 15.16

कांश्चन सान्द्रान् स्वीकुर्वन्तु तथा च तान् 15.16 इति आकृत्यां दर्शितानुसारं व्यवस्थितान् कुर्वन्तु। अधुना निजमित्रं पृच्छतु यत् तत् (मित्रम्) अस्य अनुमानं कुर्याद्यद् बाण-चिह्नानुसारम् अस्मिन् दर्शिते सति कति सान्द्राः दृश्यन्ते ?

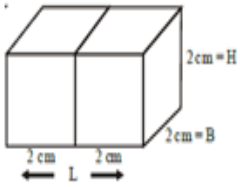
एतान् कुर्वन्तु

अधोलिखित-व्यवस्थासु घनानां सङ्ख्या कति इति ऊहां कर्तुं प्रयासं कुर्वन्तु (आकृतिः 15.17)?



आकृतिः 15.17

एतादृशं चित्रीकरणम् अतीव सहायकं भवति। चिन्तयन्तु यत् भवन्तः एतादृशान् घनान् संयोज्य एकं घनाभं निर्मान्ति। अस्यां स्थितौ भवन्तः इमाम् ऊहां कर्तुम् अर्हन्ति यत् तस्य घनाभस्य दीर्घता, विस्तृतिः औन्नत्यं किं भविष्यति ?



आकृतिः 15.18

उदाहरणम् 2 यदि वयम् 2 x 2 x 2 से.मी. इति विमायुक्तौ द्वौ सान्द्रौ परस्परं संस्पृश्य स्थापयामः तदा परिणामि-घनाभस्य विमाः काः भविष्यन्ति ?

समाधानम् यथा भवन्तः द्रष्टुम् अर्हन्ति (आकृतिः 15.18 इत्यत्र) यद् यदा घनौ संस्पृष्टौ स्थाप्येते तदा केवलं दैर्घ्यम् एव एतादृशं मापनम् अस्ति यस्मिन् वृद्धिः अभवत्। एतद् दैर्घ्यम् 2 + 2 = 4 सेण्टीमीटरमितं जायते। घनाभस्य विस्तृतिः 2 सेण्टीमीटरमिता एवञ्च औन्नत्यम् 2 सेण्टीमीटरमितम् अस्ति।

प्रयासं कुर्वन्तु

1. आकृत्यानुसारं द्वौ संश्लिष्टौ अक्षौ परस्परं संस्थापितौ भवेताम्। किं भवन्तः सूचयितुं शक्नुन्ति यत् अधोलिखित-फलकानां विपरीत-फलकेषु अङ्कित-बिन्दूनां योगः कः भविष्यति ?
   (a) 5 + 6 (b) 4 + 3
   (स्मरणं भवतु यत् कस्यचिद् अक्षस्य सम्मुख-फलके अङ्कित-सङ्ख्यानां योगः सदैव 7 भवति।)

आकृतिः 15.19

2. 2 से.मी.मितोपान्तयुतानि त्रीन् सान्द्रान् परस्परं संश्लेष्य कश्चिद् घनाभः निर्मितः अस्ति। अस्य घनाभस्य एकं तिर्यक्-चित्रं निर्मातुं प्रयासं कुर्वन्तु अथ च ज्ञापयन्तु यद् अस्य दीर्घता, विस्तृतिः एवञ्च औन्नत्यं किं भवितुम् अर्हति ?

15.5 कस्यचित् सान्द्रस्य विभिन्नभागानाम् ईक्षणम्

आगच्छन्तु एतत् चर्चयामः यत् किमपि त्रिविमीय-वस्तुं (3D) कथं विभिन्नविधिभिः द्रष्टुं शक्यते।

15.5.1 कस्यचित्वस्तुनः कर्तनम् अथवा तस्य शकलीकरणं तस्य वस्तुनः कश्चिद् दर्शनविधिः अस्ति -

शकलीकरण-क्रीडा

अत्र एका प्रत्यूषित-रोटिका दत्ता वर्तते (आकृतिः 15.20) । अयं वर्गाकारः आधारमान् घनाभः इव अस्ति। भवन्तः छुरिकया अस्याः प्रत्यूषित-रोटिकायाः खण्डान् कुर्वन्तु।

आकृतिः 15.20

यदा भवन्तः इमाम् ऊर्ध्वाधररूपेण कर्तयन्ति तदा भवन्तः अनेकान् खण्डान् आप्नुवन्ति यथा 15.20 इति आकृत्यां दर्शितम् अस्ति। कस्यचित् खण्डस्य प्रत्येकं फलकम् एकः वर्गः अस्ति। वयम् इदं फलकं प्रत्यूषित-रोटिकायाः एकम् अनुप्रस्थभागम् इति कथयामः। वस्तुतः अस्यां स्थितौ अनुप्रस्थभागः प्रायेण एकः वर्गः अस्ति। अवधानं कुर्वन्तु यत् यदि कर्तनम् ऊर्ध्वाधरं नैव भविष्यति तदा भवद्भिः कश्चन भिन्नः अनुप्रस्थभागः प्राप्तुं शक्यते। अस्मिन् विषये विचारं कुर्वन्तु। भवद्भिः प्राप्तस्य अनुप्रस्थभागस्य परिसीमा काचित् तलाकृतिः अस्ति। किं भवन्तः एतद् द्रष्टुं शक्नुवन्ति ?

पाकशालीया क्रीडा

यदा भवन्तः पाकशालायां शाकानि पक्तुं कर्तयन्ति तदा किं भवद्भिः शाकानाम् अनुप्रस्थ-कर्तनानाम् आकारेषु अवधानं दत्तम् अस्ति ? विभिन्न-खण्डान् पश्यन्तु तथा च शाककर्तनात् प्राप्तैः अनुप्रस्थ-कर्तनाकारैः सह परिचिताः भवन्तु।

एतत् क्रीडन्तु

अधोलिखितानां सान्द्राणां मृत्प्रतिरूपाणि निर्मान्तु तथा च एतानि ऊर्ध्वाधररूपेण अथवा क्षैतिजरूपेण छिन्दन्तु। भवद्भिः प्राप्तानाम् अनुप्रस्थ-कर्तनाकाराणां अभ्यास-चित्राणि आलिखन्तु। यत्र सम्भवेत् तत्र तेषां नामानि अपि लिखन्तु।

आकृतिः 15.21

प्रश्नावली 15.3

1. यदा भवन्तः अधोलिखितान् सान्द्रान् ऊर्ध्वाधररूपेण अथवा क्षैतिजरूपेण कर्तयन्ति तदा कतमः अनुप्रस्थ-भागः प्राप्यते ?
   (a) काचिद् इष्टिका (b) किमपि वृत्ताकारं सेवफलम् (c) कश्चिद् अक्षः
   (d) काचित् घानाभाकारा नलिका (e) कश्चिद् पयोहिम-शङ्कुः

15.5.2 छायाक्रीडा एकः अपरः विधिः अस्ति -

एका छायाक्रीडा

आकृतिः 15.22

केन प्रकारेण त्रिविमीय-वस्तूनि द्विविमीयाकाररूपेण द्रष्टुं शक्यन्ते इति अधिगन्तुं छायाः एतेषां सुन्दराणि उदाहरणानि सन्ति। किं भवद्भिः कदाचित् काचित् छायाक्रीडा अवलोकिता ? एतद् एकप्रकारकः मनोविनोदः अस्ति यस्मिन् सुस्पष्टाः सान्द्राकृतीः कस्यचित् प्रकाश-स्रोतसः पुरतः निधाय तासां गतिमत्प्रतिबिम्बानां भ्रमाः उत्पाद्यन्ते। अस्यां क्रीडायां कासाञ्चिद् गणितीयावधारणानां किञ्चित् अप्रत्यक्षरूपेण प्रयोगः भवति।

आकृतिः 15.23

एतं क्रियाविधिं कर्तुम् अस्माकं कृते कस्यचित् प्रकाशस्रोतसः तथा च केषाञ्चित् सान्द्राकाराणाम् आवश्यकता भविष्यति। (यदि भवतां समीपे शिरःक्षेपिप्रक्षेपकयन्त्रम् आकृतिः 15.23 (Overhead-pro-

(i)

jector) अस्ति तर्हि सान्द्रं विद्युद्दीपस्य समक्षं स्थापयन्तु अथ च एषाम् अन्वेषणं कुर्वन्तु ।) कस्यचित् शङ्कोः साक्षात् पुरतः कस्यचित् करदीपस्य प्रकाशं क्षिपन्तु । एतत् जवनिकायां कीदृशीं छायां दर्शयति (आकृतिः 15.23) ?

सान्द्रः त्रिविमायुतः अस्ति । अस्य छायायाः कति विमाः सन्ति ?

यदि भवन्तः अस्यां क्रीडायां शङ्कोः स्थाने कञ्चित् सान्द्रं करदीपकस्य समक्षं स्थापयन्ति तदा भवद्भिः कीदृशी छाया प्राप्स्यते ?

प्रकाशस्रोतसः विभिन्नस्थितीः सान्द्रवस्तूनां च विभिन्नस्थितीः आदाय प्रयोगं कुर्वन्तु । प्राप्तच्छायानाम् आकारेषु मापेषु च एषां प्रभावानाम् अध्ययनं कुर्वन्तु । अत्र एकः अपरः इतोऽपि अधिकः मनोरञ्जकः प्रयोगः दीयमानः अस्ति ।

एतं सम्भवतः भवन्तः पूर्वमेव कृतवन्तः स्युः । एकं वृत्ताकारं चायस्य पानपात्रं मुक्तस्थाने स्थापयन्तु यदा द्वादशवादने सूर्यः तस्य साक्षाद् उपरि भवेत् । एतत् सर्वम् 15.24 (i) इति आकृत्यां दर्शितम् अस्ति । भवद्भिः तच्छाया कथं दृश्यते ? किम् इयं छाया एकसमाना एव तिष्ठति ?

(a) प्रातः कालः

तथा च

(b) सायङ्कालः

(i) **आकृतिः 15.24 (i) - (iii)** (ii)

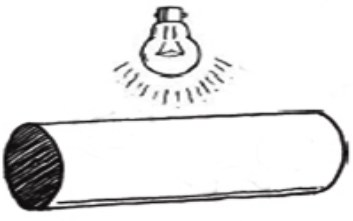
सूर्यस्य स्थिति-प्रेक्षणयोः समयम् अनुसृत्य छायानाम् अध्ययनं कुर्वन्तु ।

प्रश्नावली 15.4

1. अधोलिखित-सान्द्राणां साक्षाद् उपरि एकः जवलन् विद्युद्दीपः स्थापितः अस्ति । प्रत्येकस्यां स्थितौ प्राप्तच्छायाकारस्य नाम ज्ञापयन्तु । अस्याः छायायाः एकम् अभ्यासचित्रं निर्मातुं प्रयासं कुर्वन्तु । (प्रथमं भवन्तः प्रयोगं कर्तुं प्रयासं कुर्वन्तु ततश्च उत्तराणि यच्छन्तु।)

एकं कन्दुकम्

(i)



एका वेलनकारी नलिका

(ii)

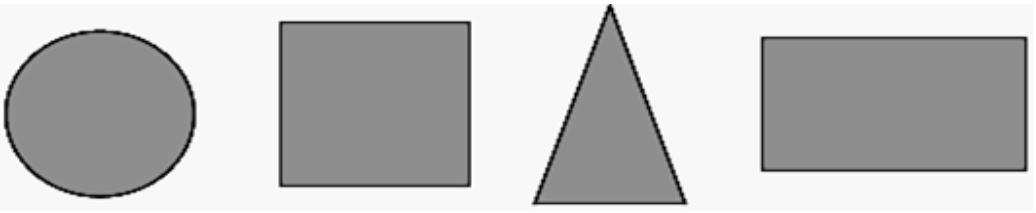
एकं पुस्तकम्

(iii)

2. अत्र केषाञ्चित् त्रिविमीयवस्तूनां (3-D) छायाः दत्ताः सन्ति याः शिरःक्षेपिप्रक्षेपकयन्त्रस्य दीपस्य अन्तस्तात् स्थापयित्वा प्राप्ताः सन्ति । यस्य सान्द्रस्य प्रत्येकं छायया सह मेलनं स्यात् तस्य सान्द्रस्य परिचयनं कुर्वन्तु ।

(अत्र एकस्माद् अधिकानि उत्तराणि भवितुं शक्नुवन्ति !)

एकं वृत्तम् एकः वर्गः एकं त्रिभुजम् एकः आयतः



(i) (ii) (iii) (iv)

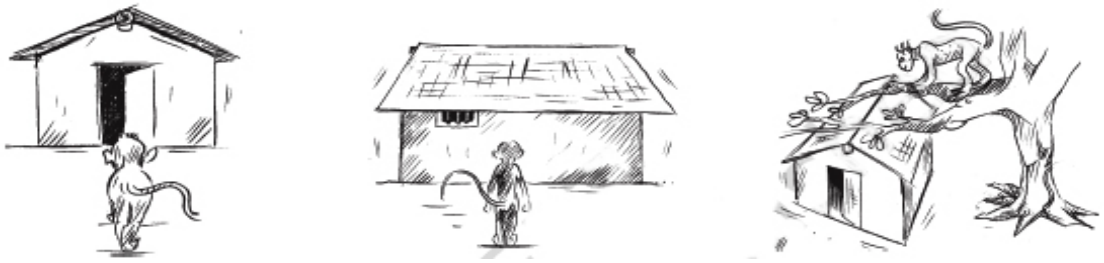
3. किम् एतानि कथनानि सत्यानि सन्ति इति अवेक्षणं कुर्वन्तु :

(i) कश्चिद् घनः कस्यचिद् आयाताकारस्य छायां दातुं शक्नोति।

(ii) कश्चिद् घनः कस्यचित् षड्भुजस्य छायां दातुं शक्नोति।

15.5.3 अयम् एकः तृतीयविधिः अस्ति यद् अस्य विभिन्न-दृश्यानि द्रष्टुम् अस्य अवलोकनं कैश्चिद् विशेषकोणैः भवेत्

कश्चिदपि जनः किमपि वस्तु तस्य पुरस्ताद् अथवा तदीय-पार्श्वभागात् अथवा तस्य उपरितनभागात् द्रष्टुं शक्नोति। प्रतिवारं सः भिन्नम् एव दृश्यं प्राप्स्यति (आकृतिः 15.25)।



पुरतः दृश्यम् पार्श्वतः दृश्यम् उपरिष्टात् दृश्यम्

आकृतिः 15.25

अत्र एकम् उदाहरणम् दीयमानम् अस्ति यस्मिन् कश्चन जनः भवनस्य विभिन्न-दृश्यानि प्राप्तुं शक्नोति (आकृतिः 15.26)।

भवनम् पुरतः दृश्यम् पार्श्व-दृश्यम् उपरिष्टात् दृश्यम्

आकृतिः 15.26

भवन्तः एतेषां प्रयोगं घनयोजनेन निर्मितानाम् आकृतीनां कृते अपि कर्तुं शक्नुवन्ति।

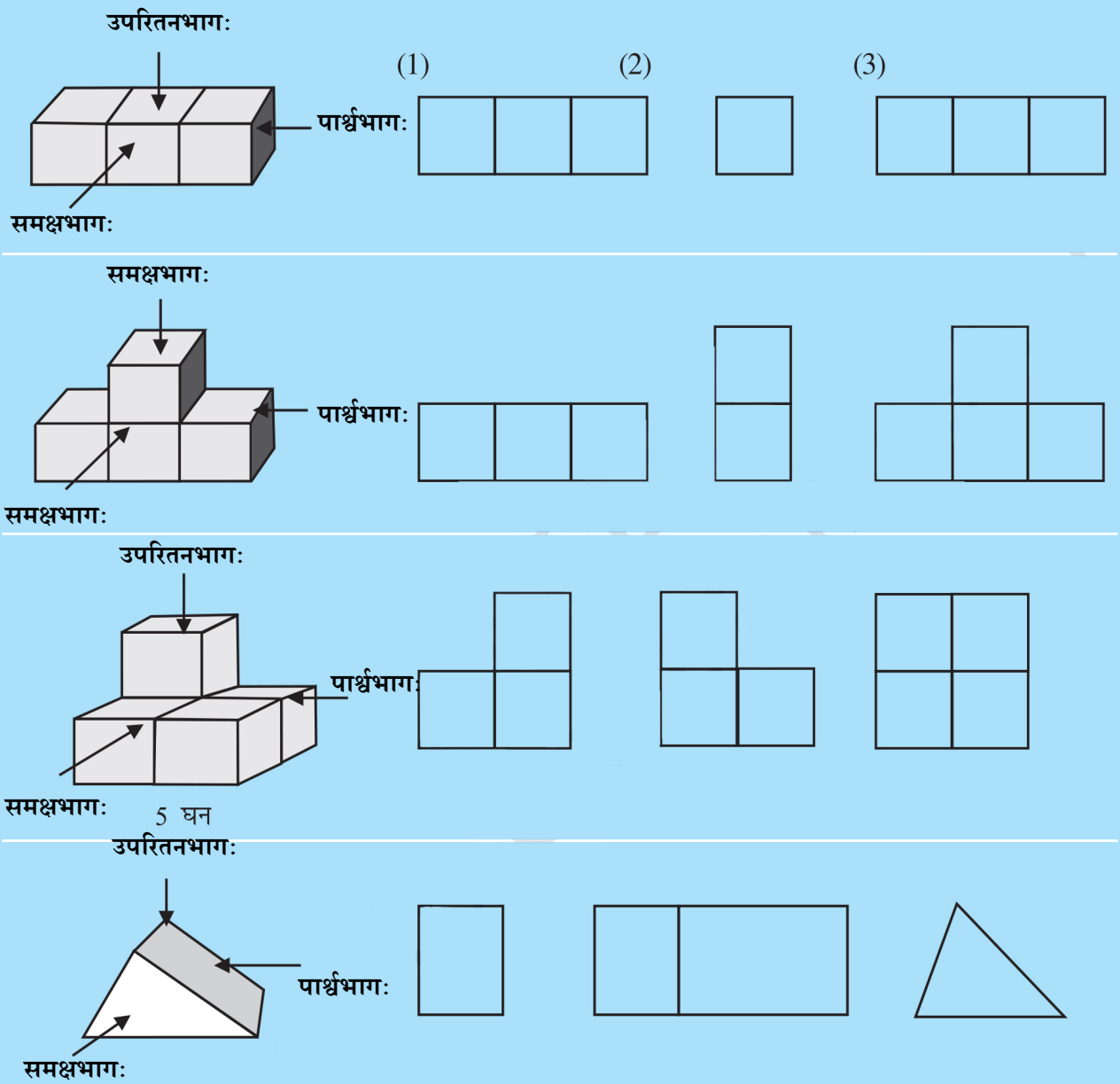
आकृतिः 15.27

घनान् युगपत् संस्थाप्य सान्द्रान् निर्मान्तु पुनश्च तान् विभिन्नदिग्भ्यः दृष्ट्वा उपरितन-विधि-निर्देशानुसारं चित्रं निर्मातुं प्रयासं कुर्वन्तु।

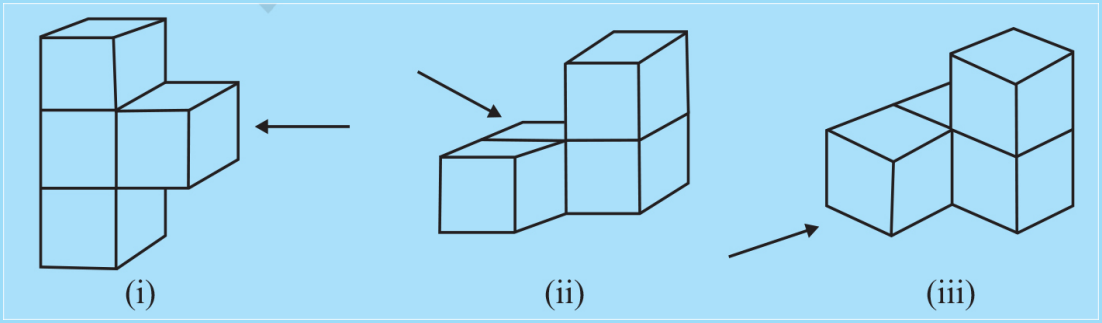
प्रयासं कुर्वन्तु

1. प्रत्येकं सान्द्रस्य कृते (1), (2), (3) इति त्रीणि दृश्यानि दत्तानि सन्ति। प्रत्येकं सान्द्रस्य कृते उपरितनं पुरतः स्थितम् अथ च पार्श्वस्थं सङ्गत-दृश्यं परिचिन्वन्तु।

सान्द्रम् **तस्य दृश्यानि**



2. अधोदत्तं प्रत्येकं सान्द्रम् इति चिह्नद्वारा सूचितदिशातः पश्यन्तु अथ च तस्य एकं दृश्यम् आलिखन्तु



अस्माभिः का चर्चा कृता ?

1. वृत्तम्, वर्गः, आयतः, चतुर्भुजम्, त्रिभुजं च इति सर्वाणि समतलाकृतीनाम् उदाहरणानि सन्ति तथा च घनः, घनाभः, कन्दुकम्, वेलनम्, शङ्कुः तथा च पिरामिड् इति सर्वाणि सान्द्राकाराणाम् उदाहरणानि सन्ति।
2. समतलाकृतीनां द्वे विमे (2-D) भवतः तथा च सान्द्राकाराणां तिस्रः विमाः (3-D) भवन्ति।
3. सान्द्राकाराणां कोणाः तस्य शीर्षाणि,तस्य आकारस्य रेखाखण्डाः तस्य उपान्ताः अथ च तस्य समतलपृष्ठानि तस्य फलकानि इति कथ्यन्ते।
4. सान्द्रस्य एकं जालकं द्वयोः विमयोः मध्ये एकः एतादृशः आकारः (रेखारूपम्) अस्ति यं वक्रीकृत्य सः सान्द्रः प्राप्यते। एकस्यैव सान्द्रस्य अनेकविधानि जालकानि भवितुम् अर्हन्ति।
5. वस्तुतः सान्द्राकाराः समतलपृष्ठेषु (यथा कर्गदम्) आलेखितुं शक्यन्ते। एतत् 3-D इति सान्द्राकारस्य द्विविमीय-निरूपणम् (2-D) इति कथ्यते।
6. कस्यचित् सान्द्रस्य द्विविधानि चित्राणि निर्मातुं शक्यन्ते -
   a) एकं तिर्यक् चित्रं यस्मिन् दैर्घ्याणि समानुपातानि नैव भवन्ति। तदापि एतत् सान्द्ररूपस्य विषये सर्वविधं ज्ञानं प्रदाति।

(b) एकं समदूरीकचित्रं यत् समदूरीककर्गदे आलेखितुं शक्यते यस्य च प्रतिदर्शः अस्य पुस्तकस्य अन्ते दत्तः अस्ति। कस्यचित् सान्द्रस्य कस्मिंश्चित् चित्रे दैर्घ्याणि समानुपातेन स्थाप्यन्ते।

7. सान्द्राकाराणां चित्रणम् एकम् अतीव उपयोगि कौशलम् अस्ति। भवद्भिः सान्द्रस्य आवृत्तभागाः दृश्येरन्।
8. कस्यचित् सान्द्रस्य विभिन्नभागाः विभिन्नविधिभिः द्रष्टुं शक्यन्ते -
   (a) अयं विधिः एवं वर्तते यत् यदि प्रदत्ताकारः छिद्येत तर्हि अस्माद् वयम् एकम् अनुप्रस्थभागं प्राप्तुं शक्नुमः।
   (b) एकः अपरः विधिः अयम् अस्ति यत् कस्यचित् त्रिविमीयाकारस्य (3-D) द्विविमीयच्छाया (2-D) दृश्येत।
   (c) तृतीयविधिः अयं वर्तते यत् सान्द्राकारान् विभिन्नकोणेभ्यः पश्याम। अवलोकितस्य आकारस्य समक्षचित्रम्, पार्श्व-चित्रम् अथ च उपरितनं चित्रम् अस्मभ्यं तस्य आकारस्य विषये बहु अधिकं ज्ञानं प्रदातुम् अर्हति।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1-1

1. (a) लाहुलस्पीती - 8°C, श्रीनगरम् –2°C, शिमला 5°C, ऊटी 14°C, बैङ्गलूरुः 22°C
(b) 30°C (c) 6°C (d) आम् / न

2. 35 **3.** –7°C, –3°C **4.** 6200 मी.

5. 358 इति रूप्यकाणि एकया धनात्मिक्या सङ्ख्यया

6. एकया ऋणात्मिक्या सङ्ख्यया – 10. **7.** (ii) एकः ऐन्द्रजालिक-वर्गः अस्ति।

9. (a) < (b) < (c) > (d) < (e) >

10. (i) एकदशभिः कूर्गदनैः (ii) 5 पञ्चभिः कूर्गदनैः
(iii) (a) –3 + 2 –3 + 2 – 3 + 2 – 3 + 2 –3 + 2 –3 = – 8 (b) 4 – 2 + 4 – 2 + 4 = 8
(b) इत्यत्र 8 इति सङ्ख्या उपरितनाम् अष्टानां सोपानाम् आरोहणं निरूपयति।

प्रश्नावली 1-2

1. अयम् एकः एतादृशः युग्मः भवितुम् अर्हति।
(a) –10, 3 (b) – 6, 4, (– 6 – 4 = –10) (c) –3, 3

2. एकः एतादृशः युग्मः अयं भवितुम् अर्हति।
(a) –2, –10, [–2 – (–10) = 8] (b) – 6, 1 (c) –1, 2; (–1 – 2 = –3)

3. द्वाभ्यां दलाभ्यां समानाङ्काः प्राप्ताः अर्थात् –30 इति, आम्

4. (i) –5 (ii) 0 (iii) –17 (iv) –7 (v) –3

प्रश्नावली 1-3

1. (a) –3 (b) –225 (c) 630 (d) 316 (e) 0
(f) 1320 (g) 162 (h) –360 (i) –24 (j) 36

3. (i) – a (ii) (a) 22 (b) –37 (c) 0

4. –1 × 5 = –5, –1 × 4 = – 4 = – 5 + 1, – 1 × 3 = – 3 = – 4 + 1,
–1 × 2 = – 2 = – 3 + 1, – 1 × 1 = – 1 = – 2 + 1, – 1 × 0 = 0 = – 1 + 1 अतः – 1 × (–1) = 0 + 1 = 1.

5. (a) 480 (b) – 53000 (c) – 15000 (d) – 4182
(e) – 62500 (f) 336 (g) 493 (h) 1140

6. – 10°C **7.** (i) 8 (ii) 15 (iii) 0

8. (a) सहस्ररूप्यकाणां (1000) हानिः (b) चतुर्सहस्रम् (4000) स्यूतकाः

9. (a) – 9 (b) – 7 (c) 7 (d) – 11

प्रश्नावली 1.4

1. (a) –3 (b) –10 (c) 4 (d) –1 (e) –13
(f) 0 (g) 1 (h) –1 (i) 1

3. (a) 1 (b) 75 (c) – 206 (d) –1 (e) – 87
(f) – 48 (g) –10 (h) –12

4. (–6, 2), (–12, 4), (12, – 4), (9, –3), (–9, 3) (एतादृशाः अन्याः युग्माः अपि भवितुम् अर्हन्ति)

5. नववादने सायम् – 14°C **6.** (i) 8 (ii) 13 **7.** 1 होरा

प्रश्नावली 2.1

1. (i) $\frac{7}{5}$ (ii) $\frac{39}{8} = 4\frac{7}{8}$ (iii) $\frac{31}{35}$ (iv) $\frac{91}{165}$ (v) $\frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$

(vi) $\frac{37}{6} = 6\frac{1}{6}$ (vii) $\frac{39}{8} = 4\frac{7}{8}$

2. (i) $\frac{2}{3}, \frac{8}{21}, \frac{2}{9}$ (ii) $\frac{7}{10}, \frac{3}{7}, -\frac{1}{5}$ 3. आम् **4.** $\frac{139}{3} = 46\frac{1}{3}$ से.मी.

5. (i) $8\frac{17}{20}$ से.मी. (ii) $7\frac{5}{6}$ से.मी. ΔABE इति त्रिभुजस्य परिमापः अधिकः अस्ति।

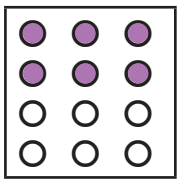
6. $\frac{3}{10}$ से.मी. 7. $\frac{2}{7}$, रीतूः $\frac{1}{5}$ 8. वैभवद्वारा $\frac{1}{6}$ होराभिः

प्रश्नावली 2.2

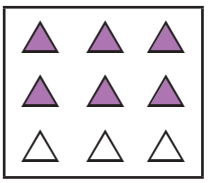
1. (i) (d) (ii) (b) (iii) (a) (iv) (c)
2. (i) (c) (ii) (a) (iii) (b)
3. (i) $4\frac{1}{5}$ (ii) $1\frac{1}{3}$ (iii) $1\frac{5}{7}$ (iv) $1\frac{1}{9}$ (v) $2\frac{2}{3}$

(vi) 15 (vii) $6\frac{2}{7}$ (viii) 16 (ix) $4\frac{1}{3}$ (x) 9

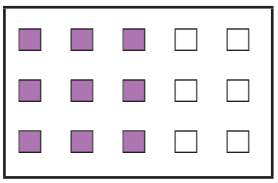
4. एषः कश्चन उपायः भवितुम् अर्हति –



(i)



(ii)



(iii)

5. (a) (i) 12 (ii) 23 (b) (i) 12 (ii) 18 (c) (i) 12 (ii) 27 (d) (i) 16 (ii) 28
6. (a) $15\frac{3}{5}$ (b) $33\frac{3}{4}$ (c) $15\frac{3}{4}$ (d) $25\frac{1}{3}$

(e) $19\frac{1}{2}$ (f) $27\frac{1}{5}$

7. (a) (i) $1\frac{3}{8}$ (ii) $2\frac{1}{9}$ (b) (i) $2\frac{19}{48}$ (ii) $6\frac{1}{24}$ 8. (i) 2 लीटर (ii) $\frac{3}{5}$

प्रश्नावली 2.3

1. (i) (a) $\frac{1}{16}$ (b) $\frac{3}{20}$ (c) $\frac{1}{3}$ (ii) (a) $\frac{2}{63}$

(b) $\frac{6}{35}$ (c) $\frac{3}{70}$

2. (i) $1\frac{7}{9}$ (ii) $\frac{2}{9}$ (iii) $\frac{9}{16}$ (iv) $1\frac{2}{25}$

(v) $\frac{5}{8}$ (vi) $1\frac{13}{20}$ (vii) $1\frac{13}{48}$

3. (i) $2\frac{1}{10}$ (ii) $4\frac{44}{45}$ (iii) 8 (iv) $2\frac{1}{42}$

(v) $1\frac{33}{35}$ (vi) $7\frac{4}{5}$ (vii) $2\frac{1}{7}$

4. (i) $\frac{3}{5}$ इत्यस्य $\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ इत्यस्य $\frac{6}{7}$ 5. $2\frac{1}{4}$ मी.

6. $10\frac{1}{2}$ होराः 7. 44 कि.मी.

8. (a) (i) $\frac{5}{10}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (b) (i) $\frac{8}{15}$ (ii) $\frac{8}{15}$

प्रश्नावली 2.4

1. (i) 16 (ii) $\frac{84}{5}$ (iii) $\frac{24}{7}$

(iv) $\frac{3}{2}$ (v) $\frac{9}{7}$ (vi) $\frac{7}{5}$

2. (i) $\frac{7}{3}$ (विषमभिन्नः) (ii) $\frac{8}{5}$ (विषमभिन्नः) (iii) $\frac{7}{9}$ (उचितभिन्नः)

(iv) $\frac{5}{6}$ (उचितभिन्नः) (v) $\frac{7}{12}$ (उचितभिन्नः) (vi) 8 (पूर्णसङ्ख्या) (vii) 11 (पूर्णसङ्ख्या)

3. (i) $\frac{7}{6}$ (ii) $\frac{4}{45}$ (iii) $\frac{6}{91}$ (iv) $\frac{13}{19}$

(v) $\frac{7}{8}$ (vi) $\frac{31}{49}$

4. (i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{3}{8}$ (iv) $\frac{35}{9}$

(v) $\frac{21}{16}$ (vi) $\frac{4}{15}$ (vii) $\frac{48}{25}$ (viii) $\frac{11}{6}$

प्रश्नावली 2.5

1. (i) 0.5 (ii) 0.7 (iii) 7 (iv) 1.49
(v) 2.30 (vi) 0.88

2. (i) 0.07 रू . (ii) 7.07 रू. (iii) 77.77 रू (iv) 0.50 रू. (v) 2.35 रू.

3. (i) 0.05 मी ., 0.00005 कि.मी. (ii) 3.5 से.मी., 0.035 मी., 0.000035 कि.मी.

4. (i) 0.2 कि.ग्रा. (ii) 3.470 कि.ग्रा. (iii) 4.008 कि.ग्रा.

5. (i) $2 \times 10 + 0 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100}$ (ii) $2 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100}$

(iii) $2 \times 100 + 0 \times 10 + 0 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100}$ (iv) $2 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100} + 4 \times \frac{1}{1000}$

6. (i) एककम् (ii) शतकम् (iii) दशांशः (iv) शतांशः (v) सहस्रांशः

7. अयूबः अधिकां दूरतां क्रमितवान्। इयं दूरता 0.9 किलोमीटरपरिमिता अथवा नवशतमीटरपरिमिततः (900) अधिका आसीत्।

8. सरला अधिकानि फलानि क्रीतवती 9. 14.6 कि.मी.

प्रश्नावली 2.6

1. (i) 1.2 (ii) 36.8 (iii) 13.55 (iv) 80.4
(v) 0.35 (vi) 844.08 (vii) 1.72

2. 17.1 से.मी.^{2}

3. (i) 13 (ii) 368 (iii) 1537 (iv) 1680.7 (v) 3110
(vi) 15610 (vii) 362 (viii) 4307 (ix) 5 (x) 0.8
(xi) 90 (xii) 30

4. 553 कि.मी. 5. (i) 0.75 (ii) 5.17 (iii) 63.36 (iv) 4.03
(v) 0.025 (vi) 1.68 (vii) 0.0214 (viii) 10.5525
(ix) 1.0101 (x) 110.011

प्रश्नावली 2.7

1. (i) 0.2 (ii) 0.07 (iii) 0.62 (iv) 10.9
(v) 162.8 (vi) 2.07 (vii) 0.99 (viii) 0.16

2. (i) 0.48 (ii) 5.25 (iii) 0.07 (iv) 3.31
(v) 27.223 (vi) 0.056 (vii) 0.397

3. (i) 0.027 (ii) 0.003 (iii) 0.0078 (iv) 4.326
(v) 0.236 (vi) 0.9853

4. (i) 0.0079 (ii) 0.0263 (iii) 0.03853 (iv) 0.1289 (v) 0.0005

5. (i) 2 (ii) 180 (iii) 6.5 (iv) 44.2 (v) 2
(vi) 31 (vii) 510 (viii) 27 (ix) 2.1

6. 18 कि.मी.

प्रश्नावली 3.1

2

अङ्काः	मेलनचिह्नानि	आवृत्तयः
1	|	1
2	||	2
3	|	1
4	|||	3
5	$\cancel{\text{IIII}}$	5
6	||	4
7	|	2
8	|	1
9	|	1

(i) 9 (ii) 1 (iii) 8 (iv) 5

3. 2 4. 50 5. (i) 12.5 (ii) 3

(iii) $\frac{0+8+6+4}{4} = \frac{18}{4}$ अथवा $\frac{9}{2}$ (iv) A

6. (i) अधिकतमाः अङ्काः = 95, न्यूनतमाः अङ्काः = 39 (ii) 56 (iii) 73

7. 2058

8. (i) 20.5 (ii) 5.9 (iii) 5

9. (i) 151 से.मी. (ii) 128 से.मी. (iii) 23 से.मी. (iv)141.4 से.मी. (v) 5

प्रश्नावली 3.2

1. बहुलकः= 20, माध्यकः = 20, आम् 2. माध्यः = 39, बहुलकः = 15, माध्यकः = 15, न

3. (i) बहुलकः = 38, 43 माध्यकः= 40 (ii) आम्, अनयोः द्वौ बहुलकौ स्तः।

4. बहुलकः = 14, माध्यकः= 14

5. (i) सत्यम् (ii) असत्यम् (iii) सत्यम् (iv) असत्यम्

प्रश्नावली 3.3

1. (a) मार्जारी (b) 8

4. (i) गणितम् (ii) समाजिकविज्ञानम् (iii) हिन्दी

5. (ii) क्रिकेटक्रीडा (iii) क्रीडादर्शनम्

6. (i) जम्मूः (ii) जम्मूः, बेङ्गलूरुः

(iii) बेङ्गलूरुः तथा च जयपुरम् अथवा बेङ्गलूरुः तथा च अहमदाबादः (iv) मुम्बई

प्रश्नावली 3.4

1. (i) निश्चितम् अस्ति (ii) भवितुम् अर्हति किन्तु निश्चयेन रूपेण न (iii) असम्भवः

(iv) भवितुम् अर्हति किन्तु निश्चयेन रूपेण न (v) भवितुम् अर्हति किन्तु निश्चयेन रूपेण न

2. (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{1}{6}$ 3. $\frac{1}{2}$

प्रश्नावली 4.1

1. (i) न (ii) न (iii) अस्ति (iv) न (v) अस्ति
(vi) न (vii) अस्ति (viii) न (ix) न
(x) न (xi) अस्ति

2. (a) न (b) न (c) अस्ति (d) न
(e) न (f) न

3. (i) $p = 3$ (ii) $m = 6$

4. (i) $x + 4 = 9$ (ii) $y - 2 = 8$ (iii) $10a = 70$ (iv) $\frac{b}{5} = 6$ (v) $\frac{3t}{4} = 15$

(vi) 7 मी. $+ 7 = 77$ (vii) $\frac{x}{4} - 4 = 4$ (viii) $6y - 6 = 60$ (ix) $\frac{z}{3} + 3 = 30$

5. (i) p एवञ्च 4 इत्यनयोः योगः 15 इति अस्ति।
(ii) m इत्यस्मात् 7 इति ऋणं कृते सति 3 इति प्राप्यते।
(iii) m इति कस्याश्चित् सङ्ख्यायाः द्विगुणितम् 7 इति अस्ति।
(iv) m इति कस्याश्चित् सङ्ख्यायाः 1/5 इति 3 इति भवति।
(v) m इति कस्याश्चित् सङ्ख्यायाः 3/5 इति 6 इति भवति।
(vi) p इति कस्याश्चित् सङ्ख्यायाः त्रिगुणितस्य चतुर्भिः (4) योगः 25 इति अस्ति।
(vii) p इति कस्याश्चित् सङ्ख्यायाः चतुर्गुणिते द्वे व्यवकलिते सति 18 इति प्राप्यते।
(viii) p इति कस्याश्चित् सङ्ख्यायाः अर्धे द्वे व्यवकलिते सति 8 इति प्राप्यते।

6. (i) $5m + 7 = 37$ (ii) $3y + 4 = 49$ (iii) $2l + 7 = 87$ (iv) $4b = 180°$

प्रश्नावली 4.2

1. (a) उभयोः पक्षयोः एकं योजयन्तु, $x = 1$
(b) उभयोः पक्षयोः एकम् ऋणं कृते सति, $x = -1$
(c) उभयोः पक्षयोः एकं योजयन्तु, $x = 6$
(d) उभाभ्यां पक्षाभ्यां 6 इति ऋणीकुर्वन्तु, $x = -4$
(e) उभयोः पक्षयोः 4 इति योजयन्तु, $y = -3$
(f) उभयोः पक्षयोः 4 इति योजयन्तु, $y = 8$
(g) उभयोः पक्षयोः 4 इति ऋणीकुर्वन्तु, $y = 0$
(h) उभयोः पक्षयोः 4 इति ऋणीकुर्वन्तु, $y = -8$

2. (a) उभौ पक्षौ त्रिभिः भागं दद्यः $1 = 14$
(b) उभौ पक्षौ द्वाभ्यां गुणयन्तु, $b = 12$
(c) उभौ पक्षौ 7 इत्यनेन गुणयन्तु $p = 28$
(d) उभौ पक्षौ चतुर्भिः (4) विभाजयामः, $x = \frac{25}{4}$
(e) उभौ पक्षौ 8 इत्यनेन विभाजयामः $y = \frac{36}{8}$
(f) उभौ पक्षौ त्रिभिः गुण्येताम् $z = \frac{15}{4}$
(g) उभौ पक्षौ पञ्चभिः (5) गुणीकुर्वन्तु, $a = \frac{7}{3}$
(h) उभौ पक्षौ 20 इत्यनेन भागं दद्यः $t = \frac{1}{2}$

3. (a) प्रथमचरणम् - उभयोः पक्षयोः 2 इति योजयन्तु।
द्वितीयचरणम् - उभौ पक्षौ त्रिभिः भागं यच्छन्तु, $n = 16$
(b) प्रथमचरणम् - उभयस्मात् पक्षात् 7 इति ऋणीकुर्वन्तु।
द्वितीयचरणम् - उभौ पक्षौ पञ्चभिः (5), $m = 2$
(c) प्रथमचरणम् - उभौ पक्षौ त्रिभिः गुणयन्तु
द्वितीयचरणम् - उभौ पक्षौ विंशत्या (20) भागं यच्छन्तु, $p = 6$
(d) प्रथमचरणम् - उभौ पक्षौ दशभिः गुणयन्तु।
द्वितीयचरणम् - उभौ पक्षौ त्रिभिः भागं यच्छन्तु $p = 20$

4. (a) $p = 10$ (b) $p = 9$ (c) $p = 20$ (d) $p = -15$ (e) $p = 8$
(f) $s = -3$ (g) $s = -4$ (h) $s = 0$ (i) $q = 3$
(j) $q = 3$ (k) $q = -3$ (l) $q = 3$

प्रश्नावली 4.3

1. (a) $y = 8$ (b) $t = \frac{12}{5}$ (c) $a = -5$ (d) $q = -8$ (e) $x = -4$

(f) $x = \frac{5}{2}$ (g) $m = \frac{1}{2}$ (h) $z = -2$ (i) $l = \frac{4}{9}$ (j) $b = 12$

2. (a) $x = 2$ (b) $n = 12$ (c) $n = -2$ (d) $x = -4$ (e) $x = 0$

3. (a) $p = \frac{14}{3}$ (b) $p = \frac{6}{5}$ (c) $t = -\frac{6}{5}$ (d) $p = 7$ (e) $m = 2$

4. (a) तानि $10x + 2 = 22$, $\frac{x}{5} = \frac{2}{5}$, $5x - 3 = 7$ इति सम्भावितसमीकरणानि सन्ति।

(b) तानि $3x = -6$, $3x + 7 = 1$, $3x + 10 = 4$ इति सम्भावितसमीकरणानि सन्ति।

प्रश्नावली 4.4

1. (a) $8x + 4 = 60$, $x = 7$ (b) $\frac{x}{5} - 4 = 3$, $x = 35$

(c) $\frac{3}{4} y + 3 = 21$, $y = 24$ (d) $2m - 11 = 15$, $m = 13$

(e) $50 - 3x = 8$, $x = 14$ (f) $\frac{x + 19}{5} = 8$, $x = 21$

(g) $\frac{5n}{2} - 7 = 23$, $n = 12$

2. (a) न्यूनतमाः अङ्काः = 40 (b) प्रत्येकं कोणः 70°
(c) सचिनः 132 इति धावनाङ्काः राहुलः 66 इति धावनाङ्काः

3. (i) 6 (ii) 15 वर्षाणि (iii) 25 4. 30

प्रश्नावली 5.1

1. (i) 70° (ii) 27° (iii) 33°

2. (i) 75° (ii) 93° (iii) 26°

3. (i) सम्पूरकः (ii) पूरकः (iii) सम्पूरकः
(iv) सम्पूरकः (v) पूरकः (vi) पूरकः

4. 45° 5. 90°

6. येन मापेन 1 इति व्यवकलिष्यते तेन एव मापेन 2 इति वर्धिष्यते।

7. (i) न (ii) न (iii) अस्ति 8. 45° इत्यस्मात् न्यूनम्

9. (i) अस्ति (ii) न (iii) अस्ति

(iv) अस्ति (v) अस्ति (vi) ∠COB

10. (i) ∠1, ∠4; ∠5, ∠2 + ∠3 (ii) ∠1, ∠5; ∠4, ∠5

11. ∠1 तथा च ∠2 इति आसन्नकोणौ न स्तः यतोहि तयोः शीर्षे उभयनिष्ठे न स्तः।

12. (i) x = 55°, y = 125°, z = 125° (ii) x = 115°, y = 140°, z = 40°

13. (i) 90° (ii) 180° (iii) सम्पूरकः (iv) रैखिकयुग्मः
(v) समानः (vi) अधिककोणः

14. (i) ∠AOD, ∠BOC (ii) ∠EOA, ∠AOB (iii) ∠EOB, ∠EOD
(iv) ∠EOA, ∠EOC (v) ∠AOB, ∠AOE; ∠AOE, ∠EOD; ∠EOD, ∠COD

प्रश्नावली 5.2

1. (i) सङ्गत-कोण-गुण-धर्मः (ii) अन्तः एकान्तर-कोण-गुणधर्मः
(iii) तिर्यक् छेदिनी रेखायाः एकस्मिन् भागे निर्मित-कोणानां प्रत्येकं युग्मः सम्पूरकः भवति

2. (i) ∠1, ∠5; ∠2, ∠6; ∠3, ∠7; ∠4, ∠8 (ii) ∠2, ∠8; ∠3, ∠5
(iii) ∠2, ∠5; ∠3, ∠8 (iv) ∠1, ∠3; ∠2, ∠4; ∠5, ∠7; ∠6, ∠8

3. a = 55° b = 125° c = 55° d = 125° e = 55° f = 55°

4. (i) x = 70° (ii) x = 100°

5. (i) ∠DGC = 70° (ii) ∠DEF = 70°

6. (i) l इति m इत्यस्य समान्तरः नास्ति। (ii) l इति m इत्यस्य समान्तरः नास्ति।
(iii) l इति m इत्यस्य समान्तरः अस्ति। (iv) l इति m इत्यस्य समान्तरः नास्ति।

प्रश्नावली 6.1

1. औन्नत्यम्, माध्यिका , नास्ति

प्रश्नावली 6.2

1. (i) 120° (ii) 110° (iii) 70° (iv) 120° (v) 100° (vi) 90°

2. (i) 65° (ii) 30° (iii) 35° (iv) 60° (v) 50° (vi) 40°

प्रश्नावली 6.3

1. (i) 70° (ii) 60° (iii) 40° (iv) 65° (v) 60° (v i) 30°

2. (i) x = 70°, y = 60° (ii) x = 50°, y = 80° (iii) x = 110°, y = 70°
(iv) x = 60°, y = 90° (v) x = 45°, y = 90° (vi) x = 60°, y = 60°

प्रश्नावली 6.4

1. (i) सम्भवः नास्ति। (ii) सम्भवः अस्ति। (iii) सम्भवः नास्ति ।

2. (i) आम् (ii) आम् (iii) आम्

3. आम् 4. आम् 5. न

6. 3 तथा च 27 इत्यनयोः मध्ये

प्रश्नावली 6.5

1. 26 से.मी. 2. 24 से.मी. 3. 9 मी. 4. (i) तथा च (iii) 5. 18 मी.

6. (ii) 7. 98 से.मी. 8. 68 से.मी.

प्रश्नावली 7.1

1. (a) द्वयोः अपि दैर्घ्यम् समानम् अस्ति। (b) 70° (c) m ∠A = m∠B

3. ∠A ↔ ∠F, ∠B ↔ ∠E, ∠C ↔∠D, $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{FE}$, $\overline{BC} \leftrightarrow \overline{ED}$, $\overline{AC} \leftrightarrow \overline{FD}$

4. (i) ∠C (ii) $\overline{CA}$ (iii) ∠A (iv) $\overline{BA}$

प्रश्नावली 7.2

1. (a) भुजात्रयस्य सर्वाङ्गसमता-प्रतिबन्धः (b) भुजा-कोण-भुजा-सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धः

(c) कोण-भुजा-कोण-सर्वाङ्गसमता-प्रतिबन्धः (d) RHS सर्वाङ्गसमता-प्रतिबन्धः

2. (a) (i) PE (ii) EN (iii) PN (b) (i) EN (ii) AT

(c) (i) ∠RAT = ∠EPN (ii)∠ATR = ∠PNE

3. (i) दत्तम् अस्ति (ii) दत्तम् अस्ति (iii) उभयनिष्ठम् (iv) भुजा-कोण-भुजा- सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धः 4. न

5. ΔWON **6.** ΔBTA, ΔTPQ 9. BC = QR, ASA इति सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धः

प्रश्नावली 8.1

1. (a) 10:1 (b) 500:7 (c) 100:3 (d) 20:1

2. 12 इति सङ्गणकानि

3. (i) राजस्थानम् (190) नवत्यधिकमेकशतं जनाः, उत्तरप्रदेशः त्रिंशदधिकष्टशतम् (830) जनाः (ii) राजस्थानम्

प्रश्नावली 8.2

1. (a) 12.5% (b) 125% (c) 7.5% (d) 28 4/7 %

2. (a) 65% (b) 210% (c) 2% (d) 1235%

3. (i) $\frac{1}{4}$, 25% (ii) $\frac{3}{5}$, 60% (iii) $\frac{3}{8}$, 37.5%

4. (a) 37.5 (b) $\frac{3}{5}$ निमेषाः अथवा 36 इति विपलानि

(c) 500 रू. (d) 0.75 कि.ग्रा. 750 ग्रा.

5. (a) 12000 (b) 9000 रू. (c) 1250 कि.मी. (d) 20 निमेषाः (e) 500 लीटर

6. (a) 0.25 , $\frac{1}{4}$ (b) 1.5 , $\frac{3}{2}$ (c) 0.2 , $\frac{1}{5}$ (d) 0.05 , $\frac{1}{20}$

7. 30% 8. 40% , 6000 9. 4000रू. 10. 5 प्रतियोगिताः

प्रश्नावली 8.3

1. (a) लाभः = 75 रूप्याकाणि, लाभः %= 30 (b) लाभः = 1500 रू ., लाभः % = 12.5

(c) लाभः = 500 रू., लाभः % = 20 (d) हानिः = 100 रू., हानिः % = 40

2. (a) 75%; 25% (b) 20%, 30%, 50% (c) 20%; 80%

(d) 12.5%; 25%; 62.5%

3. 2% 4. $5\frac{5}{7}$% 5. 12000 रू. 6. 16875 रू

7. (i) 12% (ii) 25 ग्रा. 8. 233.75 रू. 9. (a) 1632 रू. (b) 8625 रू.

10. 0.25% 11. 500 रू.

प्रश्नावली 9.1

1. (i) $\frac{-2}{3}, \frac{-1}{2}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{7}$ (ii) $\frac{-3}{2}, \frac{-5}{3}, \frac{-8}{5}, \frac{-10}{7}, \frac{-9}{5}$

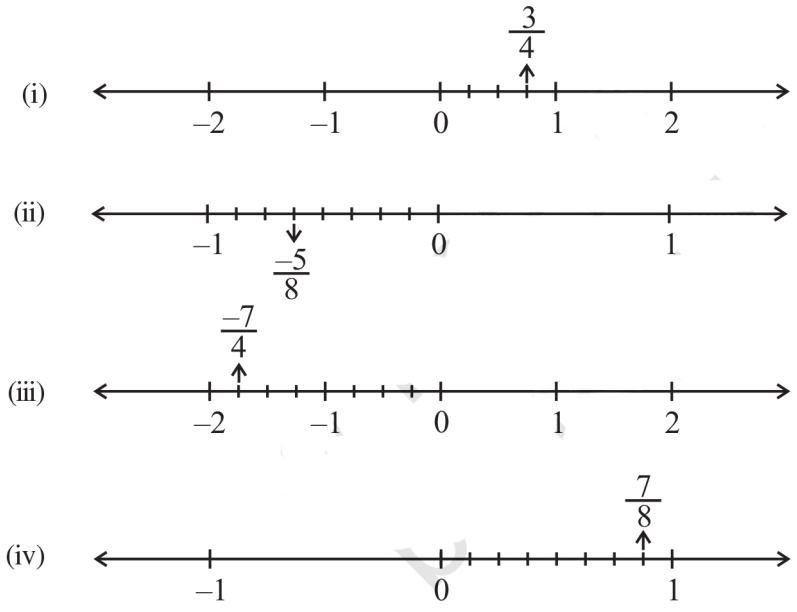
(iii) $\frac{-35}{45} = \frac{-7}{9}, \frac{-34}{45}, \frac{-33}{45} = \frac{-11}{15}, \frac{-32}{45}, \frac{-31}{45}$ (iv) $\frac{-1}{3}, \frac{-1}{4}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

2. (i) $\frac{-15}{25}, \frac{-18}{30}, \frac{-21}{35}, \frac{-24}{40}$ (ii) $\frac{-4}{16}, \frac{-5}{20}, \frac{-6}{24}, \frac{-7}{28}$

(iii) $\frac{5}{-30}, \frac{6}{-36}, \frac{7}{-42}, \frac{8}{-48}$ (iv) $\frac{8}{-12}, \frac{10}{-15}, \frac{12}{-18}, \frac{14}{-21}$

3. (i) $\frac{4}{-14}, \frac{6}{-21}, \frac{8}{-28}, \frac{10}{-35}$ (ii) $\frac{10}{-6}, \frac{15}{-9}, \frac{20}{-12}, \frac{25}{-15}$ (iii) $\frac{8}{18}, \frac{12}{27}, \frac{16}{36}, \frac{28}{63}$

4.



5. P इति $\frac{7}{3}$ इति निरूपयति, Q इति $\frac{8}{3}$ इति निरूपयति, R इति $\frac{-4}{3}$ इति निरूपयति, S इति $\frac{-5}{3}$ इति निरूपयति।

6. (ii), (iii), (iv), (v)

7. (i) $\frac{-4}{3}$ (ii) $\frac{5}{9}$ (iii) $\frac{-11}{18}$ (iv) $\frac{-4}{5}$

8. (i) < (ii) < (iii) = (iv) >

(v) < (vi) = (vii) >

9. (i) $\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{-5}{6}$ (iii) $\frac{2}{-3}$ (iv) $\frac{1}{4}$ (v) $-3\frac{2}{7}$

10. (i) $\frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}$ (ii) $\frac{-4}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{9}$ (iii) $\frac{-3}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{-3}{7}$

प्रश्नावली 9.2

1. (i) $\frac{-3}{2}$ (ii) $\frac{34}{15}$ (iii) $\frac{17}{30}$ (iv) $\frac{82}{99}$

(v) $\frac{-26}{57}$ (vi) $\frac{-3}{2}$ (vii) $\frac{34}{15}$

2. (i) $\frac{-13}{72}$ (ii) $\frac{23}{63}$ (iii) $\frac{1}{195}$ (iv) $\frac{-89}{88}$ (v) $\frac{-73}{9}$

3. (i) $\frac{-63}{8}$ (ii) $\frac{-27}{10}$ (iii) $\frac{-54}{55}$

(v) $\frac{-6}{35}$ (v) $\frac{6}{55}$ (vi)1

4. (i) – 6 (ii) $\frac{-3}{10}$ (iii) $\frac{4}{15}$ (iv) $\frac{-1}{16}$

(v) $\frac{-14}{13}$ (vi) $\frac{91}{24}$ (vii) $\frac{-15}{4}$

प्रश्नावली 11.1

1. (i) 150000 मी.^{2} (ii) 1,500,000,000 रूप्यकाणि

2. 6400 मी.^{2} 3. 20 मी. 4. 15 से.मी. , 525 से.मी.^{2}

5. 40 मी. 6. 31 से.मी. ; वर्गाकारस्य

7. 35से.मी., 1050 से.मी^{2}. 8. 284 रूप्यकाणि

प्रश्नावली 11.2

1. (a) 28 से.मी.^{2} (b) 15 से.मी.^{2} (c) 8.75 से.मी.^{2} (d) 24 से.मी.^{2} (e) 8.8 से.मी^{2}.

2. (a) 6 से.मी^{2} (b) 8 से.मी^{2} (c) 6 से.मी^{2} (d) 3 से.मी^{2}

3. (a) 12.3 से.मी. (b) 10.3 से.मी. (c) 5.8 से.मी. (d) 1.05 से.मी.

4. (a) 11.6 से.मी. (b) 80 से.मी. (c) 15.5 से.मी.

5. (a) 91.2 से.मी.2 (b) 11.4 से.मी.

6. BM इत्यस्य दैर्घ्यम् = 30से.मी., DL इत्यस्य दैर्घ्यम् = 42 से.मी.

7. ΔABC इति त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् = 30 से.मी.^{2} AD इत्यस्य दैर्घ्यम् = $\frac{60}{13}$ से.मी.

8. ΔABC इति त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् = 27 से.मी^{2}, CE इत्यस्य दैर्घ्यम् = 7.2 से.मी.

प्रश्नावली 11.3

1. (a) 88 से.मी. (b) 176 मी.मी. (c) 132 से.मी.

2. (a) 616 मी. मी.^{2} (b) 1886.5 मी.^{2} (c) $\frac{550}{7}$ से.मी.^{2}

3. 24.5 मी., 1886.5 मी.^{2} **4.** 132 मी., 528 रू. **5.** 21.98 से.मी.^{2}

6. 4.71 मी., 70.65रू. **7.** 25.7 से.मी. **8.** 30.14रू. (प्रायेण)

9. 7 से.मी., 154 से.मी.^{2} 11से.मी., वृत्तम्

10. 536 से.मी.^{2} **11.** 23.44 से.मी.^{2} **12.** 5 से.मी., 78.5 से.मी.^{2} **13.** 879.20 मी.^{2}

14. अस्ति **15.** 119.32 मी., 56.52 मी. **16.** 200 इति गुणितम् **17.** 94.2 से.मी.

प्रश्नावली 11.4

1. 1750 मी.^{2} ; 0.675 ha **2.** 1176 मी.^{2} **3.** 30 से.मी.^{2}

4. (i) 63 मी.^{2} (ii) 12,600रू. **5.** (i) 116 मी.^{2} (ii) 31,360 रू.

6. 0.99 ha; 1.2 ha **7.** (i) 441 मी.^{2} (ii) 48,510रू.

8. आम्, 12 मीटरपरिमिता रज्जुः अवशिष्यते।

9. (i) 50 मी.^{2} (ii) 12.56 मी.^{2} (iii) 37.44 मी.^{2} (iv)12.56 मी.

10. (i) 110 से.मी.^{2} (ii) 150 से.मी.^{2} **11.** 66 से.मी.^{2}

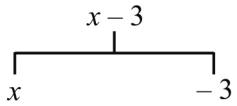
प्रश्नावली 12.1

1. (i) $y - z$ (ii) $\frac{1}{2}(x + y)$ (iii) z^2 (iv) $\frac{1}{4}pq$ (v) $x^2 + y^2$

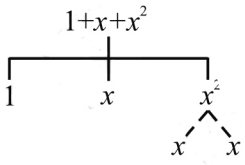
(vi) $5 + 3mn$ (vii) $10 - yz$ (viii) $ab - (a + b)$

2. (i)

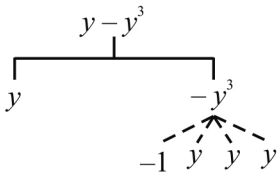
(a)

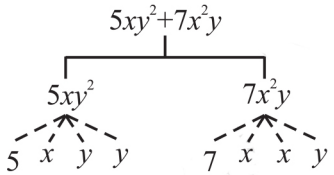


(b)

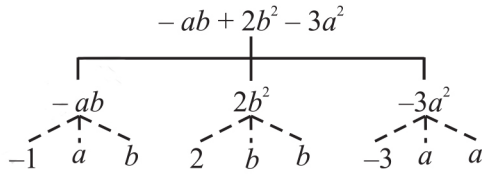


(c)





(e)



(ii)

	व्यञ्जकः	पदम्	गुणनखण्डः
(a)	$-4x + 5$	$-4x$ 5	$-4, x$ 5
(b)	$-4x + 5y$	$-4x$ $5y$	$-4, x$ $5, y$

(c)	$5y + 3y^2$	$5y$ $3y^2$	5,y 3,y,y
(d)	$xy+2x^2 y^2$	Xy $2x^2 y^2$	x, y 2, x, x, y, y
(e)	pq + q	Pq q	p, q q
(f)	1.2ab–2.4b+3.6a	1.2ab –2.4b 3.6a	1.2,a,b – 2.4, b 3.6, a
(g)	3/4 x+1/4	$\frac{3}{4}$ x, $\frac{1}{4}$	3/4 x 1/4
(h)	$0.1p^2 + 0.2q^2$	$0.1p^2$ $0.2q^2$	0.1, p, p 0.2, q, q

3.

	व्यञ्जकः	**पदम्**	**गुणनखण्डः**
(i)	$5 – 3t^2$	$– 3 t^2$	–3
(ii)	$1 + t + t^2 + t^3$	t t^2 t^3	1 1 1
(iii)	x + 2xy + 3y	x + 2xy + 3y	1 2 3
(iv)	100 m + 1000 n	100 m 1000 n	100 1000
(v)	$– p^2 q^2 + 7pq$	$– p^2 q^2$ 7pq	–1 7
(vi)	1.2a + 0.8b	1.2 a 0.8 b	1.2 0.8
(vii)	$3.14r^2$	$3.14r^2$	3.14
(viii)	2(l + b)	2l 2b	2 2
(ix)	$0.1y + 0.01y^2$	0.1y $0.01y^2$	0.1 0.01

4. (a)

	व्यञ्जक:	पदम्	गुणनखण्ड:
(i)	$y^2x + y$	y^2x	y^2
(ii)	$13y^2 - 8yx$	$-8yx$	$-8y$
(iii)	$x + y + 2$	x	1
(iv)	$5 + z + zx$	zx	z
(v)	$1 + x + xy$	x xy	1 y
(vi)	$12xy^2 + 25$	$12xy^2$	$12y^2$
(vii)	$7 + xy^2$	xy^2	y^2

(b)

	व्यञ्जक:	पदम्	गुणनखण्ड:
(i)	$8 - xy^2$	$-xy^2$	$-x$
(ii)	$5y^2 + 7x$	$5y^2$	5
(iii)	$2x^2y - 15xy^2 + 7y^2$	$-15xy^2$ $7y^2$	$-15x$ 7

5. (i) द्विपदम् (ii) एकपदम् (iii) त्रिपदम् (iv) एकपदम् (v) त्रिपदम्
(vi) द्विपदम् (vii) द्विपदम् (viii) एकपदम् (ix) त्रिपदम् (x) द्विपदम्
(xi) द्विपदम् (xii) त्रिपदम्

6. (i) समानपदम् (ii) समानपदम् (iii) असमानपदम् (iv) समानपदम्
(v) असमानपदम् (vi) असमानपदम्

7. (a) $-xy^2, 2xy^2, -4yx^2, 20x^2y; 8x^2, -11x^2, -6x^2, 7y, y; -100x, 3x; -11yx, 2xy.$
(b) $10pq, -7qp, 78qp, 7p, 2405p, 8q, -100q, -p^2q^2, 12q^2p^2, -23, 41, -5p^2, 701p^2, 13p^2q, qp^2$

प्रश्नावली 12.2

1. (i) $8b - 32$ (ii) $7z^3 + 12z^2 - 20z$ (iii) $p - q$ (iv) $a + ab$
(v) $8x^2y + 8xy^2 - 4x^2 - 7y^2$ (vi) $4y^2 - 3y$

2. (i) $2mn$ (ii) $-5tz$ (iii) $12mn - 4$ (iv) $a + b + 3$
(v) $7x + 5$ (vi) $3m - 4n - 3mn - 3$ (vii) $9x^2y - 8xy^2$
(viii) $5pq + 20$ (ix) 0 (x) $-x^2 - y^2 - 1$

3. (i) $6y^2$ (ii) $-18xy$ (iii) $2b$ (iv) $5a + 5b - 2ab$
(v) $5m^2 - 8mn + 8$ (vi) $x^2 - 5x - 5$
(vii) $10ab - 7a^2 - 7b^2$ (viii) $8p^2 + 8q^2 - 5pq$

4. (a) $x^2 + 2xy - y^2$ (b) $5a + b - 6$

5. $4x^2 - 3y^2 - xy$

6. (a) $-y + 11$ (b) $2x + 4$

प्रश्नावली 12.3

1. (i) 0 (ii) 1 (iii) –1 (iv) 1 (v) 1

2. (i) –1 (ii) –13 (iii) 3 3. (i) –9 (ii) 3 (iii) 0 (iv) 1

4. (i) 8 (ii) 4 (iii) 0 5. (i) –2 (ii) 2 (iii) 0 (iv) 2

6. (i) 5x – 13, –3 (ii) 8x – 1, 15 (iii) 11x – 10, 12 (iv) 11x + 7, 29

7. (i) 2x+4, 10 (ii) – 4x + 6, –6 (iii) –5a + 6,11 (iv) – 8b + 6, 22 (v) 3a – 2b – 9, – 8

8. (i) 1000 (ii) 20 9. –5 10. $2a^2 + ab + 3$, 38

प्रश्नावली 12.4

1.

अङ्कः	अङ्कानां सङ्ख्या	रेखाखण्डानां सङ्ख्या
6	5 10 100	26 51 501
4	5 10 100	16 31 301
8	5 10 100	27 52 502

2. (i) 2n – 1 → 100 तमः 199

(ii) 3n + 2 → 5 तमः : 17
10 तमः 32
100 तमः 302

(iii) 4n + 1 → 5 तमः 21
10 तमः 41
100 तमः 401

(iv) 7n + 20 → 5 तमः 55
10 तमः 90
100 तमः 720

(v) $n^2 + 1$ → 5 तमः 26
10 तमः 101

प्रश्नावली 13.1

1. (i) 64 (ii) 729 (iii) 121 (iv) 625

2. (i) 6^4 (ii) t^2 (iii) b^4 (iv) $5^2 \times 7^3$
(v) $2^2 \times a^2$ (vi) $a^3 \times c^4 \times d$

3. (i) 2^9 (ii) 7^3 (iii) 3^6 (iv) 5^5

4. (i) 3^4 (ii) 3^5 (iii) 2^8 (iv) 2^{100} (v) 2^{10}

5. (i) $2^3 \times 3^4$ (ii) 5×3^4 (iii) $2^2 \times 3^3 \times 5$ (iv) $2^4 \times 3^2 \times 5^2$

6. (i) 2000 (ii) 196 (iii) 40 (iv) 768 (v) 0
(vi) 675 (vii) 144 (viii) 90000

7. (i) – 64 (ii) 24 (iii) 225 (iv) 8000

8. (i) $2.7 \times 10^{12} > 1.5 \times 10^8$ (ii) $4 \times 10^{14} < 3 \times 10^{17}$

प्रश्नावली 13.2

1. (i) 3^{14} (ii) 6^5 (iii) a^5 (iv) 7^{x+2} (v) 5^3 (vi) 10^5
(vii) $(ab)^4$ (viii) 3^{12} (ix) 2^8 (x) 8^{t-2}

2. (i) 3^3 (ii) 5^3 (iii) 5^5 (iv) 7×11^5 (v) 3^0 तथा च 1
(vi) 3 (vii) 1 (viii) 2 (ix) $(2a)^2$
(x) a^{10} (xi) a^3b (xii) 2^8

3. (i) असत्यम् $10 \times 10^{11} = 10^{12}$ एवञ्च $(100)^{11} = 10^{22}$ (ii) असत्यम् $2^3 = 8, 5^2 = 25$
(iii) असत्यम् $6^5 = 2^5 \times 3^5$ (iv) सत्यम् $3^0 = 1, (1000)^0 = 1$

4. (i) $2^8 \times 3^4$ (ii) $2 \times 3^3 \times 5$ (iii) $3^6 \times 2^6$ (iv) $2^8 \times 3$

5. (i) 98 (ii) $\frac{5t^4}{8}$ (iii) 1

प्रश्नावली 13.3

1. $279404 = 2 \times 10^5 + 7 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 4 \times 10^0$
$3006194 = 3 \times 10^6 + 0 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 4 \times 10^0$
$2806196 = 2 \times 10^6 + 8 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 6 \times 10^0$
$120719 = 1 \times 10^5 + 2 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 9 \times 10^0$
$20068 = 2 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 8 \times 10^0$

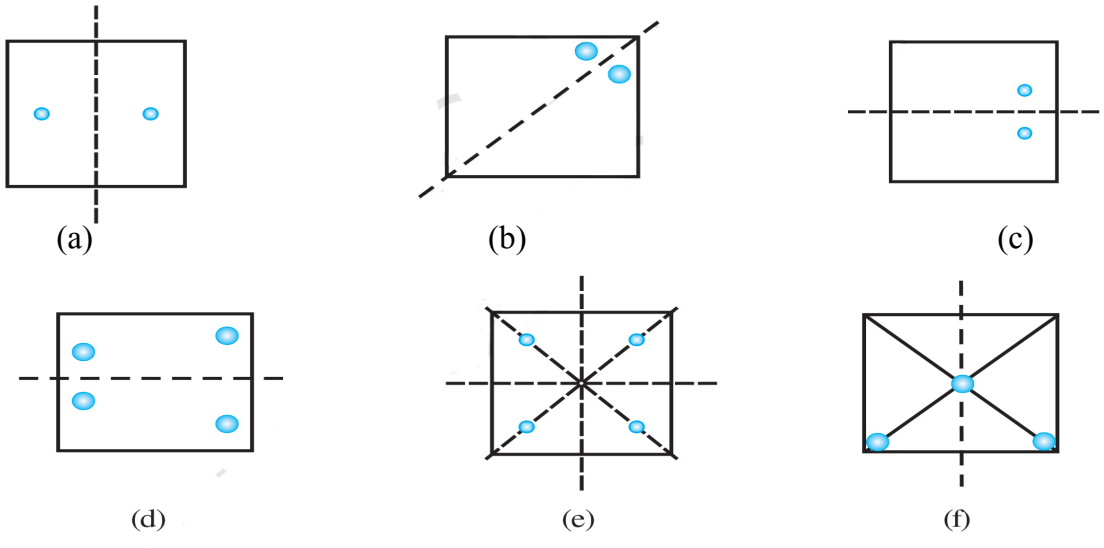
2. (a) 86045 (b) 405302 (c) 30705 (d) 900230

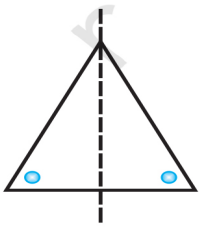
3. (i) 5×10^7 (ii) 7×10^6 (iii) 3.1865×10^9 (iv) 3.90878×10^5
(v) 3.90878×10^4 (vi) 3.90878×10^3

4. (a) 3.84×10^8 मी. (b) 3×10^8 मी./s (c) 1.2756×10^7 मी.
(d) 1.4×10^9 मी. (e) 1×10^{11} (f) 1.2×10^{10} इति वर्षाणि
(g) 3×10^{20} मी. (h) 6.023×10^{22}
(i) 1.353×10^9 कि.मी.^{3} (j) 1.027×10^9

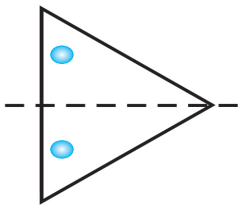
प्रश्नावली 14.1

1.

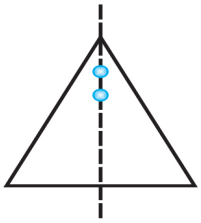




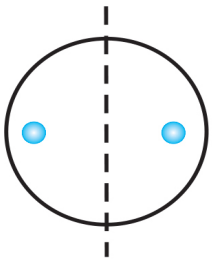
(g)



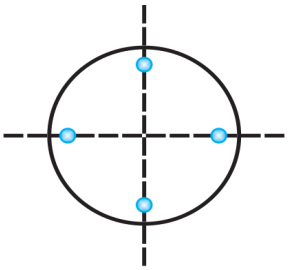
(h)



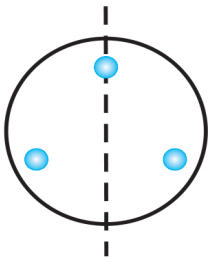
(i)



(j)

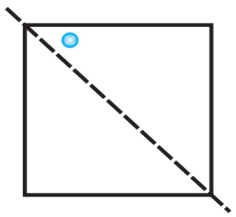


(k)

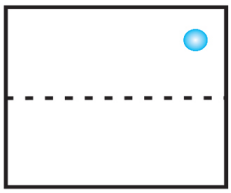


(l)

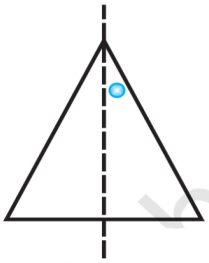
2.



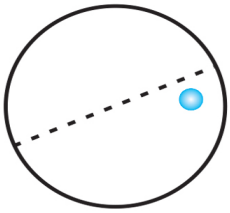
(a)



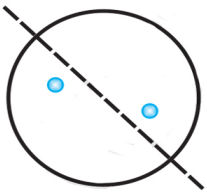
(b)



(c)

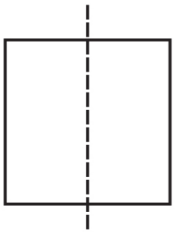


(d)

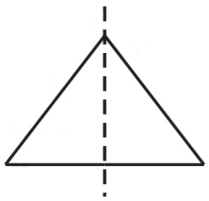


(e)

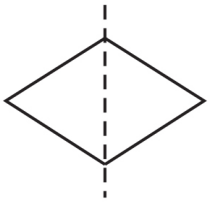
3.



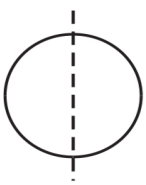
(a) वर्गः



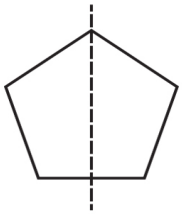
(b) त्रिभुजम्



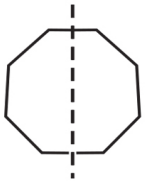
(c) समचतुर्भुजम्



(d) वृत्तम्



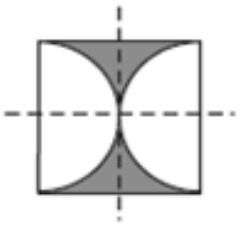
(e) पञ्चभुजम्



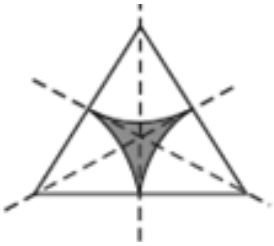
(f) अष्टभुजम्

4.

(a)

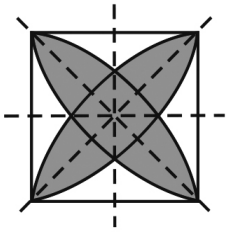


(b)

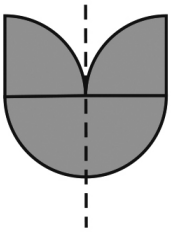


(c)

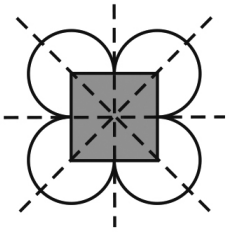
(d)



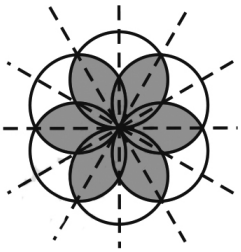
(e)



(f)



(g)



(h)

7. (a) 3 (b) 1 (c) 0 (d) 4 (e) 2

(f) 4 (g) 0 (h) 0 (i) 6 (j) अनन्त

8. (a) A, H, I, M., O, T, U, V, W, X, Y (b) B, C, D, E, H, I, O, X

(c) O, X, I, H

10. (a) माध्यिका (b) व्यासः

प्रश्नावली 14.2

1. (a), (b), (d), (e), (f)

2. (a) 2 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 4

(f) 5 (g) 6 (h) 3

प्रश्नावली 14.3

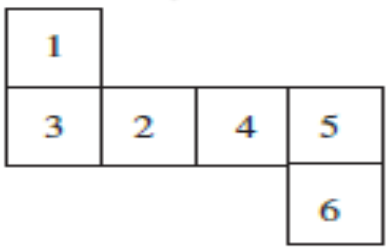
3. अस्ति **5.** वर्गः **6.** 120°, 180°, 240°, 300°, 360°

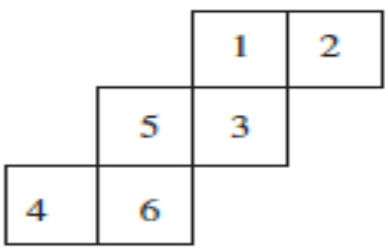
7. (i) अस्ति (ii) न

प्रश्नावली 15.1

1. (ii), (iii), (iv), (vi) इत्यादीनां जालकानि घनं निर्मान्ति।

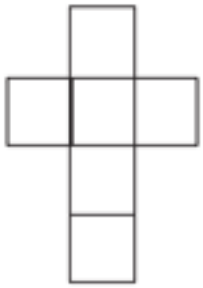
2.

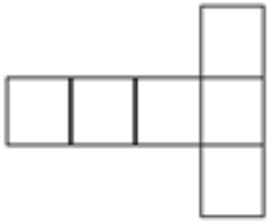




3. न, यतो हि सम्मुखफलकानां कस्मिंश्चिद् युग्मे 1तथा च 4 इति भविष्यतः ययोः योगः 7 इति नास्ति अथ च सम्मुखफलकानाम् अन्यस्मिन् कस्मिंश्चिद् युग्मे 3 तथा च 6 इति इति भविष्यतः ययोः योगः 7 इति न भविष्यति।

4. त्रीणि फलकानि





5. (a) (ii) (b) (iii) (c) (iv) (d) (i)

बौद्धिकः व्यायामः

1. एतां सङ्ख्या-प्रहेलिकां सरलीकुर्वन्तु -

(i) कोऽहं कोऽहम् इति सूचयन्तु
मत्तः सङ्ख्याम् अष्ट इति निष्कासयन्तु।
पुनश्च तद् द्वादशकेन विभक्तीकुर्वन्तु
अखिलमेकं क्रिकेटदलं भवन्तः आप्नुवन्तु॥

(ii) षड्गुणिते संयोज्य चत्वारि कस्याश्चित् सङ्ख्यायाः
अवाप्स्यन्ति अत्र भवन्तः चतुर्षष्टिः।
सम्पूर्णं भविष्यति भवतां श्रेयः
सकृद्यदि निर्दिशन्तु योगाङ्कं भवन्तः॥

2. एताः प्रहेलिकाः सरलीकुर्वन्तु -

(i) वने कस्मिंश्चिद् आसीत् अश्वत्थः वृक्षः एकः
तिस्रः दश च शाखाः आसन् अस्य बृहद्वृक्षस्य।
एकैकस्यां शाखायां निवसन्ति चतुर्दश खगाः
चटकाः बभ्रुः, कृष्णाः काकाः, हरिताः शुकाः च
काकाः आसन् द्विगुणिताः शुकेभ्यः
काकेभ्यः च आसन् द्विगुणिताः चटकाः
आश्चर्यान्विताः स्मः वयं कति आसन् पक्षिणः प्रतिविधाः
किं भवन्तः न करिष्यन्ति साहाय्यम् अस्माकम् एतस्य अन्वेषणे

(ii) मम सन्निकटे कानिचिद् पञ्चरूप्यकाणां नाणकानि कानिचित् च द्विरूप्यकाणां नाणकानि सन्ति । द्विरूप्यकाणां नाणकानां सङ्ख्या पञ्चरूप्यकाणां नाणक-सङ्ख्यातः द्विगुणिता अस्ति । मम पार्श्वे आहत्य अष्टोत्तरैकशतम् (108) रूप्यकाणि सन्ति। मम सविधं पञ्चरूप्यकाणां कति नाणकानि सन्ति ? अथ च द्विरूप्यकाणां कति नाणकानि भविष्यन्ति ?

3. अस्ति मम सविधं भाण्डद्वयं तस्मिन् च अस्ति कटद्वयम् । प्रत्येकस्मिन् कटे वर्तते मार्जारीद्वयम् । प्रत्येकं मार्जार्या धृतं हास्यास्पदं शीर्षण्यद्वयम्। अस्ति प्रत्येकस्मिन् शीर्षण्ये लघुमूषकद्वयम् । प्रत्येकस्मिन् लघुमूषके उपविष्टे चर्मचटीद्वयम् । बोधयन्तु अधुना मम भाण्डयोः कति वस्तूनि सन्ति ?

4. सप्तविंशत्या संश्लिष्य लघुघनैः निर्मितः एकः बृहान् घनः । बृहतः घनस्य बहिर्भागाय दत्तः कश्चिद् वर्णः पीतः। सप्तविंशत्याम् एषु लघुघनेषु कति घनेषु वर्णः पीतः –

(i) तेषु केवलम् एकस्मिन् फलके भविष्यति ?

(ii) द्वयोः फलकयोः भविष्यति ?

(iii) त्रिषु फलकेषु भविष्यति ?

5. राहुलः निजोद्यानस्य कस्यचिद् वृक्षस्य औन्नत्यं ज्ञातुम् इच्छति स्म । सः स्वस्य आत्मनः छायायाः दीर्घतयोः अनुपातम् अपश्यत् । सः अनुपातः 4 :1 इति आसीत् । तदनन्तरं सः वृक्षछायाम् अमात् । तस्याः मापः 15 फीटपरिमितः आसीत् । अतः वृक्षस्य औन्नत्यं किं भविष्यति ?

6. कश्चिद् तक्षकः 12 इति निमेषेषु काष्ठस्य कञ्चित् खण्डं त्रिषु खण्डेषु त्रोटयति । सः एतादृशान् पञ्च खण्डान् कर्तुं कियन्तं कालं स्वीकरिष्यति ?

7. प्रक्षालनानन्तरं किमपि वस्त्रं 0.5% परिमितम् आकुञ्चति । अस्य भिन्नरूपं किम् अस्ति ?

8. स्मितायाः मातुः वयः चतुःत्रिंशद् वर्षाणि अस्ति। अस्माद् दिनद्वयानन्तरं मातुः वयः स्मितायाः वर्तमानवयसः चतुर्गुणितं भविष्यति । स्मितायाः वर्तमानवयः कियद् अस्ति ?

9. माया मधुरा मोहसिना मित्राणि सन्ति याः एकस्यामेव कक्षायां पठन्ति । कस्याञ्चित् कक्षापरीक्षायां भूगोलशास्त्रे पञ्चविंशत्याः (25) अङ्केभ्यः माया षोड्श (16) मधुरा च विंशतिम् (20) अङ्कान् प्राप्नुतः । तयोः मध्यमानम् एकोनविंशतिः (19) आसीत् । मोहसिना कति अङ्कान् प्राप्नोत् ?

उत्तराणि

1. (i) 140 (ii) 10

2. (i) 104 इति चटकाः , 52 इति काकाः 26 इति शुकाः ।

(ii) पञ्चरूप्यकाणां नाणकसङ्ख्या = 12 , द्विरूप्यकाणां नाणकसङ्ख्या = 24

3. 124 **4.** (i) 6 (ii) 10 (iii) 8

5. 60 फीटपरिमिता

6. 24 निमेषाः **7.** 1/200 **8.** सप्तवर्षाणि **9.** 21

टिप्पणी

757

राष्ट्रिय-शैक्षिकानुसन्धान-प्रशिक्षण-परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONL RESEARCH AND TRAINING

81-7450-691-8